МГУ – ШКОЛЕ

# Алгебра

# 8

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ - ШКОЛЕ

ФГОС

# Алгебра

## 8 класс

**Учебник для общеобразовательных организаций**

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва
«Просвещение»
2014

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

**Авторы:** С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

На учебник получены **положительные экспертные заключения** по результатам **научной** (заключение РАН № 10106-5215/296 от 12.10.12), **педагогической** (заключение РАО № 299 от 29.01.14) и **общественной** (заключение РКС № 333 от 07.02.14) экспертиз.

**Условные обозначения:**

— задания, предназначенные для устной работы

— задания повышенной трудности

— начало необязательного материала внутри пункта

— конец необязательного материала внутри пункта

**Алгебра.** 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций /
А45 [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — М. : Просвещение, 2014. — 301 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-027740-2.

Данный учебник является частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и переработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС, и дать учащимся хорошую подготовку по алгебре в объёме традиционной общеобразовательной программы или программы для классов с углублённым изучением математики.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-027740-2

# Дорогие восьмиклассники!

В этом году вы продолжите изучение алгебры. Алгебра, наряду с арифметикой и геометрией, принадлежит к числу старейших математических наук. Задачи и методы алгебры, отличающие её от других разделов математики, создавались постепенно, начиная с древности. Алгебра возникла под влиянием нужд практики, в результате поисков общих приёмов для решения однотипных арифметических задач. Приёмы эти заключались обычно в составлении и решении уравнений.

За 2 тысячи лет до нашего времени китайские учёные решали уравнения первой степени и их системы, а также квадратные уравнения. Им уже были известны отрицательные и иррациональные числа. Ещё во II в. до н. э. в Индии была известна (до $n = 8$) таблица, которую мы называем «треугольником Паскаля». Она воспроизведена в китайском трактате XIII—XIV вв. В Европе она была вновь открыта лишь спустя 250 лет.

С XVI в. начинается бурное развитие алгебры в Европе. Были открыты способы решения уравнений третьей и четвёртой степеней. Получили распространение отрицательные числа. Было доказано, что любое уравнение выше четвёртой степени нельзя решить алгебраическим способом.

Современная школьная алгебра включает в себя не только действия с буквенными выражениями и решение уравнений. Сюда входят ещё и вопросы, относящиеся к математическому анализу, — понятие действительного числа, функции, её графика и т. п.

Алгебра нужна в повседневной жизни, так как учит общим правилам действий над объектами, которые не обязательно являются числами, учит решать уравнения (линейные, квадратные, рациональные и др.), доказывать тождества, неравенства, применять функции для решения задач.

В учебнике 8 класса появляется новая запись для некоторых чисел — с помощью арифметического квадратного корня. Это расширяет круг задач, в которых ответ теперь можно выразить с помощью арифметического квадратного корня, позволяет решать уравнения второй степени (квадратные), рациональные уравнения, некоторые уравнения более высоких степеней.

Весь материал учебника разбит на 4 главы, а каждая глава — на параграфы и пункты, содержащие теоретические сведения и практические упражнения. Новые термины и важные факты выделены в тексте **жирным шрифтом**. Правила и свойства, которые полезно запомнить, даны на цветном фоне или в рамочке.

Каждая глава имеет дополнения, позволяющие расширить знания, полученные при изучении главы, и научиться решать более сложные задачи. Эти материалы охватывают традиционную программу классов с углублённым изучением математики. В исторических сведениях приведена информация, дополняющая изученное в главе, рассказывающая о развитии математики и об учёных-математиках.

В конце учебника имеется раздел «Задания для повторения», в котором собраны упражнения на вычисления, упрощение буквенных выражений, решение уравнений, а также текстовые задачи. Здесь имеется много исторических задач и заданий из старинных учебников и сборников задач. К некоторым заданиям в учебнике приведены ответы.

Если вы хотите учиться успешно, то с вниманием относитесь к тому, что написано в учебнике и объясняет учитель, к выполнению домашних заданий.

Перед выполнением домашнего задания обязательно прочитайте нужный пункт учебника, вспомните объяснение учителя. Это позволит подготовиться к выполнению заданий. Ответьте на вопросы, идущие после учебного текста, а в случае затруднения найдите ответы в тексте учебника. Объяснение того или иного термина ищите в предметном указателе. Там они выписаны в алфавитном порядке.

Особое внимание уделите решению текстовых задач новыми способами: с помощью квадратных или рациональных уравнений и их систем. Эти задачи часто выносятся на итоговый контроль: ГИА-9 и ЕГЭ-11. Кроме того, работа с текстовыми задачами необходима для развития мышления и способности к учению.

Лучшему усвоению изученного поможет использование дидактических материалов, содержащих задания для самостоятельных и контрольных работ, а также материалы для подготовки к самостоятельным работам.

Желаем вам успехов в изучении алгебры!

*Авторы*


# ГЛАВА 1

# ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

При изучении главы 1 вам предстоит познакомиться с новым понятием — функцией; установить свойства простейших функций $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$; освоить понятие арифметического корня и его свойства; научиться преобразовывать выражения, содержащие корни. Эти знания помогут вам изучать следующие главы учебника и другие школьные предметы.

## § 1. Функции и графики

### 1.1. Числовые неравенства

Действительные числа подчинены следующим правилам:

Правило 1. **Для любых действительных чисел $a$ и $b$ имеет место только одно из соотношений**

$$a = b,\ a > b,\ a < b.$$

Например, для чисел 6 и 10 верно неравенство $6 < 10$, но неверны равенство $6 = 10$ и неравенство $6 > 10$.

Заметим, что если $a > b$, то $b < a$.

Неравенства одного знака называют **одноимёнными**, например: неравенства $-2 < 5$ и $3 < 11$ одноимённые, неравенства $-5 > -10$ и $10 > -3$ также одноимённые.

Правило 2. **Для любых действительных чисел $a$ и $b$, таких, что $a < b$, найдётся такое действительное число $c$, что $a < c$ и $c < b$, или, что то же самое, $a < c < b$.**

Например, для чисел 1,2 и 1,3 существует число 1,22, такое, что $1{,}2 < 1{,}22 < 1{,}3$.

**Правило 3.** **Для любых действительных чисел $a$, $b$ и $c$ из неравенств $a < b$ и $b < c$ следует неравенство $a < c$ (свойство транзитивности неравенств).**

Например, из неравенств $\frac{8}{9} < 1$ и $1 < \frac{4}{3}$ следует, что $\frac{8}{9} < \frac{4}{3}$.

**Правило 4.** **Для любых действительных чисел $a$, $b$ и $c$ из неравенства $a < b$ следует неравенство $a + c < b + c$.**

Это означает, что знак неравенства не изменится, если к правой и левой частям неравенства прибавить одно и то же число.

Например, прибавим к правой и левой частям верного неравенства $6 < 11$ по $-4$, получим верное неравенство

$$6 - 4 < 11 - 4, \text{ или } 2 < 7.$$

**Правило 5.** **Для любых действительных чисел $a$ и $b$ и любого положительного числа $c$ из неравенства $a < b$ следует неравенство $ac < bc$.**

Это означает, что знак неравенства не изменится, если правую и левую части неравенства умножить на одно и то же положительное число.

Например, умножим правую и левую части верного неравенства $-6 < 2$ на 3, получим верное неравенство $-6 \cdot 3 < 2 \cdot 3$, или $-18 < 6$.

Из перечисленных выше пяти правил вытекают следующие **свойства неравенств:**

**Свойство 1.** **Если числа $a$, $b$, $c$ и $d$ таковы, что $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.**

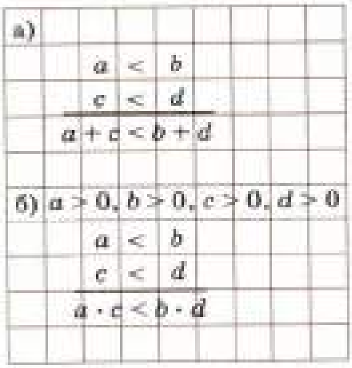



Рис. 1

Это означает, что верные одноимённые неравенства можно почленно складывать (рис. 1, $a$).

Действительно, из условия $a < b$ на основании правила 4 следует, что $a + c < b + c$, а из условия $c < d$ на основании того же правила 4 следует, что $b + c < b + d$. Теперь, применяя правило 3, получаем $a + c < b + d$.

**Свойство 2.** **Если положительные числа $a$, $b$, $c$ и $d$ таковы, что $a < b$ и $c < d$, то $ac < bd$.**

Это означает, что верные одноимённые неравенства, правые и левые части которых положительны, можно почленно перемножать (рис. 1, *б*).

Действительно, для положительных чисел $a$, $b$, $c$ и $d$ на основании правила 5 из условия $a < b$ получаем $ac < bc$, а из условия $c < d$ получаем $bc < bd$. Теперь на основании правила 3 получаем $ac < bd$.

> Свойство 3. **Если числа $a$ и $b$ таковы, что $a < b$, то $-a > -b$.**

В самом деле, прибавив к левой и правой частям неравенства $a < b$ число $(-b - a)$, на основании правила 4 получим

$$a + (-b - a) < b + (-b - a),$$

откуда следует, что $-b < -a$, или $-a > -b$.

> Свойство 4. **Если $c$ — отрицательное число и числа $a$ и $b$ таковы, что $a < b$, то $ac > bc$.**

Это означает, что знак неравенства изменится на противоположный, если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число.

По свойству 3 из неравенства $a < b$ следует, что $-a > -b$.

Умножив это неравенство на положительное число $-c$, на основании правила 5 получим

$$(-a) \cdot (-c) > (-b) \cdot (-c),$$

откуда следует, что $ac > bc$.

> Свойство 5. **Если положительные числа $a$ и $b$ таковы, что $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.**

В самом деле, умножив неравенство $a < b$ на положительное число $\frac{1}{ab}$, получим на основании правила 5 после сокращений нужное неравенство

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}, \text{ или } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

> Свойство 6. **Если положительные числа $a$ и $b$ таковы, что $a < b$, то $a^2 < b^2$.**

Это свойство следует из свойства 2 при условии $c = a$ и $d = b$.

**Свойство 7. Если $a$ и $b$ положительные числа и $a^2 > b^2$, то $a > b$.**

Проведём доказательство от противного.

Предположим, что $a = b$, тогда $a^2 = b^2$, что противоречит условию $a^2 > b^2$, значит, предположение, что $a = b$, неверно.

Предположим, что $a < b$, тогда на основании свойства 6 получим, что $a^2 < b^2$, что противоречит условию $a^2 > b^2$, значит, предположение, что $a < b$, неверно.

Для двух чисел $a$ и $b$ по правилу 1 возможно только одно из соотношений: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Первые два противоречат условию $a^2 > b^2$, следовательно, $a > b$, что и требовалось доказать.

Выше употреблялись знаки равенства (=) и строгого неравенства (< и >). Иногда возникает необходимость в нестрогих неравенствах.

**Пример.** В эту зиму температура в Москве не опускалась ниже –30 °C. Если температуру обозначить буквой $t$, то в любой день зимы либо $t > -30$ °C, либо $t = -30$ °C, что записывают так: $t \geqslant -30$ °C.

Приведём определения нестрогих неравенств $a \leqslant b$ и $a \geqslant b$.

Числовое неравенство $a \leqslant b$ означает, что либо $a < b$, либо $a = b$. Неверно оно лишь в случае $a > b$.

Запись $a \leqslant b$ читают или «$a$ не больше $b$», или «$a$ меньше или равно $b$».

Числовое неравенство $a \geqslant b$ означает, что либо $a > b$, либо $a = b$.

Запись $a \geqslant b$ читают «$a$ не меньше $b$» или «$a$ больше или равно $b$».

Например, неравенства $5 \leqslant 6$ и $4 \geqslant 2^2$ оба верные, а неравенства $9 \leqslant 7$ и $3 \geqslant 4$ оба неверные.

Для нестрогих неравенств справедливы приведённые выше правила 3—5 и свойства 1—7, если в них знак строгого неравенства заменить на знак нестрогого неравенства. Сформулируем одно из таких свойств.

**Свойство 6*. Если положительные числа $a$ и $b$ таковы, что $a \leqslant b$, то $a^2 \leqslant b^2$.**

Мы уже отмечали, что если $a < b$ и $b < c$, то пишут $a < b < c$.

Подобным образом если $a \leqslant b$ и $b < c$, то пишут $a \leqslant b < c$; если $a < b$ и $b \leqslant c$, то пишут $a < b \leqslant c$; если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то пишут $a \leqslant b \leqslant c$.

Неравенства $a < b < c$, $a \leqslant b < c$, $a < b \leqslant c$, $a \leqslant b \leqslant c$ называют **двойными неравенствами**.

**1.** Какие неравенства можно:
а) складывать; б) перемножать?

**2.** В каком случае неравенство $a \geqslant b$:
а) верно; б) неверно?

**3.** Сравните:
а) 5 и 9; б) −5 и −9; в) 2,5 · 4 и 10;
г) 1,2 и 1,(2); д) −6,7 и 1; е) −5,(4) и −5,4.

**4.** Укажите число, большее одного из данных чисел и меньшее другого. Ответ запишите в виде двойного неравенства:
а) 3 и 5; б) −25 и −29;
в) 2,5 и 2,6; г) 2,4 и 2,(4);
д) −3,71 и −3,72; е) 0,(5) и 0,(6).

**5.** Сделайте вывод на основании двух верных неравенств.
**Например,** $3 < 15$ и $15 < 20$, значит, $3 < 20$.
а) $-5 < 0$ и $0 < 2$; б) $-2 < 0$ и $0 < 2$;
в) $2 > 1$ и $1 > 0$; г) $2,(1) > 2$ и $2 > 1,(6)$;
д) $-3,(7) > -4$ и $-4 > -7$; е) $0,(5) < 0,(6)$ и $0,(6) < 0,(67)$;
ж) $\frac{5}{6} < 1$ и $1 < \frac{9}{8}$; з) $\frac{7}{16} < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \frac{8}{15}$.

**6.** Из данного верного неравенства получите новое верное неравенство, прибавив к обеим частям неравенства одно и то же число:
а) $15 < 20$; б) $5 > 4$; в) $2,5 < 3$;
г) $1,1 < 1,2$; д) $1,3 \geqslant 1,2$; е) $5 \leqslant 6$.

**7.** Из данного верного неравенства получите новое верное неравенство, умножив обе части неравенства на одно и то же положительное число:
а) $15 < 20$; б) $5 > 4$; в) $-2,5 < 3$;
г) $1,1 < 1,2$; д) $1,3 \geqslant 1,2$; е) $-5 \leqslant 6$.

**8.** Сложите верные числовые неравенства:
а) $14 > 11$ и $10 > 9$; б) $-2 > -3$ и $3 > 2$;
в) $-6 < -5$ и $2 < 3$; г) $-8 \leqslant 0$ и $8 \leqslant 9$.

**9.** Перемножьте верные числовые неравенства:
а) $14 > 10$ и $2 > 1$; б) $5 > 3$ и $6 > 5$;
в) $6 < 7$ и $2 < 3$; г) $8 < 9$ и $1 < 2$.

**10.** Из данного верного неравенства получите верное неравенство, в котором каждое число заменено на противоположное.
**Например,** так как $19 > 13$, то $-19 < -13$.
а) $3 > 0$; б) $5 > -1$; в) $-9 < -1$;
г) $-5 \leqslant -1$; д) $9 \geqslant -2$; е) $0 \leqslant 3$.

**11.** Умножьте обе части верного неравенства на отрицательное число, применив свойство 4:
а) $1 < 2$; б) $5 > 4,5$; в) $6,5 \leqslant 6,9$;
г) $1,1 < 1,2$; д) $1,3 \geqslant 1,2$; е) $5 \leqslant 6$.

**12.** Запишите неравенство, которое получится, если числа в левой и правой частях неравенства заменить на обратные им числа.
**Например,** так как $5 < 6$, то $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$.
а) $6 > 3$; б) $7 \leqslant 10$; в) $2 < 4$;
г) $11 < 12$; д) $13 \geqslant 12$; е) $15 \leqslant 26$.

**13.** Сравните:
а) $2^2$ и $9^2$; б) $5^2$ и $6^2$; в) $4^2$ и $10^2$;
г) $1,3^2$ и $1,5^2$; д) $7,28^2$ и $8,37^2$; е) $5,4^2$ и $4,5^2$;
ж) $(-2)^2$ и $(-3)^2$; з) $4^2$ и $(-4)^2$; и) $(-4)^2$ и $1^2$;
к) $(-1)^2$ и $(-1,4)^2$; л) $(-4,9)^2$ и $(-7)^2$; м) $4^2$ и $(-5)^2$.

**Доказываем (14—16).**

**14.** Докажите, что:
а) если $a > b$ и $c > d$, то $a - d > b - c$;
б) если $a < b$ и $c < d$, то $a - d < b - c$;
в) если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$.

**15.** Докажите для положительных чисел $a$, $b$, $c$ и $d$, что:
а) если $a > b$ и $c > d$, то $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$; б) если $a < b$ и $c < d$, то $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.

**16.** Докажите, что:
а) если $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$; б) если $a < b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

**17.** Верно ли неравенство:
а) $6,7272 \leqslant 6,(72) < 6,7273$; б) $-0,3132 < -0,(3) \leqslant -0,3131$?

**18.** Солдат построили не по росту, но с чётким разделением на ряды и шеренги. В каждом ряду выбрали самого высокого, а из всех высоких — самого низкого. В каждой шеренге выбрали самого низкого, а из всех низких — самого высокого. Кто же выше ростом: самый низкий из высоких или самый высокий из низких?
**Указание.** Рассмотрите случаи, когда два выбранных солдата стоят: 1) в одном ряду; 2) в одной шеренге; 3) в разных рядах и шеренгах.

**19.** **Исследуем.** Даны две дроби $\frac{95}{111}$ и $\frac{99}{112}$. Найдите:
а) все несократимые дроби со знаменателем 50, заключённые между данными дробями;
б) все несократимые дроби с числителем 50, заключённые между данными дробями;
в) все несократимые дроби с наименьшим натуральным знаменателем, заключённые между данными дробями.

## 1.2. Координатная ось. Модуль числа

Напомним, что прямую, на которой выбраны начальная точка, положительное направление и единичный отрезок, называют **координатной осью.**

Каждой точке координатной оси ставится в соответствие действительное число $x$ по следующему правилу: начальной точке $O$ — число нуль; точке $A$, находящейся на положительном луче, — число $x$, равное длине отрезка $OA$; точке $B$, находящейся на отрицательном луче, — число $x$, равное длине отрезка $OB$, взятой со знаком «−».

Число $x$, соответствующее произвольной точке оси $x$ согласно указанному правилу, называют **координатой** этой точки.

Определённую таким образом координатную ось называют координатной осью $x$ или коротко — осью $x$. Пишут также: ось $Ox$.

Каждой точке оси $x$ соответствует действительное число — координата этой точки; две различные точки $A$ и $B$ оси $x$ имеют различные координаты $x_1$ и $x_2$; каждое действительное число есть координата некоторой точки оси $x$. Иначе говоря, установлено взаимно-однозначное соответствие между точками оси $Ox$ и действительными числами.

Модуль, или абсолютную величину, действительного числа $a$ обозначают $|a|$; по определению

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

На координатной оси $|a|$ есть расстояние от точки $a$ до начала координат. Например, $|0| = 0$, $|3| = OA = 3$, $|-3| = OC = 3$, $|-2| = OB = 2$ (рис. 2).

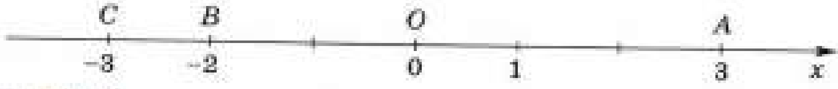



**Рис. 2**

Из определения модуля числа следуют свойства:

| | |
|---|---|
| 1) $|-a| = |a|$; | 2) $a \leqslant |a|$; |
| 3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; | 4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$; |
| 5) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$; | 6) $|a - b| \leqslant |a| + |b|$. |

Обратим внимание на то, что если $|a| \neq 0$, то существуют ровно два числа (две точки координатной оси), имеющие такой модуль. Например, если $|a| = 3$, то $a_1 = -3$ и $a_2 = 3$ (рис. 2).

Это замечание поможет решать некоторые уравнения с модулями.

**Пример 1.** Решим уравнение

$$|x| = 7. \qquad (1)$$

По определению модуль числа равен 7 только в двух случаях: когда число равно −7 или 7. Следовательно, уравнение (1) имеет два корня: $x_1 = -7$ и $x_2 = 7$.

**Пример 2.** Решим уравнение

$$|2x - 3| = 9. \qquad (2)$$

По определению модуль числа равен 9 только в двух случаях: когда число равно −9 или 9. Поэтому корнями уравнения (2) являются только корни двух уравнений:

$$2x - 3 = -9 \text{ и } 2x - 3 = 9.$$

Первое уравнение имеет единственный корень $x_1 = -3$, второе уравнение также имеет единственный корень $x_2 = 6$.

Следовательно, уравнение (2) имеет два корня: $x_1 = -3$ и $x_2 = 6$.

**Пример 3.** Решим уравнение

$$|2x - 1| = |3x - 4|. \qquad (3)$$

По определению модули двух чисел равны тогда и только тогда, когда эти числа либо равны, либо противоположны. Поэтому корнями уравнения (3) являются только корни двух уравнений:

$$2x - 1 = 3x - 4 \text{ и } 2x - 1 = -(3x - 4).$$

Первое уравнение имеет единственный корень $x_1 = 3$, второе уравнение также имеет единственный корень $x_2 = 1$.

Следовательно, уравнение (3) имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

**Пример 4.** Решим уравнение

$$||x| - 3| = 1. \qquad (4)$$

По определению модуль числа равен 1 только в двух случаях: когда число равно −1 или 1. Поэтому корнями уравнения (4) являются только корни двух уравнений:

$$|x| - 3 = -1 \text{ и } |x| - 3 = 1.$$

Перепишем эти уравнения в виде

$$|x| = 2 \text{ и } |x| = 4.$$

Первое из них имеет два корня: $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$, второе также имеет два корня: $x_1 = -4$ и $x_2 = 4$.

Следовательно, уравнение (4) имеет четыре корня: $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$.

**20.** Укажите на координатной оси числа:
а) $-5$ и $0{,}31$; б) $15{,}57$ и $5{,}176$;
в) $-\pi$ и $\pi^2$; г) $-5\frac{1}{3}$ и $4{,}01$.

**21.** Укажите хотя бы три числа, находящиеся на координатной оси между числами:
а) $3{,}11$ и $3{,}12$; б) $2{,}082$ и $2{,}081$;
в) $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{9}$; г) $3{,}5$ и $3\frac{4}{9}$.

**22.** а) Каждой ли точке координатной оси поставлено в соответствие число?
б) Каждому ли числу поставлена в соответствие точка координатной оси?

**23.** Решите уравнение:
а) $|x| = 5$; б) $|2x - 3| = 7$;
в) $||x| - 2| = 4$; г) $||x| - 4| = 2$;
д) $||2x - 5| - 1| = 7$; е) $||2x - 1| - 5| = 7$;
ж) $||2x - 7| - 5| = 1$; з) $|x - 1| = |2x - 4|$;
и) $|3x + 2| = |5x + 6|$; к) $|3x - 1| = |x - 5|$.

**24.** **Исследуем.** Найдите значение $a$, при котором уравнение:
а) $|2x - 4| = |x - a|$; б) $|3x - 2| = |x - a|$
имеет единственный корень.

**Доказываем (25—28).**

**25.** Докажите свойства 1—6 модуля числа.

**26.** Докажите, что для любого числа $x$:
а) $|15x - 16| = |16 - 15x|$; б) $|x^2 - 7| = |7 - x^2|$;
в) $12x - 1 \leqslant |1 - 12x|$; г) $x^2 - 2011 \leqslant |2011 - x^2|$;
д) $|x^2 - 49| = |x - 7| \cdot |x + 7|$; е) $|x^2 - 3| = \frac{|x^4 - 9|}{|x^2 + 3|}$;
ж) $|8 + 5x| \leqslant |1 + 2x| + |7 + 3x|$;
з) $|1 + 6x| \leqslant |5x - 11| + |12 + x|$;
и) $|2 + 4x| \leqslant |6 + 7x| + |4 + 3x|$;
к) $|x - 23| \leqslant |12x - 11| + |12 + 11x|$.

**27.** а) Докажите, что расстояние между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ вычисляется по формуле $AB = |x_1 - x_2|$.
б) Докажите, что координата точки $C(x)$ — середины отрезка $AB$, где $A(x_1)$ и $B(x_2)$, — вычисляется по формуле $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

**28.** Докажите, что если точка $C(x)$ принадлежит отрезку $AB$, где $A(x_1)$ и $B(x_2)$, и делит этот отрезок в отношении $AC : CB = m : n$, то координата точки $C$ вычисляется по формуле

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}.$$

**29.** Даны точки $A(3)$ и $B(11)$. Определите координату точки $C$, если:

а) $C$ — середина отрезка $AB$; б) $A$ — середина отрезка $BC$;
в) $AC : CB = 1 : 3$; г) $AC : CB = 3 : 5$.

## 1.3. Множества чисел

Пусть даны координатная ось $x$ и два действительных числа $a$ и $b$, удовлетворяющие неравенству $a < b$. Числа $a$ и $b$ можно рассматривать как координаты двух различных точек оси $x$, которые условились также называть точками $a$ и $b$ (рис. 3).


Рис. 3

Множество точек оси $x$, состоящее из точек $a$ и $b$ и всех точек, находящихся между ними (см. рис. 3), называют отрезком от $a$ до $b$ и обозначают $[a; b]$.

Таким образом, **отрезок $[a; b]$ — это множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих двойному неравенству**

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Точки $a$ и $b$ называют **концами отрезка** $[a; b]$. Концы отрезка $[a; b]$ принадлежат этому отрезку.

Если из отрезка $[a; b]$ исключить оба его конца, то получим множество точек, которое обозначают $(a; b)$ и называют интервалом от $a$ до $b$.

Таким образом, **интервал $(a; b)$ — это множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих двойному неравенству**

$$a < x < b.$$

Если из отрезка $[a; b]$ исключить точку $b$, то получим множество точек, которое обозначают $[a; b)$ и называют полуинтервалом от $a$ до $b$, включая $a$.

Таким образом, **полуинтервал $[a; b)$ — это множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих двойному неравенству**

$$a \leqslant x < b.$$

Если из отрезка $[a; b]$ исключить точку $a$, то получим множество точек, которое обозначают $(a; b]$ и называют полуинтервалом от $a$ до $b$, включая $b$.

**Полуинтервал $(a; b]$ есть множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих двойному неравенству**

$$a < x \leqslant b.$$

**Пример 1.** Отрезок $[-1; 3]$ — это множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих двойному неравенству $-1 \leqslant x \leqslant 3$ (рис. 4, *а*).


**Рис. 4**

**Пример 2.** Интервал $(0; 1)$ — это множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих двойному неравенству $0 < x < 1$ (рис. 4, *б*).

**Замечание.** Концы промежутков, входящие в рассматриваемое множество, отмечают закрашенными кружками, а не входящие — незакрашенными кружками.

**Пример 3.** Полуинтервал $[1; 2)$ — это множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих двойному неравенству $1 \leqslant x < 2$ (рис. 5, *а*).


**Рис. 5**

**Пример 4.** Полуинтервал $(-1; 1]$ — это множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих двойному неравенству $-1 < x \leqslant 1$ (рис. 5, *б*).

Если точка $x$ движется по координатной оси $x$ в положительном направлении и при этом её координата может принимать сколь угодно большие значения, то говорят, что эта *точка стремится к плюс бесконечности*, и пишут: $x \to +\infty$.

Аналогично если точка $x$ движется по координатной оси в отрицательном направлении и при этом её координата $x$ такова, что $|x|$ может принимать сколь угодно большие значения, то говорят, что эта *точка стремится к минус бесконечности*, и пишут: $x \to -\infty$.

Выше считалось, что $a$ и $b$ — числа (или точки оси $x$), но термин «интервал» понимают также в более широком смысле, заменяя $a$ на $-\infty$ или $b$ на $+\infty$.

**Интервал $(a; +\infty)$, где $a$ — данное число, — это множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих неравенству $x > a$, или множество всех точек оси $x$, имеющих координаты $x > a$.**

**Интервал $(-\infty; b)$, где $b$ — данное число, — это множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих неравенству $x < b$, или множество всех точек оси $x$, имеющих координаты $x < b$.**


Рис. 6

**Наконец, интервал $(-\infty; +\infty)$ — это множество всех действительных чисел или множество всех точек оси $x$.**

Например, на рисунке 6, *а* изображён интервал $(-3; +\infty)$, на рисунке 6, *б* — интервал $(-\infty; -2)$, на рисунке 6, *в* — интервал $(-\infty; +\infty)$.

Таким образом, интервал $(a; b)$ может быть конечным, если $a$ и $b$ — данные числа (или точки оси $x$), но может быть и бесконечным, если $a$ или $b$ соответственно $-\infty$ или $+\infty$.

Отрезок $[a; b]$ всегда конечный. Отрезок определяется данными числами $a$ и $b$ (или точками оси $x$).

Полуинтервалы $[a; b)$ и $(a; b]$ также могут быть бесконечными.

**Полуинтервал $[a; +\infty)$ — это множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant a$, или множество всех точек оси $x$, имеющих координаты $x \geqslant a$.**

**Полуинтервал $(-\infty; b]$ — это множество всех действительных чисел $x$, удовлетворяющих неравенству $x \leqslant b$, или множество всех точек оси $x$, имеющих координаты $x \leqslant b$.**

Например, на рисунке 7, *а* изображён полуинтервал $[5; +\infty)$, на рисунке 7, *б* — полуинтервал $(-\infty; -3]$.


Рис. 7

Иногда для отрезков, интервалов, полуинтервалов используют общее название — **промежутки**.

Кроме отрезков, интервалов и полуинтервалов, рассматривают и другие множества чисел, их часто обозначают буквами $A$, $B$, $C$, ... . Некоторые множества имеют специальные обозначения. Например, $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел, $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел, $\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел, $\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел, $\boldsymbol{R}_+$ — множество действительных положительных чисел.

Тот факт, что число принадлежит или не принадлежит множеству чисел, записывают с помощью специальных знаков: $\in$ (принадлежит) и $\notin$ (не принадлежит).

Например, $-5 \in \boldsymbol{Z}$ (число $-5$ принадлежит множеству целых чисел), $-5 \notin \boldsymbol{N}$ (число $-5$ не принадлежит множеству натуральных чисел).

**30.** а) Какое множество чисел называют отрезком, интервалом, полуинтервалом?
б) Что означает запись: $x \to +\infty$; $x \to -\infty$?

**31.** Назовите все целые числа, принадлежащие множеству чисел:
а) $[-3; 1]$; б) $(-3; 1)$; в) $[-3; 1)$; г) $(-3; 1]$;
д) $[-2; 3]$; е) $(-2; 3)$; ж) $[-2; 3)$; з) $(-2; 3]$.

**32.** Назовите три целых числа, принадлежащие множеству чисел:
а) $[0; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; 1)$; г) $(-\infty; 1]$.

**33.** Прочитайте название числового промежутка и изобразите его на координатной оси:
а) $[3; 5]$; б) $(3; 5)$; в) $[3; 5)$; г) $(3; 5]$;
д) $[-2; +\infty)$; е) $(-2; +\infty)$; ж) $(-\infty; -2)$; з) $(-\infty; -2]$.

**34.** Запишите обозначение:
а) отрезка от 2 до 4;
б) интервала от 2 до 4;
в) полуинтервала от 2 до 4, включая 4;
г) полуинтервала от 2 до 4, включая 2;
д) интервала от 5 до $+\infty$;
е) полуинтервала от 5 до $+\infty$;
ж) интервала от $-\infty$ до 0;
з) полуинтервала от $-\infty$ до 0.
Изобразите указанное множество чисел на координатной оси.

**35.** Принадлежит ли число $-2$ множеству чисел (сделайте запись с помощью знаков $\in$ и $\notin$):
а) $[-3; 0]$; б) $(-2; 3)$; в) $(-\infty; -2]$; г) $(-2; +\infty)$;
д) $\boldsymbol{N}$; е) $\boldsymbol{Z}$; ж) $\boldsymbol{Q}$; з) $\boldsymbol{R}$?

**36.** Принадлежит ли число $\frac{2}{3}$ множеству чисел (сделайте запись с помощью знаков $\in$ и $\notin$):
а) $(0; 1]$; б) $[1; 2]$; в) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$; г) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$;
д) $\boldsymbol{N}$; е) $\boldsymbol{Z}$; ж) $\boldsymbol{Q}$; з) $\boldsymbol{R}$?

**37.** Запишите обозначение числового промежутка, изображённого на рисунке 8.

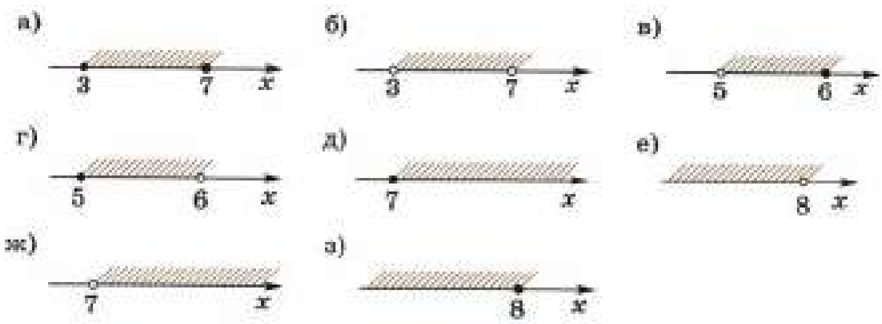



Рис. 8

**38.** Какому из числовых промежутков, изображённых на рисунке 8, соответствует множество чисел $x$, удовлетворяющих неравенству:

а) $x \geqslant 7$; б) $x > 7$; в) $x \leqslant 8$;
г) $x < 8$; д) $3 < x < 7$; е) $3 \leqslant x \leqslant 7$;
ж) $5 \leqslant x < 6$; з) $5 < x \leqslant 6$?

**39.** Запишите изображённый на рисунке 9 числовой промежуток с помощью знаков неравенств.

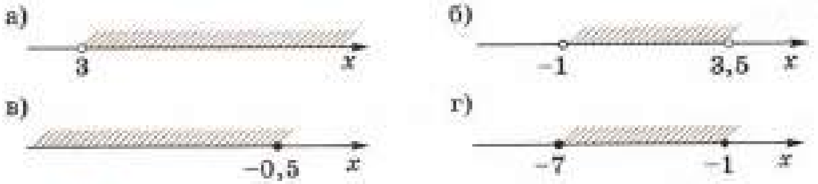



**Рис. 9**

**40.** Изобразите на координатной оси все числа:
а) меньшие 3;
б) большие −5;
в) не большие 2;
г) не меньшие 0;
д) большие 7, но меньшие 10;
е) большие −5, но меньшие −1;
ж) не меньшие 3 и не большие 9;
з) не меньшие $-\frac{1}{2}$, но меньшие 4.

Обозначьте полученное множество чисел.

**41.** Изобразите на координатной оси:
а) отрезок [2; 5]; б) интервал (−2; 0).
Запишите его с помощью двойного неравенства.

**42.** Изобразите на координатной оси числовые промежутки:

а) $[-2; 3]$ и $[0; 2]$; б) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ и $[-2; 0,3]$;

в) $(-4; 0,29)$ и $\left(\frac{2}{7}; 5\right)$; г) $\left(-0,44; \frac{13}{40}\right)$ и $\left(-\frac{3}{7}; -\frac{1}{4}\right)$;

д) $\left[-3\frac{2}{3}; 1\right]$ и $[1; +\infty)$; е) $(-\infty; 2)$ и $[2; 3]$.

Имеют ли они общие точки?
Если да, то запишите общую часть (пересечение) этих множеств.

## 1.4. Декартова система координат на плоскости

Зададим на плоскости две взаимно перпендикулярные оси координат — ось $Ox$ и ось $Oy$ — с точкой пересечения $O$, являющейся начальной точкой каждой из этих осей, и равными единичными отрезками.

Р. Декарт

Говорят, что этим на плоскости определена **прямоугольная система координат $xOy$**. Её называют ещё **декартовой системой координат** по имени французского математика и философа Р. Декарта (1596—1650), который ввёл в математику это важное понятие.

Ось $Ox$ называют **осью абсцисс**, а ось $Oy$ — **осью ординат**. Точку $O$ пересечения осей координат называют **началом системы координат**. Плоскость, на которой задана декартова система координат, называют **координатной плоскостью**.

Обычно ось абсцисс изображают в виде горизонтальной прямой, направленной вправо, а ось ординат — в виде вертикальной прямой, направленной вверх (рис. 10).

Пусть $A$ — произвольная точка координатной плоскости. Проведём через точку $A$ прямые, параллельные осям координат (рис. 11). Прямая, параллельная оси $Oy$, пересечёт ось $Ox$ в точке $A_1$, а прямая, параллельная оси $Ox$, пересечёт ось $Oy$ в точке $A_2$. **Абсциссой точки $A$** называют координату $x$ точки $A_1$ на оси $Ox$. **Ординатой точки $A$** называют координату $y$ точки $A_2$ на оси $Oy$. Абсциссу $x$ и ординату $y$ точки $A$ называют **координатами точки $A$**.

Координаты точки записывают в скобках рядом с буквой, обозначающей эту точку: $A(x;\ y)$, причём на первом месте пишут абсциссу, а на втором — ординату. Например, точка $A$, изображённая на рисунке 12, имеет абсциссу $x = 4$ и ординату $y = 3$, поэтому пи-

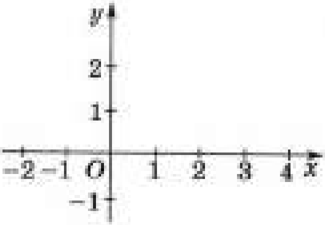



**Рис. 10**

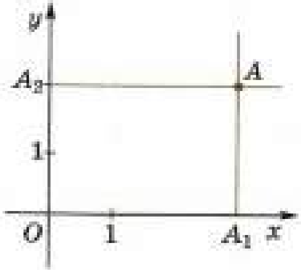



**Рис. 11**

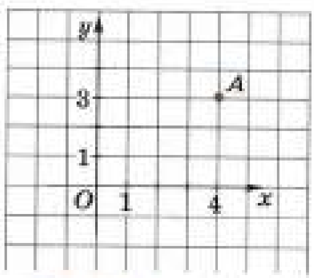



**Рис. 12**

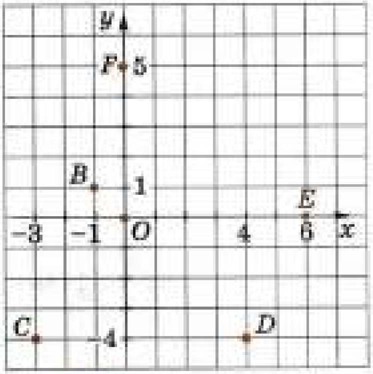



Рис. 13

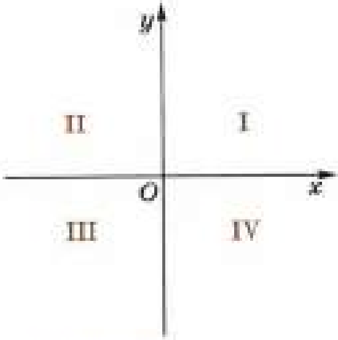



Рис. 14

шут $A(4; 3)$. На рисунке 13 изображена прямоугольная система координат $xOy$ и точки $O(0; 0)$, $B(-1; 1)$, $C(-3; -4)$, $D(4; -4)$, $E(6; 0)$, $F(0; 5)$.

Важно отметить, что **если на плоскости задана прямоугольная система координат, то каждой точке $A$ плоскости приводится в соответствие пара чисел $(x; y)$ — пара координат точки $A$, и в то же время произвольную пару чисел $(x; y)$ можно рассматривать как пару координат некоторой точки $A$ плоскости.**

Нужно иметь в виду, что если пара состоит из разных чисел, то, поменяв эти числа местами, получим другую пару, определяющую другую точку плоскости. Поэтому часто пару координат $(x; y)$ точки $A$ называют упорядоченной парой чисел.

Итак, если на плоскости задана прямоугольная система координат $xOy$, то:

> **1) каждой точке плоскости поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (пара координат точки);**
> **2) разным точкам плоскости поставлены в соответствие разные упорядоченные пары чисел;**
> **3) каждая упорядоченная пара чисел соответствует некоторой точке плоскости.**

Прямоугольная система координат $xOy$ разделяет плоскость на четыре части, называемые **координатными углами**, или **координатными четвертями**, или просто **четвертями**. Обозначим их римскими цифрами I, II, III, IV (рис. 14). Если исключить точки, лежащие на осях координат, то можно сказать, что:

точки I четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x > 0$, $y > 0$;

точки II четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x < 0$, $y > 0$;

точки III четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x < 0$, $y < 0$;

точки IV четверти имеют координаты $(x; y)$, такие, что $x > 0$, $y < 0$.

Например, точка $B(-2; 5)$ на рисунке 15 принадлежит II четверти, точка $D(4; -2)$ принадлежит IV четверти.

Если точка лежит на оси $Oy$, то её абсцисса равна нулю;

если абсцисса точки равна нулю, то точка лежит на оси $Oy$.

Если точка лежит на оси $Ox$, то её ордината равна нулю;

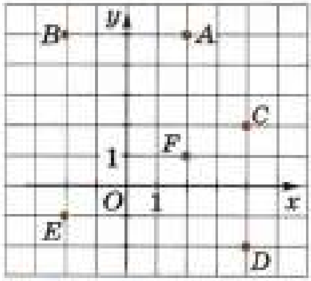



Рис. 15

если ордината точки равна нулю, то точка лежит на оси $Ox$.

Две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ *симметричны относительно оси ординат (оси $Oy$)*, если их координаты удовлетворяют равенствам $x_1 = -x_2$ и $y_1 = y_2$.

Две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ *симметричны относительно оси абсцисс (оси $Ox$)*, если их координаты удовлетворяют равенствам $x_1 = x_2$ и $y_1 = -y_2$.

Две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ *симметричны относительно начала координат (точки $O$)*, если их координаты удовлетворяют равенствам $x_1 = -x_2$ и $y_1 = -y_2$.

Например, на рисунке 15 точки $A$ и $B$ симметричны относительно оси ординат, точки $C$ и $D$ симметричны относительно оси абсцисс, точки $E$ и $F$ симметричны относительно начала координат.

**43.** Для каких точек координатной плоскости:
а) абсцисса равна нулю; б) ордината равна нулю;
в) абсцисса положительна; г) ордината положительна?

**44.** Какими свойствами обладают:
а) координаты точек I, II, III, IV четвертей;
б) координаты точек, симметричных относительно оси $Ox$, оси $Oy$, начала координат?

**45.** Назовите абсциссу и ординату точки:
а) $A(-2; 3)$; б) $B(3; -2)$; в) $C(6; 5)$; г) $D(-2; -6)$.
Какой координатной четверти принадлежит эта точка?

**46.** Определите по координатам точки, в какой четверти координатной плоскости она расположена:
а) $(12; 5)$; б) $(-3; -4)$; в) $(7; -3)$; г) $(-8; 13)$.

**47.** Постройте точку, симметричную точке:
а) $A(1; 3)$ относительно оси $Oy$;
б) $B(-2; -1)$ относительно оси $Ox$;
в) $C(3; -2)$ относительно точки $O(0; 0)$.

**48.** Постройте данную точку и точки, симметричные ей относительно оси $Ox$, оси $Oy$, начала координат:

а) $A(3; 5)$; б) $B(-4; 2)$;
в) $C(-4; -3)$; г) $D(3; -5)$.

Определите координаты построенных точек.

**49.** Симметричны ли относительно оси $Ox$, оси $Oy$, начала координат точки:

а) $A(3; 2)$ и $B(-3; 2)$; б) $C(2; 5)$ и $D(2; -5)$;
в) $M(-4; 3)$ и $N(4; -3)$; г) $E(-3; 1)$ и $F(-3; -1)$;
д) $P(4; 5)$ и $Q(-4; -5)$; е) $X(-6; 7)$ и $Y(6; 7)$?

**50.** а) Постройте прямоугольник $ABCD$ по координатам его вершин: $A(0; 0)$, $B(0; 8)$, $C(5; 8)$, $D(5; 0)$. Найдите периметр и площадь прямоугольника $ABCD$.

б) Постройте квадрат $ABCD$ по координатам трёх его вершин: $A(-2; -1)$, $B(-2; 2)$, $C(1; 2)$. Найдите координаты вершины $D$, периметр и площадь квадрата $ABCD$.

**51.** Даны точки $A(3; 5)$ и $B(10; -9)$. Определите координаты точки $C$, если:

а) $C$ — середина отрезка $AB$; б) $A$ — середина отрезка $BC$;
в) $AC : CB = 2 : 5$; г) $AC : CB = 4 : 3$.

**52.** **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о Р. Декарте, его жизни и вкладе в науку.

## 1.5. Понятие функции

**Пример 1.** Из геометрии известно, что объём куба равен кубу длины его ребра. Это утверждение носит общий характер, оно относится к любому кубу. Запишем его в виде равенства в общем виде. Пусть $a$ — длина ребра куба, $V$ — его объём. Тогда геометрическое свойство можно записать следующим образом:

$$V = a^3 \ (a > 0). \qquad (1)$$

Неравенство, записанное в скобках, означает, что равенство (1) рассматривается только для положительных значений $a$, потому что длина ребра куба есть положительное число.

Равенством (1) пользуются как формулой, при помощи которой вычисляется объём любого конкретного куба. Мы видим, что каждому значению длины ребра $a$ в силу закона, выражаемого формулой (1), соответствует определённое значение объёма $V$. В таком случае говорят, что **$V$ есть функция от $a$**, определённая для положительных значений $a$. Говорят ещё, что $V$ есть функция от $a$, определённая на множестве положительных чисел $a$.

**Пример 2.** Из физики известно, что при прямолинейном движении тела с постоянной скоростью, например 80 км/ч, путь $s$ км, пройденный этим телом за время $t$ ч, вычисляется по формуле

$$s = 80t \ (t \geqslant 0). \qquad (2)$$

*Н. И. Лобачевский*

Здесь каждому неотрицательному значению $t$ в силу закона, выражаемого формулой (2), соответствует определённое значение $s$. Поэтому и в этом случае говорят, что **$s$ есть функция от $t$**, определённая для неотрицательных значений $t$ или определённая на множестве неотрицательных чисел $t$.

Приведём общее определение функции.

**Пусть $M$ есть некоторое множество чисел и пусть каждому числу $x$ из $M$ в силу некоторого (вполне определённого) закона приведено в соответствие единственное число $y$, тогда говорят, что $y$ есть функция от $x$, определённая на множестве $M$;**

при этом $x$ называют **независимой переменной** или **аргументом**, а $y$ — **зависимой переменной** или **функцией** от $x$, множество $M$ — **областью определения функции.**

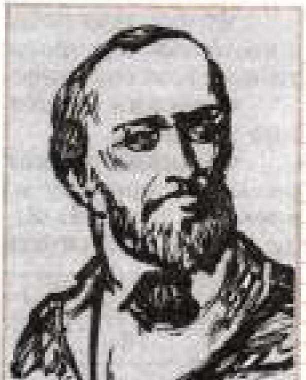
Это определение функции предложено великим русским математиком Н. И. Лобачевским (1792—1856) и немецким математиком П. Дирихле (1805—1859).

Примером функции может служить зависимость

$$y = 3x.$$

В этом примере закон зависимости переменной $y$ от переменной $x$ заключается в том, что каждому числу $x$ приводится в соответствие число $y$, равное $3x$. Говорят ещё, что функция, выражающая эту зависимость, **задана формулой**

$$y = 3x.$$



*П. Дирихле*

Вот ещё примеры функций, заданных формулами:

$$y = -2x, \ y = 3x - 4, \ y = x^2.$$

Указанные функции заданы (определены) для любых значений $x$, т. е. для любых действительных чисел $x$, или, как говорят, на множестве всех действительных чисел.

Функция, заданная формулой $y = \dfrac{1}{x^2}$, определена на множестве всех действительных чисел, кроме числа нуль; функция, заданная формулой $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-2)^2}$, определена на множестве всех действительных чисел, кроме чисел 1 и 2.

При рассмотрении функций буквы $x$ и $y$ нередко заменяют другими буквами.

Например, площадь $S$ квадрата есть функция

$$S = a^2 \ (a > 0)$$

от длины его стороны $a$, определённая на множестве положительных чисел.

Чтобы указать, что $y$ есть функция от $x$, определённая на множестве $M$, пишут:

$$y = f(x) \ (x \in M),$$

где под буквой $f$ подразумевают то правило, по которому получаются значения $y$, соответствующие данным $x$ из множества $M$.

Иногда для того, чтобы подчеркнуть, что $y$ зависит от $x$, вместо $y$ пишут $y(x)$.

Число, соответствующее числу $x_0$ для данной функции $y(x)$, называют **значением этой функции в точке** $x_0$ и обозначают $y(x_0)$. Если функция записана в виде $y = f(x)$, то это число обозначают $f(x_0)$.

Например, для функции $y = 2x$ пишут:

$$y(1) = 2,\ y(2) = 4,\ y(-3) = -6,$$

или

$$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(-3) = -6.$$

При этом говорят, например, что значение данной функции в точке 1 равно 2, или «игрек от 1 равен 2», или «эф от 1 равно 2» и т. д.

Если для каждого $x$ из области определения функции найти её значение, то все такие значения функции составят множество, которое называют **областью значений функции**.

Чтобы задать функцию, нужно указать способ (правило, закон), с помощью которого для каждого значения аргумента $x$ можно найти соответствующее значение функции $y$.

**Функция может быть задана формулой.** Выше рассмотрены такие примеры.

**Функция может быть задана таблицей.** Например, если измерять температуру воздуха через каждый час, то каждому моменту времени $t = 0, 1, 2, \ldots, 24$ будет соответствовать определённое число $T$. Это соответствие можно записать в виде таблицы.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | ... | 14 | ... | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | 16 | 16 | 15 | 15 | | 25 | | 17 |

Таким образом, $T$ есть функция от $t$, определённая на множестве целых чисел от 0 до 24 и заданная таблицей. Закон, в силу которого каждому $t$ из этого множества соответствует $T$, определяется в данном случае не формулой, а таблицей.

**Функция может быть задана и при помощи графика.** Об этом будет рассказано в следующем пункте.

**53.** Пусть дана функция $y = f(x)$ $(x \in M)$. Что называют:
а) независимой переменной или аргументом;
б) зависимой переменной или функцией;
в) областью определения функции?
Приведите три примера функций, заданных формулами. Назовите зависимую и независимую переменные, область определения этой функции.

**54.** а) Функция задана формулой $y = 2x + 7$. Назовите зависимую и независимую переменные, область определения этой функции. Вычислите: $y(3)$, $y(-2)$, $y(0)$. Результаты запишите в таблицу. **Например**, если $x = -5$, то $y = 2 \cdot (-5) + 7 = -10 + 7 = -3$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-5$ | | | |
| $y$ | $-3$ | | | |

б) Функция задана формулой $y = x^2$. Вычислите: $y(0)$, $y(2)$, $y(-2)$, $y(-1)$, $y(0{,}4)$, $y\left(\frac{3}{4}\right)$. Решенче оформите в виде таблицы.

**55.** Функция задана формулой $y = 3x - 1$. Верно ли равенство:

а) $y(2) = 3$; б) $y(5) = 17$; в) $y\left(\frac{1}{3}\right) = 0$; г) $y(-1) = -3$?

**56.** Функция задана формулой $y = 1 - 4x$.

а) Найдите: $y(6)$, $y(-7)$, $y(0{,}5)$, $y\left(\frac{2}{3}\right)$.

б) Верно ли равенство: $y(5) = 19$, $y(-2) = 9$, $y(0) = 1$, $y(-0{,}5) = 2$, $y\left(-\frac{3}{4}\right) = 4$?

**57.** Задайте функцию формулой, если закон зависимости $y$ от $x$ для $x > 0$ заключается в том, что каждому $x$ соответствует $y$:
а) в 2 раза больший; б) меньший на 2;
в) больший на 5; г) в 4 раза больший;
д) в 7 раз меньший; е) равный удвоенному квадрату $x$.

**58.** Вычислите значения функции $y = 3x$, взяв значения $x$ от $-2$ до 2 через 0,5. Решение оформите в виде таблицы.

**59.** Вычислите значения функции $y = x^2$, взяв значения $x$ от $-1$ до 1 через 0,2. Решение оформите в виде таблицы.

**60.** а) Человек идёт со скоростью 4 км/ч. Запишите путь $s$, пройденный человеком, как функцию от времени $t$. Составьте таблицу, показывающую пройденный путь за время от 0 до 3 ч через каждые 20 мин.
б) Запишите стоимость $s$ лотерейных билетов как функцию от количества $k$ проданных билетов, если один билет стоит 30 р.
в) Запишите количество изготовленных деталей $d$ как функцию от времени $t$, если за 1 ч изготавливают 4 детали.

**61.** Функция задана формулой $y = 2x - 5$. При каком значении аргумента $x$ значение функции будет равно: 5, –3, 0, –5?

**62.** Какой формулой может быть задана функция, если:
а) значениям $x$, равным 0, 1, 2, 3, 4, 5, соответствуют значения $y$, равные 0, 5, 10, 15, 20, 25;
б) значениям $x$, равным 1, 2, 3, 4, 5, 6, соответствуют значения $y$, равные 2,5, 5, 7,5, 10, 12,5, 15?

**63.** Функция задана формулой $y = \frac{1}{x}$. Вычислите: $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(5)$. Результаты вычислений запишите в виде таблицы.

**64.** Функция задана таблицей:

а)

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |

б)

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | –5 | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 |

Какой формулой можно задать эту функцию:
1) $y = x + 1$; 2) $y = x + 2$; 3) $y = x - 5$; 4) $y = 2x - 1$?

**65.** **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о Н. И. Лобачевском, его жизни и вкладе в науку.

## 1.6. Понятие графика функции

Функция может быть задана при помощи графика. Например, чтобы узнать, как изменяется температура воздуха, на метеорологических станциях пользуются прибором, называемым термографом. Термограф состоит из барабана, вращающегося вокруг своей оси при помощи часового механизма, и латунной прогнутой коробки, чувствительной к изменению температуры. При повышении температуры она разгибается, а прикреплённое к ней при помощи системы рычажков самопишущее перо поднимается вверх. При понижении температуры перо опускается. На барабан навёртывается соответствующим образом разграфлённая бумажная лента, на которой перо вычерчивает непрерывную линию — график функции, выражающей зависимость между временем и температурой воздуха. При помощи этого графика можно без вычислений определять значения температуры $T$ для каждого момента времени $t$.

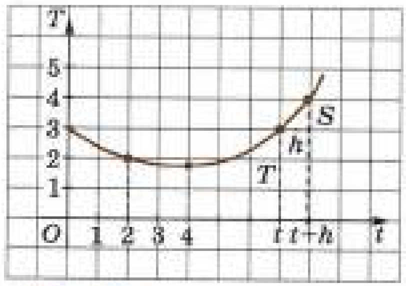


Рис. 16

На рисунке 16 изображён график температуры воздуха в системе координат $tOT$, где $t$ — время, а $T$ — температура. С его помощью можно без вычислений определить значения температуры $T$ для каждого момента времени $t$. Для этого на оси абсцисс надо отметить точку $t$ и восставить из неё перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком. Ордината точки пересечения есть значение функции $T(t)$.

Можно ещё сказать, что график функции $T(t)$ в системе координат $tOT$ есть совокупность точек вида $(t;\ T(t))$ для всех $t$ из рассматриваемого промежутка времени.

Наш график есть непрерывная линия, т. е. она получена одним непрерывным движением пера без отрыва его острия от бумаги, поэтому функцию $T$ от $t$ называют **непрерывной.** Это свойство непрерывности функции можно охарактеризовать ещё так: малому изменению аргумента $t$ соответствует малое изменение функции $T$.

На рисунке 16 на оси абсцисс отмечены значения времени $t$ и $t + h$, которым соответствуют значения температуры $T$ и $T + S$. Число $h$ называют **приращением аргумента** $t$, а число $S$ — **приращением функции** $T$.

Мы видим, что малому $h$ соответствует малое $S$.

Температура $T$ при непрерывном изменении времени $t$ изменяется непрерывно, без скачков.

Но возможны и другие ситуации.

Например, представим себе, что по прямой линии движется шарик со скоростью $v = 5$ м/с. Через 7 с он ударяется о стену и затем движется обратно со скоростью $v = 5$ м/с.

Можно считать, что скорость $v$ шарика зависит от времени $t$ следующим образом:

$$v = 5 \text{ для } t \leqslant 7,$$
$$v = -5 \text{ для } t > 7.$$

График этой функции изображён на рисунке 17.

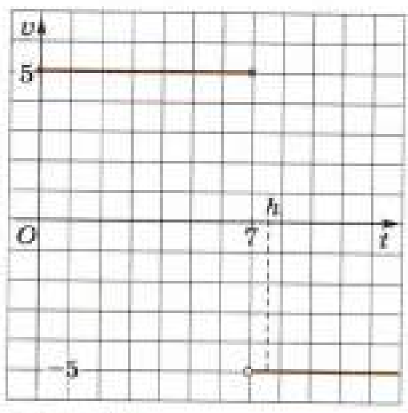


Рис. 17

Получилась линия с разрывом при $t = 7$. В момент времени $t = 7$ скорость равнялась 5. Но если к 7 добавить положительное как угодно малое $h$, то в момент $7 + h$ скорость уже будет равна $-5$. Приращение $S$ равно $-10$. Теперь уже малому $h$ не соответствует малое $S$.

В данном случае функция $v$ от $t$ не является непрерывной, она имеет *разрыв* при $t = 7$.

**Графиком функции $y = f(x)$ называют множество точек координатной плоскости $xOy$ вида $(x; f(x))$, где $x$ — любое число из области определения функции.**

Каждая функция, заданная при помощи формулы, имеет в декартовой системе координат свой график.

**Если график функции на промежутке $M$ — непрерывная линия, то функцию называют непрерывной на промежутке $M$.** Можно сказать и так: **функцию $y = f(x)$ называют непрерывной на промежутке $M$, если она определена в каждой точке промежутка $M$ и малому изменению аргумента $x$ соответствует малое изменение функции $y$.**

В дальнейшем будут приведены примеры графиков функций, заданных конкретными формулами.

**66.** Можно ли функцию задать при помощи графика? Приведите пример.

**67.** а) Что называют графиком функции?
б) Какую функцию называют непрерывной на промежутке $M$?
в) Существуют ли разрывные функции?

**68.** В 6 ч утра из посёлка на озеро, находящееся в 6 км от посёлка, отправились рыбачить отец и сын. Туда шли пешком, а обратно ехали на попутной машине. На рисунке 18 изображён график их движения. Определите с помощью графика:
а) в какое время рыболовы пришли к озеру;
б) как долго они могли удить рыбу;
в) сколько времени занял у них обратный путь;
г) с какой скоростью они шли пешком;
д) с какой скоростью ехала машина.

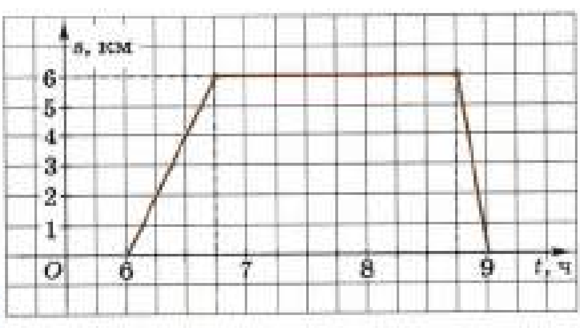



Рис. 18

**69.** На рисунке 19 приведён график изменения температуры воздуха в течение одного месяца. Измерения проводились один раз в день.

а) Какая температура была 4, 8, 12, 21, 27-го числа?
б) В какие дни температура была выше 0 °C?
в) В какие дни температура была ниже 0 °C?
г) Укажите наибольшую и наименьшую температуру месяца.


**Рис. 19**

**70.** На графике (рис. 20) показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток, начиная с 0 ч 13 августа. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа. Ответ дайте с точностью до одного градуса.

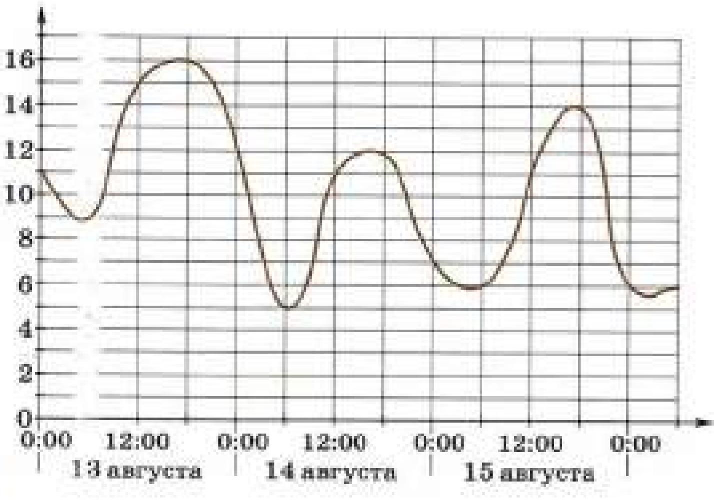



**Рис. 20**

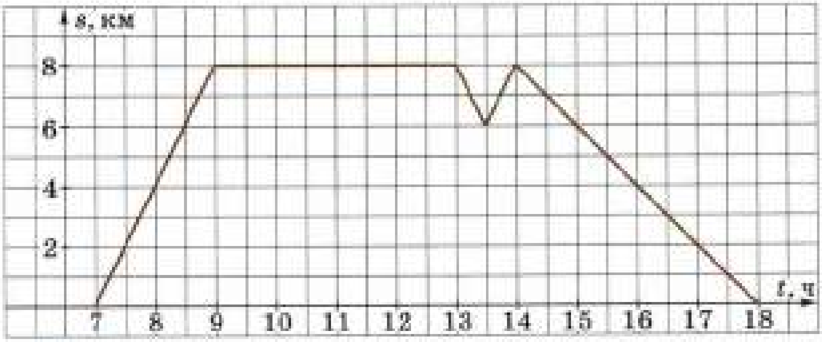



Рис. 21

**71.** Постройте график изменения температуры воздуха в течение двух недель по данным, приведённым в таблице.

| $t$, дни | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T, °C | –6 | –5 | –5 | –2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 4 | 5 | 1 | 0 | –2 | 1 |

а) Сколько дней температура была не выше 0 °С?
б) Сколько дней температура была не ниже 0 °С?

**72.** Составьте рассказ о походе на рыбалку по данному графику (рис. 21).

# § 2. Функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$

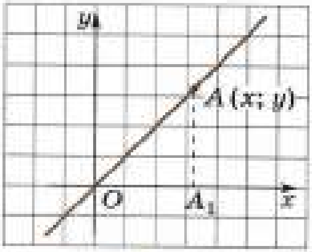
## 2.1. Функция $y = x$ и её график

Зададим на плоскости прямоугольную систему координат $xOy$ и прямую, делящую первый и третий координатные углы пополам. Пусть $A(x;\ y)$ есть произвольная точка этой прямой.

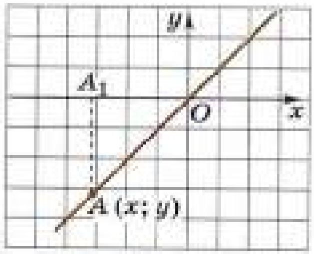
На рисунке 22 отмечена точка $A$ данной прямой, имеющая положительную абсциссу $x$. Пусть прямая, проходящая через точку $A$ и параллельная оси $Oy$, пересекает ось $Ox$ в точке $A_1$. Тогда

$$OA_1 = x,\ A_1A = y.$$

На рисунке 23 отмечена точка $A$ данной прямой, имеющая отрицательную абсциссу $x$. Пусть прямая, проходящая через точ-




■ Рис. 22




■ Рис. 23

ку $A$ и параллельная оси $Oy$, пересекает ось $Ox$ в точке $A_1$. Но теперь

$$OA_1 = -x,\ A_1A = -y.$$

В каждом из этих случаев треугольник $OA_1A$ прямоугольный и его острый угол $A_1OA$ равен 45°. Но тогда треугольник $OA_1A$ равнобедренный и $OA_1 = A_1A$, откуда

$$y = x. \tag{1}$$

Мы получили равенство (1), выражающее зависимость между абсциссой $x$ и ординатой $y$ произвольной точки $A$ данной прямой. Впрочем, при выводе этого равенства мы исключили случай, когда точка $A$ совпадает с началом координат $O$. Но в этом случае равенство (1) тоже выполняется, так как $x = 0$ и $y = 0$.

Итак, любая точка $A(x;\ y)$ рассматриваемой биссектрисы имеет координаты, удовлетворяющие равенству (1). Но верно и обратное утверждение: если точка $A(x;\ y)$ такова, что $y = x$, то она лежит на биссектрисе первого и третьего координатных углов.

В самом деле, рассмотрим сначала точку $A(x;\ y)$, такую, что $x > 0$.

Обращаясь к рисунку 22, получим, что $OA_1 = x = y = A_1A$. Значит, прямоугольный треугольник $OA_1A$ равнобедренный, следовательно, каждый из его острых углов равен 45°. Но тогда точка $A(x;\ y)$ находится на биссектрисе первого координатного угла. Если же $x < 0$, то, обращаясь к рисунку 23, получим, что $y < 0$ и что точка $A(x;\ y)$ находится на биссектрисе третьего координатного угла.

Таким образом:

если точка $A(x;\ y)$ лежит на биссектрисе первого и третьего координатных углов, то $y = x$;

если же точка $A(x;\ y)$ такова, что $y = x$, то она лежит на биссектрисе первого и третьего координатных углов.

Говорят, что *биссектриса первого и третьего координатных углов есть график функции* $y = x$.

Говорят также, что *биссектриса первого и третьего координатных углов имеет в системе координат* $xOy$ *уравнение* $y = x$.

Итак, *функция* $y = x$ *определена для любых действительных* $x$, т. е. область определения этой функции есть промежуток $(-\infty; +\infty)$. Область значений этой функции есть промежуток $(-\infty; +\infty)$. Графиком функции $y = x$ является прямая — биссектриса I и III координатных углов.

**73.** а) Что является графиком функции $y = x$?
б) Какое уравнение имеет биссектриса I и III координатных углов?

**74.** Принадлежит ли графику функции $y = x$ точка:
а) $A(5; 5)$; б) $C(5; -5)$; в) $O(0; 0)$;
г) $M(3; 10)$; д) $N(100; 100)$; е) $K(-6; -6)$?

**75.** Сколько точек достаточно отметить в системе координат $xOy$ для построения графика функции $y = x$?

**76.** Постройте график функции $y = x$. Определите по графику:
а) значение $y$, соответствующее значению $x$, равному 0, 1, –2, 3, 4;
б) значение $x$, соответствующее значению $y$, равному 0, –1, 2, –4, 5.

**77.** Определите с помощью графика функции $y = x$, при каких значениях $x$ выполняется неравенство:
а) $y > 0$; б) $y \geqslant 0$; в) $y < 0$; г) $y \leqslant 0$.

**78.** Определите по графику функции $y = x$, как изменяется (увеличивается или уменьшается) $y$ с увеличением $x$.

**79.** Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ принадлежат графику функции $y = x$. Верно ли, что:
а) если $x_1 > x_2$, то $y_1 > y_2$; б) если $x_1 < x_2$, то $y_1 < y_2$?

**80.** На биссектрисе II и IV координатных углов отметили точку $A(x; y)$ (рис. 24). Докажите, что для координат этой точки в каждом случае выполняется равенство $y = -x$.

**81.** Пусть для координат точки $A(x; y)$ выполняется равенство $y = -x$. Докажите, что эта точка лежит на биссектрисе II и IV координатных углов.

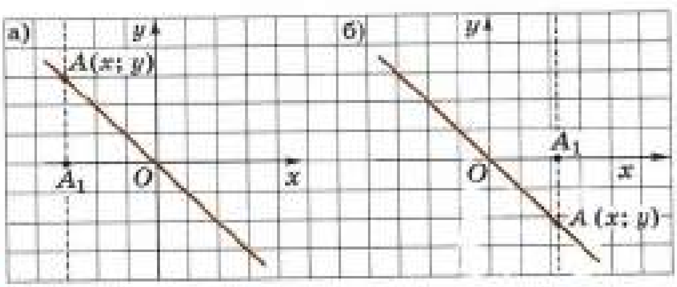



**Рис. 24**

**82.** Принадлежит ли графику функции $y = -x$ точка:
а) $A(6; -6)$; б) $O(0; 0)$; в) $B(5; 5)$;
г) $C(5; -5)$; д) $D(100; -100)$; е) $E(-20; -20)$;
ж) $M(-3; 3)$; з) $N(7; -7)$?

**83.** Постройте график функции $y = -x$. Определите по графику:
а) значение $y$, соответствующее значению $x$, равному 0, 2, –3, 4;
б) значение $x$, соответствующее значению $y$, равному 0, 1, –2, 3, –5;
в) при каких значениях $x$ выполняется неравенство: $y > 0$, $y \geqslant 0$, $y < 0$, $y \leqslant 0$;
г) увеличивается или уменьшается $y$ с увеличением $x$.

**84.** Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ принадлежат графику функции $y = -x$. Верно ли, что:
а) если $x_1 > x_2$, то $y_1 < y_2$; б) если $x_1 < x_2$, то $y_1 > y_2$?

**85.** Какому из графиков функций $y = x$ или $y = -x$ принадлежит точка: а) $A(n; n)$; б) $B(n; -n)$, если $n$ — любое действительное число?

## 2.2. Функция $y = x^2$

*Функция $y = x^2$ определена для любых действительных $x$*, т. е. область определения этой функции есть промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Так как квадрат любого действительного числа — неотрицательное число, то $y$ принимает только неотрицательные значения.

Сформулируем и обоснуем некоторые свойства функции $y = x^2$.

**1) Если $x = 0$, то $y = 0$.**

Это свойство очевидно.

**2) Если $x > 0$, то $y > 0$.**

В самом деле, если $x > 0$, то $y = x^2 = x \cdot x$ есть произведение положительных чисел, поэтому $y > 0$.

**3) Для неотрицательных значений $x$ функция $y = x^2$ возрастает**, т. е. большему неотрицательному значению $x$ соответствует большее значение $y$. Иначе говоря, если $x_1$ и $x_2$ — неотрицательные числа и $x_1 < x_2$, $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, то $y_1 < y_2$.

В самом деле, если $x_1 = 0$ и $x_1 < x_2$, то $x_1^2 = 0$, а $x_2^2 > 0$ по свойству 2 неравенств (см. п. 1.1), т. е. $x_1^2 < x_2^2$, или $y_1 < y_2$.

Если же $x_1 > 0$ и $x_1 < x_2$, то по свойству 6 неравенств (см. п. 1.1) для положительных чисел $x_1$ и $x_2$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $x_1^2 < x_2^2$, или $y_1 < y_2$.

**4) Если положительное $x$, неограниченно возрастая, стремится к $+\infty$, то и $y = x^2$ стремится к $+\infty$, т. е. $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$.**

В самом деле, пусть $x$ стремится к $+\infty$, принимая натуральные значения $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ . Тогда $y = x^2$ будет соответственно принимать значения $n^2 = 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ и тоже стремиться к $+\infty$.

Для промежуточных (не целых) значений $x$ тоже справедливо это свойство.

**5) При изменении знака аргумента $x$ на противоположный соответствующее ему значение функции $y = x^2$ не изменяется, т. е. $y(-x) = y(x)$.**

В самом деле, $(-x)^2 = x^2$ для любого действительного $x$. Функцию, обладающую этим свойством, называют **чётной функцией**.

Таким образом, функция $y = x^2$ — чётная функция.

**6) Функция $y = x^2$ непрерывна** на промежутке $(-\infty; +\infty)$, т. е. она определена в каждой точке этого промежутка и малому изменению $x$ соответствует малое изменение $y$.

Это утверждение становится очевидным для неотрицательных $x$, если, например, считать, что $y$ — это площадь квадрата со стороной $x$. Ясно, что малое изменение стороны квадрата влечёт малое изменение его площади.

Из этих основных свойств функции $y = x^2$ следуют и такие её свойства:

а) **если $x < 0$, то $y > 0$;**

б) **если $x \to -\infty$, то $y \to +\infty$;**

в) **для неположительных значений $x$ функция $y = x^2$ убывает,** т. е. большему неположительному значению $x$ соответствует меньшее значение $y$.

Дадим определения возрастающей (убывающей) на промежутке функции.

Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей на промежутке**, если для любых $x_1$ и $x_2$ из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $y_1 < y_2$.

Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей на промежутке**, если для любых $x_1$ и $x_2$ из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $y_1 > y_2$.

Следовательно, функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

**86.** а) Что значит, что функция $y = x^2$ возрастает для неотрицательных значений $x$?

б) Что значит, что функция $y = x^2$ чётная?

в) Сформулируйте основные свойства функции $y = x^2$.

**87.** Площадь квадрата $S$ вычисляется по известной формуле $S = a^2$, где $a$ — сторона квадрата. Вычислите $S$ при заданных значениях $a$. Решение оформите в виде таблицы.

| $a$ | 1 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | | | | | | | |

**88.** Запишите таблицу значений функции $y = x^2$ при изменении $x$:
а) через 1 на отрезке [0; 15]; б) через 1 на отрезке [–15; 0];
в) через 0,1 на отрезке [0; 1]; г) через 0,1 на отрезке [–1; 0].

**89.** Сравните значения числовых выражений:
а) $1,17^2$ и $1,18^2$; б) $1,18^2$ и $1,19^2$;
в) $2,31^2$ и $2,32^2$; г) $2,71^2$ и $2,72^2$.

**90.** Сравните $y_1$ и $y_2$ для функции $y = x^2$, если:
а) $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,6$; б) $x_1 = 7,1$, $x_2 = 6,3$;
в) $x_1 = 0,9$, $x_2 = 1$; г) $x_1 = 10,2$, $x_2 = 9,8$.

**91.** Вычислите значения функции $y = x^2$ при $x$, равном:
а) –20, –15, –10, –5, 0; б) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{6}$;
в) –0,1; –0,2; –0,3; –0,4; –0,5.

**92.** Задана функция $y = x^2$. Определите $y(x)$, записав решение следующим образом: $y(-0,8) = (-0,8)^2 = 0,8^2 = 0,64$.
а) $y(-1,2)$, $y(0)$, $y(-2,5)$; б) $y(-0,9)$, $y(-1,1)$, $y(-0,1)$.

**93.** Определите знак значения функции $y = x^2$ при каждом значении $x$: а) 0,2; 1,5; –3; –0,2; б) –8,1; –100; 0,31; 100.

**94.** Является ли функция $y = x^2$ возрастающей на отрезке $[a; b]$, если:
а) $a = -3$, $b = 3$; б) $a = -1$, $b = 1$; в) $a = 1$, $b = 4$;
г) $a = 0$, $b = 0,5$; д) $a = -2$, $b = -1$; е) $a = -3$, $b = 0$?

**Доказываем (95—97).**

**95.** Покажите, что из свойств 2 и 5 функции $y = x^2$ следует, что $y > 0$ для всех $x \neq 0$.

**96.** Покажите, что из свойств 3 и 5 функции $y = x^2$ следует, что для неположительных значений $x$ функция $y = x^2$ убывает.

**97.** Докажите, используя определение, что функция $y = x^2$ является убывающей на промежутке $(-\infty; 0]$.

## 2.3. График функции $y = x^2$

**Графиком функции $y = x^2$ является множество точек координатной плоскости $xOy$ с координатами $(x; x^2)$, где $x$ — любое действительное число.**

Чтобы построить график функции

$$y = x^2, \tag{1}$$

надо для каждого действительного числа $x$ вычислить соответствующее значение $y$ по формуле (1) и полученные точки $(x; y)$ отметить на плоскости в заданной декартовой системе координат. Совокупность всех этих точек и образует график функции $y = x^2$.

Однако эту работу до конца выполнить невозможно, потому что указанных точек бесконечно много. Всё же график функции $y = x^2$ можно построить приближённо.

Зададим побольше отдельных положительных значений $x$ и вычислим соответствующие им по формуле (1) значения $y$. Ниже приведена таблица для некоторых значений $x$ из отрезка [0; 3].

| $x$ | 0 | 0,3 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0,09 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |

Точки, соответствующие парам ($x$; $y$) таблицы, отметим на плоскости в заданной прямоугольной системе координат $xOy$. Получилась точечная линия, расположенная над отрезком [0; 3] оси $x$ (рис. 25). Так как функция $y = x^2$ непрерывная (свойство 6) и возрастающая для неотрицательных $x$ (свойство 3), то соединим эти точки плавной непрерывной линией, такой, что ордината $y$ её подвижной точки возрастает вместе с абсциссой (рис. 26). Полученную непрерывную линию можно рассматривать как приближённый график функции $y = x^2$ на отрезке [0; 3] изменения $x$.

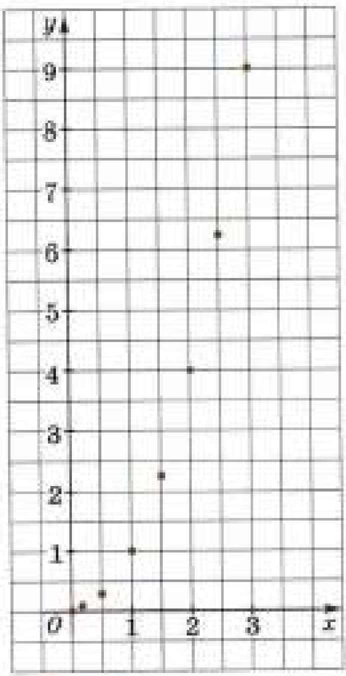



**Рис. 25**

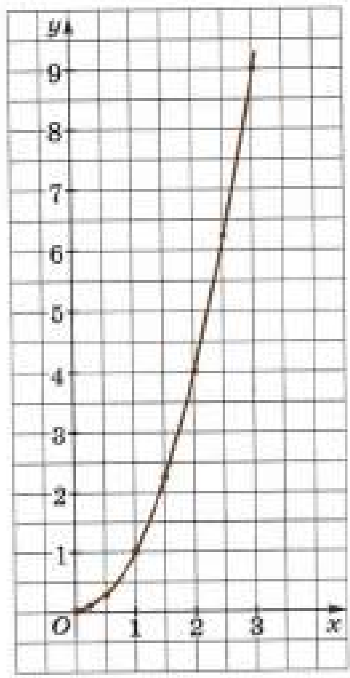
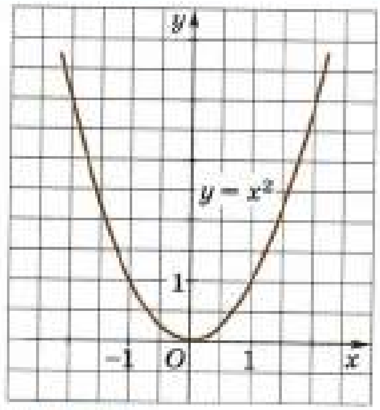



**Рис. 26**




■ Рис. 27

Легко представить себе, как выглядит график функции $y = x^2$ для больших положительных $x$. Если абсцисса точки этого графика стремится к $+\infty$, то её ордината $y$ по свойству 4 тоже стремится к $+\infty$. При этом надо иметь в виду, что $y$ стремится к $+\infty$ гораздо быстрее, чем $x$. Если, например, $x$ принимает значения

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \dots,$$

то $y$ соответственно равен квадратам этих чисел:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \dots .$$

В силу свойства 5 функции $y = x^2$ точки графика этой функции с абсциссами $x$ и $-x$ имеют равные ординаты, поэтому график функции $y = x^2$ симметричен относительно оси $y$. Ось $y$ является **осью симметрии** графика функции $y = x^2$.

График функции $y = x^2$ изображён на рисунке 27.

Линию, являющуюся графиком функции $y = x^2$, называют **параболой**. Часто мы будем говорить коротко «парабола $y = x^2$».

Точку пересечения параболы $y = x^2$ с её осью симметрии называют **вершиной этой параболы**. Это точка $O(0; 0)$.

Рассматривая параболу $y = x^2$, можно непосредственно увидеть интерпретацию ряда свойств функции $y = x^2$.

В самом деле, парабола $y = x^2$ проходит через начало координат. Это свойство 1 функции $y = x^2$.

Точки параболы $y = x^2$, кроме её вершины, находятся выше оси $x$. Для точек с абсциссой $x > 0$ это свойство 2.

Если точка $A(x; y)$ параболы движется по ней так, что её абсцисса $x$ положительна и возрастает, то её ордината $y$ тоже возрастает. Это свойство 3.

При стремлении абсциссы $x$ точки к $+\infty$ ордината $y$ точки $A(x; y)$ параболы стремится к $+\infty$ (свойство 4). Парабола $y = x^2$ симметрична относительно оси $y$ (свойство 5), является непрерывной линией (свойство 6). Кроме того, мы видим также из графика, что если абсциссы $x$ точек параболы отрицательны и возрастают, то ординаты $y$ убывают, т. е. бо́льшим отрицательным значениям $x$ соответствуют меньшие значения $y$. Если $x \to -\infty$, то $y \to +\infty$; если $x < 0$, то $y > 0$.

**98.** а) Что называют графиком функции $y = x^2$?
б) Как построить график функции $y = x^2$?
в) Как называют линию, являющуюся графиком функции $y = x^2$?

г) Как на графике отражается свойство непрерывности функции $y = x^2$?
д) Какая прямая является осью симметрии параболы $y = x^2$?
е) Какую точку называют вершиной параболы $y = x^2$?

**99.** Задана функция $y = x^2$.
а) При каких значениях $x$ определена данная функция?
б) Вычислите значения $y$, взяв значения $x$ от $-3$ до 3 через единицу. Решение оформите в виде таблицы.
в) Постройте систему координат $xOy$, взяв единичные отрезки по 1 см. Постройте точки по вычисленным координатам и соедините их непрерывной линией.
г) В каких координатных четвертях располагается график функции $y = x^2$?

**100.** Заполните таблицу значений функции $y = x^2$ и постройте её график.

| $x$ | 0 | $\pm\frac{1}{4}$ | $\pm\frac{1}{2}$ | $\pm1$ | $\pm1\frac{1}{2}$ | $\pm2$ | $\pm2\frac{1}{2}$ | $\pm3$ | $\pm3\frac{1}{2}$ | $\pm4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2$ | | | | | | | | | | |

**101.** С помощью графика функции $y = x^2$ определите:
а) значение $y$, если $x$ равен $\frac{1}{4}$; 0,3; 1,3;
б) значение $x$, если $y$ равен 1; 1,2; $3\frac{1}{2}$; 0;
в) $y(0)$, $y(5)$, $y(1{,}6)$, $y(4{,}7)$;
г) значение $x$, если $y(x) = 3$, $y(x) = 6$;
д) все значения $y$, при каждом из которых выполняется неравенство: $x > 0$, $x > 3$, $x < -2$;
е) все значения $y$, при каждом из которых выполняется неравенство: $-1 < x < 1$, $-2 < x < 5$, $-\frac{1}{2} < x < 7$;
ж) все значения $x$, при каждом из которых выполняется неравенство: $y > 0$, $y \geqslant 0$, $y < 0$, $y \leqslant 0$.

**102.** Принадлежит ли точка $A(x; y)$ графику функции $y = x^2$, если:
а) $x = 1$, $y = 5$;
б) $x = 3$, $y = 9$;
в) $x = 1{,}5$, $y = 2\frac{1}{4}$;
г) $x = -2$, $y = 4$;
д) $x = -0{,}4$, $y = 1{,}6$;
е) $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 4{,}5$?

**103.** Дана функция $y = x^2$. На каком промежутке:
а) функция возрастает;
б) функция убывает;
в) функция непрерывна?

## 2.4. Функция $y = \frac{1}{x}$

*Функция* $y = \frac{1}{x}$ *определена для любых действительных* $x$ *за исключением* $x = 0$, т. е. область определения функции $y = \frac{1}{x}$ есть множество всех действительных чисел, кроме нуля.

Сначала рассмотрим эту функцию только для положительных $x$. Отметим следующие её свойства:

**1) Если $x > 0$, то $y > 0$.**

**2) Для положительных значений $x$ функция $y = \frac{1}{x}$ убывает,** т. е. большему положительному значению аргумента $x$ соответствует меньшее значение функции $y$, иначе говоря, если $0 < x_1 < x_2$, то $y_1 > y_2$, где $y_2 = \frac{1}{x_2}$, $y_1 = \frac{1}{x_1}$.

Иными словами, функция $y = \frac{1}{x}$ является убывающей на промежутке $(0; +\infty)$.

Пусть $x > 0$, тогда числитель дроби $\frac{1}{x}$ и её знаменатель — положительные числа, поэтому $y = \frac{1}{x} > 0$.

Пусть для положительных $x_1$ и $x_2$ выполняется неравенство $x_1 < x_2$. Тогда на основании свойства 5 неравенств (см. п. 1.1) заключаем, что $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, т. е. $y_1 > y_2$.

**3) Если положительное $x$ стремится к нулю, то $y = \frac{1}{x}$ стремится к $+\infty$, а если $x$ стремится к $+\infty$, то $y = \frac{1}{x}$ стремится к нулю,** т. е.

$$y = \frac{1}{x} \to +\infty \text{ при } x \to 0 \ (x > 0), \quad y = \frac{1}{x} \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

Это свойство проиллюстрируем на примерах.

Если положительное $x$ стремится к нулю, пробегая значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, то функция $y = \frac{1}{x}$ соответственно пробегает значения $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, т. е. $y \to +\infty$.

Если же $x \to +\infty$, пробегая значения $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, то $y = \frac{1}{x}$ соответственно стремится к нулю, пробегая значения $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$.

4) **Функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна на промежутке $(0; +\infty)$**, т. е. она определена в каждой точке этого промежутка и малому изменению положительного аргумента $x$ соответствует малое изменение функции $y$.

Справедливость этого утверждения следует из примера: пусть спортсмену надо пробежать дистанцию 1 км. Будем считать, что он бежит всю дистанцию с постоянной скоростью $x$ км/с. Тогда весь путь он пробежит за $y$ с, причём

$$y = \frac{1}{x}. \qquad (1)$$

Здесь время $y$ есть функция скорости $x$. Очевидно, что малое изменение скорости даёт малое изменение времени, затраченного на путь. Поэтому функция, заданная формулой (1), — непрерывная функция (напомним: в формуле (1) $x > 0$).

Благодаря этому свойству для положительных $x$ график функции $y = \frac{1}{x}$ есть непрерывная линия, т. е. он может быть изображён непрерывным движением карандаша.

**104.** а) Для каких $x$ определена функция $y = \frac{1}{x}$?

б) Является ли функция $y = \frac{1}{x}$ убывающей для положительных $x$?

в) К чему стремится $y = \frac{1}{x}$, когда положительное $x$ стремится к нулю?

г) К чему стремится $y = \frac{1}{x}$, когда $x$ стремится к $+\infty$?

д) Является ли функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывной на промежутке $(0; +\infty)$?

**105.** Площадь прямоугольника равна 1 м$^2$.

а) Какие значения могут принимать длины сторон? Приведите примеры.

б) Найдите длины сторон этого прямоугольника, если длина одной из них равна: 2 м, 3 м, $\frac{1}{4}$ м, $\frac{1}{5}$ м.

в) Составьте формулу зависимости между длинами сторон данного прямоугольника.

**106.** а) Если увеличить скорость равномерного движения в 2 раза, то как изменится время прохождения заданного расстояния?

б) Если в 4 раза уменьшить объём, занимаемый газом, то как изменится плотность газа?

в) Если уменьшить время изготовления одной детали в 3 раза, то как изменится количество деталей, изготовленных за смену?

**107.** Вычислите значение функции $y = \frac{1}{x}$ при $x$, равном 1, 2, 3, 4, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$. Результаты занесите в таблицу.

**108.** Дана функция $y = \frac{1}{x}$. Вычислите:

а) $y(1)$; б) $y(2)$; в) $y(3)$; г) $y(6)$;

д) $y\left(\frac{1}{2}\right)$; е) $y\left(\frac{1}{3}\right)$; ж) $y\left(\frac{1}{6}\right)$; з) $y\left(\frac{1}{10}\right)$.

**109.** Сравните дроби:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{11}$.

**110.** Дана функция $y = \frac{1}{x}$. Сравните:

а) $y(1)$ и $y(2)$; б) $y(2)$ и $y(3)$; в) $y(1)$ и $y(5)$;
г) $y(1)$ и $y(3)$; д) $y(12)$ и $y(5)$; е) $y(4)$ и $y(3)$.

## 2.5. График функции $y = \frac{1}{x}$

Построим график функции $y = \frac{1}{x}$ для положительных $x$. Для этого вычислим значение $y = \frac{1}{x}$, соответствующее каждому положительному числу $x$, и полученные точки $(x; y)$ отметим на плоскости, где задана декартова система координат $xOy$. Совокупность всех этих точек образует график функции $y = \frac{1}{x}$ для положительных $x$.

Однако эту работу до конца выполнить невозможно, потому что указанных точек бесконечно много. Всё же график нашей функции можно построить приближённо.

Зададим побольше положительных значений $x$ и вычислим соответствующие им по формуле $y = \frac{1}{x}$ значения $y$. Ниже приведена такая таблица для некоторых значений $x$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ | 2 | 3 | 4 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |

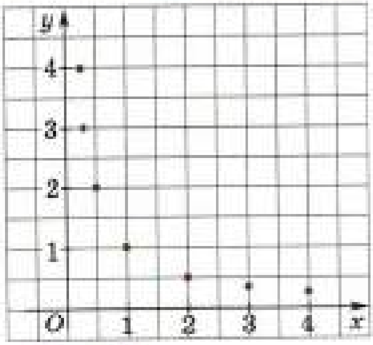


Рис. 28

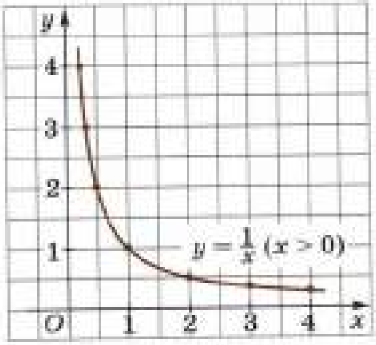



Рис. 29

Отметим на плоскости в системе координат $xOy$ точки, соответствующие парам чисел $(x; y)$, приведённым в таблице (рис. 28).

Соединим эти точки плавной непрерывной линией, такой, что ордината $y$ её подвижной точки убывает вместе с возрастанием её абсциссы (рис. 29). Полученную непрерывную линию можно рассматривать как приближённый график функции $y = \frac{1}{x}$ для положительных $x$.

Отметим, что изображённый на рисунке 29 график отражает свойства 1, 2, 3, 4 функции $y = \frac{1}{x}$, сформулированные в предыдущем пункте.

Действительно, график функции $y = \frac{1}{x}$ для положительных $x$ расположен над осью $Ox$, что соответствует свойству 1.

Если увеличивается абсцисса $x$ точки, движущейся по графику, то ордината $y$ этой точки уменьшается, что соответствует свойству 2.

Свойство 3 заключается в том, что если $x \to +\infty$, то $y \to 0$. Если же $x \to 0$ $(x > 0)$, то $y \to +\infty$. Оно тоже в какой-то мере отражено на рисунке 29.

Наконец, на основании свойства 4 наш график должен быть непрерывной линией, поэтому мы и соединили полученные точки непрерывной линией.

Областью определения функции $y = \frac{1}{x}$ является множество чисел $x$, отличных от нуля, или, выражаясь геометрическим языком, множество точек оси $Ox$, отличных от нулевой точки. Это множество симметрично относительно нулевой точки. Кроме того, для любого $x$ из этого множества выполняется равенство

$$y(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -y(x), \qquad (1)$$

т. е. при изменении знака $x$ на противоположный соответствующее значение функции изменяется на противоположное.

Функцию, обладающую таким свойством, называют **нечётной функцией**.

Функция $y = \frac{1}{x}$ — нечётная функция. В силу равенства (1) точки графика $y = \frac{1}{x}$ с абсциссами $x$ и $-x$ имеют противоположные ординаты, значит, график функции $y = \frac{1}{x}$ симметричен относительно начала координат.

Поэтому для построения графика функции $y = \frac{1}{x}$ для отрицательных $x$ надо изобразить линию, симметричную уже построенной кривой относительно начала координат.

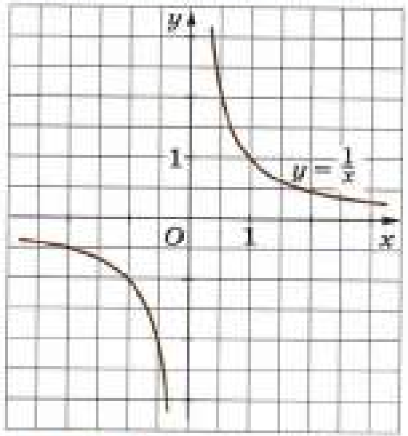



Рис. 30

График функции $y = \frac{1}{x}$ для всех $x$ из её области определения изображён на рисунке 30.

Линию, являющуюся графиком функции $y = \frac{1}{x}$, называют **гиперболой**.

Отметим, что гипербола $y = \frac{1}{x}$ состоит из двух частей, называемых *ветвями гиперболы*. Одна из них (правая ветвь) расположена над положительным лучом оси $Ox$ (без точки $x = 0$), а другая (левая ветвь) — под отрицательным лучом оси $Ox$ (без точки $x = 0$).

Из графика функции $y = \frac{1}{x}$ (см. рис. 30) видно, что функция $y = \frac{1}{x}$ для отрицательных $x$ обладает следующими свойствами:

1) **Если $x < 0$, то $y < 0$.**

2) **Для отрицательных значений $x$ функция $y = \frac{1}{x}$ является убывающей.**

Иными словами, функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$.

3) **Если отрицательное $x$ стремится к нулю, то $y = \frac{1}{x}$ стремится к $-\infty$, а если $x$ стремится к $-\infty$, то $y = \frac{1}{x}$ стремится к нулю**, т. е.

$$y = \frac{1}{x} \to -\infty \text{ при } x \to 0 \ (x < 0), \quad y = \frac{1}{x} \to 0 \text{ при } x \to -\infty.$$

4) **Функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна на промежутке $(-\infty; 0)$.**

Доказательства этих свойств мы опускаем.

**111.** а) Какова область определения функции $y = \frac{1}{x}$?

б) Как называют график функции $y = \frac{1}{x}$?

в) Сколько ветвей имеет гипербола?

г) Является ли функция $y = \frac{1}{x}$ нечётной?

д) На каких промежутках функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна?

**112.** Дана функция $y = \frac{1}{x}$. Вычислите:

а) $y(1)$, $y(3)$, $y(5)$, $y(10)$; б) $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-8)$, $y(-9)$;

в) $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y\left(\frac{1}{4}\right)$; г) $y(1,5)$, $y\left(-5\frac{1}{2}\right)$, $y\left(-3\frac{1}{3}\right)$.

**113.** а) Возрастает или убывает функция $y = \frac{1}{x}$ на промежутках $[1; +\infty)$, $(0; 1]$, $[-1; 0)$, $(-\infty; 0)$?

б) При каком значении $x$ функция $y = \frac{1}{x}$ не определена?

в) Может ли функция $y = \frac{1}{x}$ принять значение 0?

**114. Доказываем.** Докажите, что функция $y = \frac{1}{x}$ является:

а) нечётной; б) убывающей при $x < 0$.

**115.** Расположите значения функции $y = \frac{1}{x}$ в порядке возрастания:

а) $y(1)$, $y(1,5)$, $y(3)$, $y\left(\frac{2}{3}\right)$, $y\left(5\frac{1}{2}\right)$; б) $y(-0,8)$, $y(-1)$, $y(-3)$, $y\left(-\frac{1}{3}\right)$.

**116.** Дана функция $y = \frac{1}{x}$. В системе координат с единичными отрезками, равными 1 см, постройте точки $\left(x; \frac{1}{x}\right)$ при $x$, равном 1, 2, 3, 4, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Соедините полученные точки непрерывной линией. Отметьте точки с абсциссами 5, 6, 7, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$. Используя построенную линию и нечётность функции $y = \frac{1}{x}$, постройте левую ветвь гиперболы.

**117.** С помощью графика функции $y = \frac{1}{x}$ определите:

а) значение $y$, если $x$ равен 0,2; 0,3; 0,8;
б) значение $y$, если $x$ равен $-3,5$; $-1,8$; $-0,4$;
в) значение $x$, если $y(x) = 3$; $y(x) = 5$; $y(x) = -2$.

**118.** Определите с помощью графика функции $y = \frac{1}{x}$ все значения $y$, при каждом из которых выполняется неравенство:
а) $x > 0$; $x < 0$; $x > 2$; $x < -3$; б) $0 < x < 1$; $-3 < x < -1$.

**119.** Принадлежит ли графику функции $y = \frac{1}{x}$ точка:
а) $A(2; 0{,}5)$; б) $B(4; -1)$; в) $C(-25; -0{,}04)$; г) $D(6; 0{,}7)$?

**120.** Заполните таблицу так, чтобы пары чисел $x$ и $y$ задавали точки графика функции $y = \frac{1}{x}$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | | 3 | | $-1$ | | $-\frac{1}{10}$ | |
| $y$ | | 2 | | $-4$ | | $\frac{1}{2}$ | | $-\frac{1}{21}$ |

# § 3. Квадратные корни

## 3.1. Понятие квадратного корня

В геометрии иногда решается задача: площадь квадрата равна $b$, найти длину его стороны. Эта задача есть частный случай более общей задачи. Для данного действительного числа $b$ найти действительное число $a$, такое, что $a^2 = b$. Покажем, что эта задача имеет решение, только если $b$ — неотрицательное число.

Зададим действительное число $a$. Возведя его во вторую степень, получим действительное число $b = a^2$, которое называют *квадратом числа* $a$. Покажем, что $b$ — число неотрицательное.

В самом деле, если $a = 0$, то $b = a^2 = 0 \cdot 0 = 0$. Если $a > 0$, то, умножив неравенство $a > 0$ на положительное число $a$, получим

$$b = a^2 > 0.$$

Если же $a < 0$, то, умножив это неравенство на отрицательное число $a$, получим

$$b = a^2 > 0.$$

Итак, показано, что для любого действительного числа $a$ справедливо неравенство $a^2 \geqslant 0$, т. е. **квадрат любого действительного числа — число неотрицательное.**

Из сказанного следует, что **нет такого действительного числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу.**

Теперь покажем, используя график функции $y = x^2$, что для любого неотрицательного числа $b$ существует действительное число $a$, такое, что

$$a^2 = b.$$

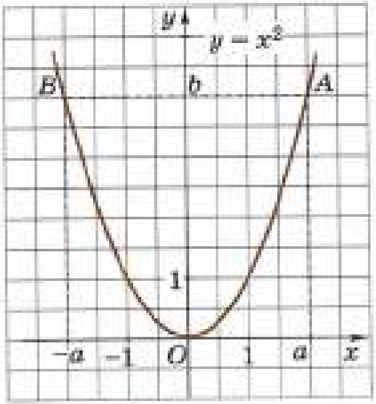



**Рис. 31**

При $b = 0$ нам надо найти такое число $a$, что $a^2 = 0$. Но тогда $a = 0$, потому что, как показано выше, $0^2 = 0$; если же $a \neq 0$, то $a^2 > 0$. Итак, существует единственное число 0, квадрат которого равен числу $b = 0$.

Пусть теперь $b > 0$. Построим в прямоугольной системе координат $xOy$ график функции $y = x^2$. Отложим от начала координат вверх по оси $y$ отрезок длиной $b$ и через верхний его конец проведём прямую, параллельную оси $x$. Эта прямая пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках $A$ и $B$ (рис. 31).

Пусть абсцисса точки $A$ есть число $a$. Тогда абсцисса точки $B$ есть число $(-a)$, потому что точки $A$ и $B$ симметричны относительно оси $y$. Очевидно, что квадраты чисел $a$ и $(-a)$ равны $b$:

$$a^2 = (-a)^2 = b.$$

При этом нет других действительных чисел, квадрат которых равнялся бы $b$.

**Квадратным корнем из данного числа называют такое число (если оно существует), квадрат которого равен данному числу.**

Из сказанного следует, что:

1) существует и притом только два квадратных корня из любого положительного числа $b$. Они равны по абсолютной величине, но имеют разные знаки, т. е. один из корней положительный, а другой — отрицательный (на рисунке 31: $a$ — положительный корень, $(-a)$ — отрицательный корень из числа $b$);

2) квадратный корень из нуля единственный, он равен нулю;

3) нет действительного числа — квадратного корня из отрицательного числа.

**Замечание 1.** В дополнениях к главе 2 будут введены корни квадратные из отрицательных чисел, но это будут уже не действительные числа, а так называемые комплексные числа.

**Замечание 2.** Говорят, что квадратный корень из отрицательного числа не существует, подразумевая под этим, что нет действительного числа, квадрат которого есть отрицательное число.

**Пример 1.** Числа 17 и $-17$ — квадратные корни из 289, потому что $17^2 = (-17)^2 = 289$.

**Пример 2.** Числа $\frac{1}{7}$ и $-\frac{1}{7}$ — квадратные корни из $\frac{1}{49}$, потому что $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$.

**Пример 3.** Числа $\frac{5}{3}$ и $-\frac{5}{3}$ — квадратные корни из $\frac{25}{9}$, потому что $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$.

**Пример 4.** Число 0 — единственный квадратный корень из 0.

**Пример 5.** Нет действительных квадратных корней из $-4$.

**121.** а) Может ли быть отрицательным числом квадрат действительного числа?
б) Что называют квадратным корнем из данного числа?

**122.** а) Сколько существует квадратных корней из положительного числа? из нуля?
б) Существуют ли действительные числа — квадратные корни из отрицательных чисел?

**123.** Найдите сторону квадрата, если его площадь равна:
а) 25 см$^2$; б) 1 м$^2$; в) 400 мм$^2$; г) 49 дм$^2$; д) 16 км$^2$; е) 1 га.

**124.** Покажите с помощью графика функции $y = x^2$, что:
а) существуют два квадратных корня из числа 4;
б) существует единственный квадратный корень из числа 0;
в) не существует действительных чисел — квадратных корней из числа $-5$.

**125.** Существует ли число, квадрат которого равен:
а) 4; б) 100; в) $-6$; г) 81; д) $-0{,}25$; е) 0; ж) 0,09; з) 1,21?

**126.** **Доказываем.** Докажите, что:
а) число 11 есть квадратный корень из 121;
б) число $-13$ есть квадратный корень из 169;
в) число 1,7 не является квадратным корнем из 2,39;
г) число $-0{,}7$ не является квадратным корнем из $-0{,}49$.

**127.** Найдите квадратные корни из числа:
а) 10 000; б) 3600; в) 640 000; г) 1 000 000;
д) $\frac{1}{4}$; е) $\frac{1}{9}$; ж) $\frac{25}{36}$; з) $\frac{16}{49}$.
Докажите правильность решения.

**128.** Проверьте, является ли число:
а) 42 квадратным корнем из 1764;
б) $-19$ квадратным корнем из 361.

**129.** Решите уравнение:
а) $x^2 = 4$; б) $x^2 = 9$; в) $x^2 = 16$; г) $x^2 = 25$;
д) $x^2 = 36$; е) $x^2 = 49$; ж) $x^2 = \frac{4}{25}$; з) $x^2 = \frac{25}{64}$.

## 3.2. Арифметический квадратный корень

**Арифметическим квадратным корнем из данного неотрицательного числа $b$ называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен $b$.**

Это число обозначают $\sqrt{b}$ и читают «арифметический квадратный корень из числа $b$».

Вычислим несколько арифметических квадратных корней:

$$\sqrt{0} = 0,\ \sqrt{1} = 1,\ \sqrt{4} = 2,\ \sqrt{9} = 3,\ \sqrt{16} = 4,$$

$$\sqrt{25} = 5,\ \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7},\ \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

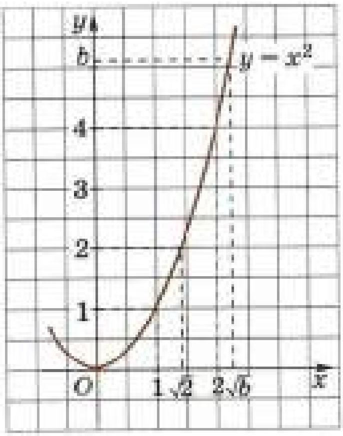



Рис. 32

Подчеркнём, что арифметический квадратный корень из нуля равен нулю, а арифметический квадратный корень из положительного числа — число положительное. Иногда вместо слов «арифметический квадратный корень из числа» говорят «арифметическое значение квадратного корня из числа» или «арифметический корень второй степени из числа».

Часто выражение $\sqrt{b}$ для $b \geqslant 0$ мы будем называть просто квадратным корнем из $b$, опуская для краткости прилагательное «арифметический», но подразумевая его. Для $b < 0$ выражение $\sqrt{b}$ не имеет смысла.

Среди двух квадратных корней из положительного числа $b$ один арифметический, равный $\sqrt{b}$, а другой равен $-\sqrt{b}$.

Зато квадратный корень из 0 только один: $\sqrt{0} = 0$.

Значит, **для каждого неотрицательного числа $b$ существует, и притом только один, арифметический квадратный корень.**

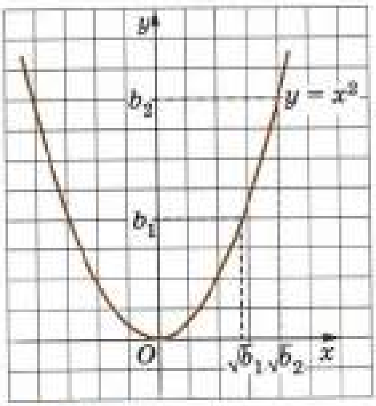



Рис. 33

На рисунке 32 число 0 — арифметический квадратный корень из числа 0, 1 — арифметический квадратный корень из 1, $\sqrt{2}$ — арифметический квадратный корень из 2, 2 — арифметический квадратный корень из 4, $\sqrt{b}$ — арифметический квадратный корень из положительного числа $b$.

Как видно из рисунка 33, для неотрицательных чисел $b_1$ и $b_2$ верны два утверждения:

$$\text{если } b_1 < b_2, \text{ то } \sqrt{b_1} < \sqrt{b_2}; \quad \text{если } \sqrt{b_1} < \sqrt{b_2}, \text{ то } b_1 < b_2.$$

Из сказанного следует, что **арифметические квадратные корни из равных неотрицательных чисел равны, а также если квадраты неотрицательных чисел равны, то эти числа равны.**

Используя определение и единственность арифметического квадратного корня из неотрицательного числа, можно решить некоторые уравнения с неизвестным, стоящим под знаком корня.

**Пример 1.** Решим уравнение

$$\sqrt{x} = 3. \qquad (1)$$

По определению арифметического квадратного корня положительное число 3 является квадратным корнем из числа $x$ тогда и только тогда, когда квадрат числа 3 равен $x$. Поэтому все корни уравнения (1) являются корнями уравнения $3^2 = x$, которое имеет единственный корень 9. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень 9.

**Пример 2.** Решим уравнение

$$\sqrt{2x - 3} = 5. \qquad (2)$$

По определению арифметического квадратного корня положительное число 5 является квадратным корнем из числа $2x - 3$ тогда и только тогда, когда квадрат числа 5 равен $2x - 3$. Поэтому все корни уравнения (2) являются корнями уравнения

$$5^2 = 2x - 3,$$

которое имеет единственный корень 14. Следовательно, уравнение (2) также имеет единственный корень 14.

**Пример 3.** Решим уравнение

$$\sqrt{3x - 3} = -7. \qquad (3)$$

По определению арифметического квадратного корня отрицательное число $-7$ не может быть арифметическим квадратным корнем ни из какого числа. Поэтому уравнение (3) не имеет корней.

**130.** а) Что называют арифметическим квадратным корнем из данного числа?

б) Сколько существует арифметических квадратных корней из данного числа?

в) Могут ли быть равными арифметические квадратные корни из неравных чисел?

г) Верно ли, что $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$, если $b \geqslant 0$?

**131.** Найдите арифметические квадратные корни[1]:

а) $\sqrt{9}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{144}$;

б) $\sqrt{0,49}$, $\sqrt{0,25}$, $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{0,0016}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{1}{81}}$, $\sqrt{\frac{1}{1600}}$.

Вычислите (132—134):

**132.** а) $2+\sqrt{1}$; б) $15-\sqrt{36}$;
в) $\sqrt{9}+\sqrt{4}$; г) $\sqrt{16}+\sqrt{25}$;
д) $\sqrt{49}-\sqrt{1}$; е) $\sqrt{81}-\sqrt{49}$;
ж) $\sqrt{100}-\sqrt{36}$; з) $\sqrt{144}-\sqrt{121}$;
и) $\sqrt{0,36}+\sqrt{0,49}$.

**133.** а) $2\cdot\sqrt{81}$; б) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{100}$; в) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{0,25}$;
г) $\sqrt{0,16}\cdot\sqrt{9}$; д) $\sqrt{0,25}:\sqrt{4}$; е) $\sqrt{49}:\sqrt{0,01}$;
ж) $\sqrt{\frac{1}{9}}\cdot\sqrt{81}$; з) $\sqrt{0,36}:\sqrt{\frac{1}{36}}$; и) $\sqrt{1,69}:\sqrt{0,0625}$.

**134.** а) $5\cdot\sqrt{4}\cdot 3$; б) $2\sqrt{9}+3\sqrt{16}$; в) $\sqrt{13-3\cdot 3}$;
г) $\sqrt{7^2-26:2}$; д) $\frac{1}{3}\sqrt{5^2+22:2}$; е) $3\sqrt{0,64}-5\sqrt{1,21}$.

**135.** Имеет ли смысл выражение:

а) $-\sqrt{25}$; б) $\sqrt{-25}$; в) $\sqrt{0}$; г) $\sqrt{1-5}$?

**136.** Найдите, если возможно, число, арифметический квадратный корень из которого равен:

а) 7; б) 0,2; в) −2; г) −100.

Вычислите (137—138):

**137.** а) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; в) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; г) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$.

**138.** а) $\sqrt{900}$, $\sqrt{6400}$, $\sqrt{810000}$, $\sqrt{250000}$, $\sqrt{16000000}$;

б) $\sqrt{0,64}$, $\sqrt{0,0064}$, $\sqrt{0,0009}$, $\sqrt{0,000016}$, $\sqrt{0,000004}$;

в) $\sqrt{256}$, $\sqrt{729}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{625}$, $\sqrt{289}$, $\sqrt{361}$.

**139.** **Доказываем.** Докажите, что:

а) $\sqrt{4}>1$; б) $\sqrt{3}>1$; в) $2<\sqrt{5}$;
г) $1,4<\sqrt{2}$; д) $1,7<\sqrt{3}$; е) $1,8>\sqrt{3}$;
ж) $1<\sqrt{2}<2$; з) $1<\sqrt{3}<2$.

[1] При выполнении этого и следующих упражнений удобно пользоваться таблицей квадратов.

**140.** Сравните числа:

а) $\sqrt{100}$ и $\sqrt{81}$; б) $\sqrt{100}$ и $\sqrt{121}$; в) $\sqrt{4}$ и 3;

г) $\frac{1}{5}$ и $\sqrt{0,25}$; д) 2 и $\sqrt{\frac{9}{16}}$; е) $\frac{1}{5}$ и $\sqrt{\frac{4}{49}}$;

ж) $\sqrt{0,09}$ и $\sqrt{\frac{4}{25}}$; з) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ и $\sqrt{\frac{64}{49}}$; и) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ и $\frac{1}{4}$.

**141.** Вычислите:

а) $\left(\sqrt{2}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{3}\right)^2$; в) $\left(\sqrt{13}\right)^2$; г) $\left(\sqrt{17}\right)^2$.

**142.** Найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{17}$; в) $\sqrt{23}$; г) $\sqrt{39}$.

**143.** Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} = 1$; б) $\sqrt{x} = 2$; в) $\sqrt{3x - 11} = 1$;

г) $\sqrt{5x - 1} = 2$; д) $\sqrt{5x - 1} = 0$; е) $\sqrt{7x - 3} = -1$.

## 3.3. Свойства арифметических квадратных корней

**Теорема**

Пусть $a$ и $b$ — любые неотрицательные числа, $c$ — положительное число, тогда справедливы равенства

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}. \quad (2)$$

Для любого действительного числа $a$ верно равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|. \quad (3)$$

Доказательство. Левая и правая части равенства (1) — неотрицательные числа, и их квадраты равны одному и тому же числу $ab$:

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab, \quad \left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab.$$

Но тогда, как мы знаем из п. 3.2, и сами числа равны.

Равенство (2) доказывается так же, как и равенство (1). Возводим в квадрат его левую и правую части:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 = \frac{a}{c}, \quad \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a}{c}.$$

Так как квадраты чисел $\sqrt{\frac{a}{c}}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$ равны, то левая часть равенства (2) равна правой.

Квадрат любого действительного числа неотрицателен, поэтому в левой части равенства (3) действительно записан арифметический корень из неотрицательного числа.

По определению арифметического квадратного корня $\left(\sqrt{a^2}\right)^2 = a^2$. Покажем теперь, что $|a|^2 = a^2$. В самом деле,

если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$, и потому $|a|^2 = a^2$;

если $a < 0$, то $|a| = -a$, и потому $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$.

Итак, мы доказали, что квадрат левой части равенства (3) равен квадрату его правой части и поскольку эти части неотрицательны, то они равны между собой.

Теорема доказана.

Отметим, что равенство (1) означает, что *корень из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел*. Равенство (2) означает, что *корень из частного от деления неотрицательного числа на положительное равен частному корней из этих чисел*.

Заметим, что в этих формулировках мы для краткости вместо слов «арифметический квадратный корень» написали просто «корень».

Равенства (1), (2) и (3) помогают упрощать числовые выражения, содержащие квадратные корни.

**Пример 1.** $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

**Пример 2.** $\sqrt{\frac{27}{25}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 3}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt{\frac{3}{1}} = \frac{3}{5}\sqrt{3}$.

**Пример 3.** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{8 \cdot 32} = \sqrt{16^2} = 16$.

**Пример 4.** $\left(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2}\right) =$
$= \left(2\sqrt{4}\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\sqrt{36} + \sqrt{4}\sqrt{5} - 4\sqrt{2}\right) = \left(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right) \times$
$\times\left(6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2}\right) = \left(3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right) = 6\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right) =$
$= 6\left(\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right) = 6(5 - 2) = 18$.

Преобразование $\sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$ называют **вынесением множителя из-под знака корня**, обратное преобразование $4\sqrt{5} = \sqrt{16 \cdot 5}$ называют **внесением множителя под знак корня**.

Преобразование $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ называют **освобождением от знака корня в знаменателе или освобождением от иррациональности в знаменателе**.

**144.** а) Чему равно произведение квадратных корней из неотрицательных чисел?
б) Чему равен $\sqrt{a^2}$ для положительного числа $a$?
в) Чему равно частное квадратных корней из положительных чисел?
г) Перечислите свойства арифметических квадратных корней.
д) Если $a < 0$, то является ли выражение $\sqrt{a^2}$ арифметическим квадратным корнем?

**145.** Вычислите:
а) $\sqrt{4^2}$; б) $\sqrt{3{,}1^2}$; в) $\sqrt{(-1)^2}$;
г) $\sqrt{(-5)^2}$; д) $\sqrt{1{,}13^2}$; е) $\sqrt{(-7{,}2)^2}$;
ж) $\sqrt{(-0{,}3)^2}$; з) $\sqrt{(-57{,}1)^2}$.

**146.** При каких значениях $x$ справедливо равенство[1]:
а) $\sqrt{x^2} = x$; б) $\sqrt{x^2} = |x|$; в) $\sqrt{x^2} = -x$; г) $\sqrt{x^2} = 0$?

**147.** Упростите выражение:
а) $\sqrt{a^2}$, если $a \geqslant 0$; б) $\sqrt{b^2}$, если $b < 0$;
в) $\sqrt{m^2}$, если $m = 0$; г) $\sqrt{(n-1)^2}$, если $n < 1$;
д) $\sqrt{(x+1)^2}$, если $x + 1 > 0$; е) $\sqrt{(m-2)^2}$, если $m - 2 \geqslant 0$;
ж) $\sqrt{(3a+1)^2}$, если $3a + 1 \geqslant 0$; з) $\sqrt{(p-4)^2}$, если $p - 4 < 0$.

Вычислите (148—149):

**148.** а) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$; в) $\sqrt{\left(1\frac{1}{5}\right)^2}$; г) $\sqrt{\left(-2\frac{1}{3}\right)^2}$.

**149.** а) $\sqrt{2^4}$; б) $\sqrt{3^4}$; в) $\sqrt{2^6}$; г) $\sqrt{3^6}$;
д) $\sqrt{(-2)^8}$; е) $\sqrt{(-3)^8}$; ж) $\sqrt{a^4}$; з) $\sqrt{m^6}$.

Указание. Подкоренное выражение преобразуйте в степень с показателем 2.

**150.** Упростите выражение:
а) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$; б) $\sqrt{a^2 + 4a + 4}$; в) $\sqrt{1 - 2m + m^2}$;
г) $\sqrt{4 - 4p + p^2}$; д) $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1}$; е) $\sqrt{9 - 6q^2 + q^4}$;
ж) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9}$; з) $\sqrt{25 + 30a + 9a^2}$.

[1] Далее всегда буквами будем обозначать числа. Напомним, что числа под знаком корня неотрицательны, а знаменатели дробей не обращаются в нуль.

**151.** Вычислите:

а) $\sqrt{4 \cdot 9}$; б) $\sqrt{9 \cdot 16}$; в) $\sqrt{16 \cdot 25}$;
г) $\sqrt{25 \cdot 49}$; д) $\sqrt{25 \cdot 36 \cdot 9}$; е) $\sqrt{49 \cdot 64 \cdot 100}$.

Вынесите множитель из-под знака корня (152—154).

**Например:** $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

**152.** а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{20}$; г) $\sqrt{24}$; д) $\sqrt{27}$;
е) $\sqrt{28}$; ж) $\sqrt{32}$; з) $\sqrt{45}$; и) $\sqrt{50}$; к) $\sqrt{72}$.

**153.** а) $\sqrt{108}$; б) $\sqrt{147}$; в) $\sqrt{162}$; г) $\sqrt{245}$;
д) $\sqrt{275}$; е) $\sqrt{363}$; ж) $\sqrt{396}$; з) $\sqrt{576}$;
и) $\sqrt{676}$; к) $\sqrt{972}$; л) $\sqrt{54756}$; м) $\sqrt{831744}$.

**Указание.** В сложных случаях полезно разложить подкоренное выражение на простые множители и выделить квадраты этих множителей, если они имеются.

**Например:** $\sqrt{2160}$

$$\begin{array}{r|l}
2160 & 2 \\
1080 & 2 \\
540 & 2 \\
270 & 2 \\
135 & 5 \\
27 & 3 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\left.\right) 2^2 \\
\left.\right) 2^2 \\
\left.\right) 3^2
\end{array}$$

1-й способ. $\sqrt{2160} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{15} = 12\sqrt{15}$.

2-й способ. $\sqrt{2160} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 3)^2 \cdot 15} = \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 3)^2} \cdot \sqrt{15} = 12\sqrt{15}$.

**154.** а) $\sqrt{a^4}$; б) $\sqrt{x^3}$; в) $\sqrt{m^5}$;
г) $\sqrt{p^7}$; д) $\sqrt{a^2b^2}$; е) $\sqrt{m^2 \cdot 4n^2}$;
ж) $\sqrt{x^4y^2}$; з) $\sqrt{9p^2q^4}$; и) $\sqrt{25a^6b^3}$;
к) $\sqrt{16xy^3}$; л) $\sqrt{49pq^2a^5}$; м) $\sqrt{121m^4n^3k^2}$.

Вычислите (155—156):

**155.** а) $\sqrt{8 \cdot 50}$; б) $\sqrt{27 \cdot 12}$; в) $\sqrt{18 \cdot 50}$;
г) $\sqrt{32 \cdot 72}$; д) $\sqrt{40 \cdot 55 \cdot 22}$; е) $\sqrt{21 \cdot 35 \cdot 15}$;
ж) $\sqrt{6 \cdot 30 \cdot 245}$; з) $\sqrt{245 \cdot 27 \cdot 60}$; и) $\sqrt{242 \cdot 98}$.

**156.** а) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}$; б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$; в) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{45}$;
г) $\sqrt{98} \cdot \sqrt{50}$; д) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10}$; е) $\sqrt{27000} \cdot \sqrt{30}$;
ж) $\sqrt{640} \cdot \sqrt{1000}$; з) $\sqrt{25000} \cdot \sqrt{1000}$.

**157.** Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt{2}$; б) $-3\sqrt{2}$;
в) $4\sqrt{5}$; г) $-10\sqrt{5}$;
д) $a\sqrt{4}$, $a \geqslant 0$; е) $mn\sqrt{5}$, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
ж) $2x\sqrt{6}$, $x \leqslant 0$; з) $3pq\sqrt{2}$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$;
и) $x^2\sqrt{3}$; к) $a^3\sqrt{7}$, $a \geqslant 0$;
л) $m^2n\sqrt{4}$, $n \leqslant 0$; м) $5c^2d^3\sqrt{2}$, $d \geqslant 0$.

**158.** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{\frac{2}{9}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{16}}$; в) $\sqrt{\frac{40}{81}}$; г) $\sqrt{\frac{72}{25}}$;
д) $\sqrt{12\frac{1}{2}}$; е) $\sqrt{1\frac{1}{4}}$; ж) $\sqrt{\frac{x^3}{9}}$; з) $\sqrt{\frac{7a}{16b^2}}$;
и) $\sqrt{\frac{3m^3n^2}{4a^2b}}$; к) $\sqrt{\frac{25x^2y^3}{mn^7}}$; л) $\sqrt{\frac{0{,}1x}{10y^2}}$; м) $\sqrt{\frac{5m^3}{0{,}5n}}$.

**159.** Вычислите:

а) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; б) $\sqrt{\frac{64}{100}}$; в) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; г) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; д) $\sqrt{\frac{169}{841}}$.

**160.** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; г) $\sqrt{\frac{3}{5}}$; д) $\sqrt{\frac{6}{7}}$;
е) $\sqrt{\frac{8}{12}}$; ж) $\sqrt{\frac{1}{6a}}$; з) $\sqrt{\frac{1}{3x}}$; и) $\sqrt{\frac{a}{m}}$; к) $\sqrt{\frac{n}{p}}$.

**161.** Преобразуйте выражение так, чтобы под знаком корня стояло целое число:

а) $\sqrt{3\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt{1\frac{5}{6}}$; в) $\sqrt{2\frac{1}{5}}$; г) $\sqrt{2\frac{1}{3}}$; д) $\sqrt{8\frac{1}{3}}$.

**Например:** $\sqrt{2\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

**162.** Зная приближённое значение $\sqrt{6} \approx 2{,}449$, вычислите приближённо:

а) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; в) $\sqrt{\frac{3}{8}}$; г) $\sqrt{\frac{2}{27}}$.

**163.** Освободитесь от знака корня в знаменателе:

а) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{\sqrt{7x}}{\sqrt{7}}$; г) $\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{2x}}$;
д) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{6x}}$; е) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5x}}$; ж) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

**164.** Сравните числа:

а) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$; б) $10\sqrt{20}$ и $20\sqrt{10}$; в) $3\sqrt{0,5}$ и $2\sqrt{0,5}$;
г) $5\sqrt{0,3}$ и $7\sqrt{0,3}$; д) $3\sqrt{10}$ и $4\sqrt{6}$; е) $6\sqrt{3}$ и $5\sqrt{4}$;
ж) $7\sqrt{5}$ и $5\sqrt{7}$; з) $2\sqrt{30}$ и $5\sqrt{5}$; и) $12\sqrt{10}$ и $10\sqrt{12}$.

**165.** Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{32}$, $\sqrt{30}$, $3\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{72}$;

б) $0,2\sqrt{48}$, $0,9\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $1\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

**166.** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\frac{1}{2}\sqrt{8}$; б) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$; в) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{8}}$; г) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{96}{5}}$.

**167.** Упростите выражение:

а) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{8}-3\sqrt{2}$;
в) $\sqrt{a}-5\sqrt{a}$; г) $a\sqrt{x}-3\sqrt{x}$;
д) $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}-\sqrt{4a}$;
е) $\sqrt{2}+3\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{128}-6\sqrt{18}$;
ж) $\left(8+3\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)$;
з) $\left(3\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}-2\sqrt{72}\right)\cdot\sqrt{2}$;
и) $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)$;
к) $\left(7\sqrt{2}-5\sqrt{6}-3\sqrt{8}+4\sqrt{20}\right)\cdot 3\sqrt{2}$;
л) $\left(2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)$;
м) $\left(\sqrt{12}-1\right)\left(\sqrt{12}+1\right)$;
н) $\left(7-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+7\right)$;
о) $\left(\sqrt{20}-3\right)\left(3+2\sqrt{5}\right)$.

**168.** Разложите на множители:

а) $\sqrt{x}+x$; б) $a-\sqrt{a}$; в) $a\sqrt{3}-b\sqrt{3}$;
г) $3\sqrt{a}-3\sqrt{b}$; д) $x\sqrt{y}-y\sqrt{x}$; е) $m\sqrt{n}+n\sqrt{m}$;
ж) $\sqrt{a^3}+2a$; з) $3mn-\sqrt{m^3n^2}$; и) $xy-\sqrt{x^2y}$.

**169.** Сократите дробь:

а) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{10}$; б) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}}$;
г) $\frac{7\sqrt{3}-21}{14\sqrt{3}}$; д) $\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$; е) $\frac{m-\sqrt{m}}{2\sqrt{m}}$.

**170.** Возведите в степень:

а) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$; б) $\left(a-b\sqrt{x}\right)^2$; в) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$;

г) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$; д) $\left(1+3\sqrt{2}\right)^2$; е) $\left(-1+4\sqrt{3}\right)^2$.

**171.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$; в) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$;

г) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; д) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; е) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

**172.** Вычислите:

а) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{7}$; б) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}-\sqrt{7}$;

в) $\sqrt{16+6\sqrt{7}}-\sqrt{7}$; г) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}+\sqrt{7}$;

д) $\sqrt{17-6\sqrt{8}}+\sqrt{8}$; е) $\sqrt{31-8\sqrt{15}}+\sqrt{15}$.

**Указание**. Числовое выражение вида $\sqrt{A\pm B\sqrt{C}}$ надо стараться преобразовать так, чтобы подкоренное выражение стало полным квадратом.

**Например:**

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1-2\sqrt{2}+2}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1.$$

**173.** **Доказываем.** Докажите, что значение числового выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

является рациональным числом.

**174.** Найдите значение выражения:

а) $4x+\sqrt{9-x^2}+\left|\sqrt{9-x^2}-3\right|$ при $x=2{,}5$;

б) $10x+\sqrt{4-9x^2}+\left|2-\sqrt{4-9x^2}\right|$ при $x=0{,}1$;

в) $5x+\sqrt{16-3x^2}+\left|\sqrt{16-3x^2}-4\right|$ при $x=1{,}2$;

г) $2x+\sqrt{25-4x^2}+\left|5-\sqrt{25-4x^2}\right|$ при $x=2{,}1$.

**175.** Дан отрезок единичной длины. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, длина которого равна:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}$;

д) $\sqrt{7}$; е) $\sqrt{8}$; ж) $\sqrt{10}$.

## 3.4. Квадратный корень из натурального числа

Квадрат натурального числа есть натуральное число. Но не всякое натуральное число есть квадрат некоторого натурального числа.

Среди первых 20 натуральных чисел только 4 являются квадратами натуральных чисел: 1, 4, 9 и 16.

Среди первых 1000 натуральных чисел имеется 31 число, каждое из которых является квадратом натурального числа, т. е. примерно 3%. Вот они:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961.

Если же рассмотреть натуральные числа, не большие 10 000, то среди них имеется всего 100 чисел, т. е. 1%, являющихся квадратами натуральных чисел, а именно:

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ 100^2.$$

Мы видим, что среди больших натуральных чисел очень редко встречаются квадраты натуральных чисел.

**Теорема**

Если натуральное число $n$ не является квадратом некоторого натурального числа, то $\sqrt{n}$ — иррациональное число.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

Из теоремы следует, что числа

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{11},\ \sqrt{12},\ \ldots$$

есть иррациональные числа.

Приведём пример доказательства иррациональности одного из этих чисел.

Докажем, что число $\sqrt{3}$ иррациональное.

**Доказательство.** Предположим противное, что $\sqrt{3}$ рациональное число, т. е. что

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}, \tag{1}$$

где $p$ и $q$ — натуральные числа. Будем считать, что дробь $\frac{p}{q}$ несократимая, иначе мы предварительно её сократили бы. После возведения равенства (1) в квадрат получим, что $3 = \frac{p^2}{q^2}$, откуда

$$p^2 = 3q^2. \tag{2}$$

Так как правая часть равенства (2) делится на 3, то и левая часть — $p^2$ — также делится на 3. Докажем, что тогда число $p$ делится на 3.

Предположим противное, что $p$ не делится на 3, т. е. или $p = 3k + 1$, или $p = 3k + 2$, где $k$ — некоторое натуральное число, тогда или $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$, или $p^2 = 9k^2 + 12k + 4$ — в обоих случаях $p^2$ не делится на 3. Получили противоречие. Итак, $p$ делится на 3, т. е. $p = 3k$, где $k$ — некоторое натуральное число. Тогда из равенства (2) следует, что $q^2 = 3k^2$.

Рассуждая аналогично, получим, что $q$ делится на 3, но тогда дробь $\frac{p}{q}$ сократимая, а это противоречит условию, что эта дробь несократимая.

Таким образом, предположение, что $\sqrt{3}$ — рациональное число, неверно, значит, $\sqrt{3}$ — иррациональное число.

**176.** Может ли быть рациональным числом квадратный корень из:
а) простого числа; б) натурального числа?

**177.** а) Выпишите натуральные числа, меньшие 150, которые являются квадратами натуральных чисел.
б) Имеются ли квадраты натуральных чисел среди натуральных чисел от 150 до 200?

**178.** Является ли квадратом натурального числа число:
а) 7; б) 27; в) 0; г) −5;
д) $\frac{9}{4}$; е) 100; ж) −16; з) 49?

**Доказываем** (179—180).

**179.** Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен:
а) 5; б) 7; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$.

**180.** Докажите, что число:
а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt{11}$; г) $\sqrt{13}$
иррациональное.

**181.** Является ли число:
а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt{13}$; в) $\sqrt{16}$; г) $\sqrt{17}$;
д) $-\sqrt{9}$; е) $\sqrt{20}$; ж) $\sqrt{25}$; з) $\sqrt{0}$
рациональным? иррациональным?

**Доказываем** (182—183).

**182.** Докажите, что значение данного выражения — число рациональное:

а) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$; б) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$;

в) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$; г) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})$;

д) $(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2$; е) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$;

ж) $(\sqrt{7}-1)^2+(\sqrt{7}+1)^2$; з) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$;

и) $(\sqrt{7}-2)^2+4\sqrt{7}$; к) $(\sqrt{8}+3)^2-6\sqrt{8}$.

**183.** Докажите, что для любого числа $a \geq 0$ выполняется равенство:

а) $(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})=1$;

б) $(\sqrt{a}-1)^2+4\sqrt{a}=(\sqrt{a}+1)^2$;

в) $(\sqrt{a}+2)^2-8\sqrt{a}=(\sqrt{a}-2)^2$.

## 3.5*. Приближённое вычисление квадратных корней

Мы знаем, что $\sqrt{2}$ есть иррациональное число. Следовательно, его десятичное разложение

$$\sqrt{2}=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

бесконечное непериодическое.

Покажем, как вычисляется число $\alpha_0$ и как вычисляются последовательно цифры $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ... .

Из двойного неравенства

$$1<2<4$$

по свойству 7 (п. 1.1) следует, что

$$\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}, \text{ т. е. } 1<\sqrt{2}<2.$$

Значит,

$$\alpha_0=1, \text{ т. е. } \sqrt{2}=1,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots.$$

Будем теперь искать $\alpha_1$. Для этого рассмотрим числа

$$1,0;\ 1,1;\ 1,2;\ 1,3;\ \ldots;\ 1,9;\ 2,$$

где-то между ними находится число $\sqrt{2}$. Чтобы узнать, между какими из них, будем последовательно возводить их в квадрат:

$1,0^2=1$; $1,2^2=1,44$; $1,4^2=1,96$;

$1,1^2=1,21$; $1,3^2=1,69$; $1,5^2=2,25$.

Дальше вычислять не надо: мы видим, что

$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2,$$

или

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5.$$

Это показывает, что $\alpha_1 = 4$, т. е. $\sqrt{2} = 1{,}4\alpha_2\alpha_3\ldots$ .

Чтобы найти $\alpha_2$, вычислим квадраты чисел:

$$1{,}40^2 = 1{,}96; \qquad 1{,}41^2 = 1{,}9881; \qquad 1{,}42^2 = 2{,}0164.$$

Мы видим, что

$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2,$$

т. е.

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42.$$

Поэтому $\alpha_2 = 1$, т. е. $\sqrt{2} = 1{,}41\alpha_3\alpha_4\ldots$ .

Итак, мы нашли целую часть и первые две цифры после запятой в десятичном разложении $\sqrt{2}$, или приближённое значение $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41$$

с недостатком с точностью до второго знака после запятой. Продолжая этот процесс, мы будем находить приближённые значения $\sqrt{2}$ с тем количеством цифр после запятой, которое нам понадобится, другими словами, вычислим $\sqrt{2}$ с точностью до любого необходимого нам знака после запятой:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots .$$

Этот процесс можно применить к приближённому вычислению арифметического квадратного корня из любого натурального числа, не являющегося квадратом натурального числа.

Но обычно такие вычисления не делают. Существуют подробные таблицы для приближённых значений арифметических квадратных корней из натуральных чисел.

Кроме того, с помощью калькулятора можно моментально узнать, чему приближённо равен арифметический квадратный корень из данного натурального числа.

**184.** Для каждого из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 найдите:
а) наибольшее натуральное число, квадрат которого не больше данного числа;
б) наименьшее натуральное число, квадрат которого не меньше данного числа.

**185.** Найдите приближённое значение арифметического квадратного корня из числа с точностью до 0,01:
а) 3; б) 5; в) 6; г) 7; д) 8; е) 10; ж) 11; з) 12.

**186.** Вычислите с точностью до 1:

а) $\sqrt{174}$; б) $\sqrt{242}$; в) $\sqrt{357}$; г) $\sqrt{413}$.

**187.** Вычислите с точностью до 0,1:

а) $\sqrt{23}$; б) $\sqrt{31}$; в) $\sqrt{45}$; г) $\sqrt{53}$.

**188.** Вычислите с точностью до третьего знака после запятой:

а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{8}$; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{11}$.

Проверьте результаты по таблице квадратных корней.

**189.** Используя таблицу квадратных корней, вычислите приближённо с точностью до единицы:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{13}$; г) $\sqrt{72}$;
д) $\sqrt{97}$; е) $\sqrt{12}$; ж) $\sqrt{28}$; з) $\sqrt{51}$;
и) $\sqrt{12{,}3}$; к) $\sqrt{43{,}1}$; л) $\sqrt{840}$; м) $\sqrt{785}$;
н) $\sqrt{1228}$; о) $\sqrt{1840}$; п) $\sqrt{3240}$; р) $\sqrt{431}$;
с) $\sqrt{689}$; т) $\sqrt{1578}$; у) $\sqrt{2578}$; ф) $\sqrt{4774}$.

**190.** Проверьте справедливость неравенства:

а) $6{,}0 < \sqrt{37} < 6{,}1$; б) $4{,}3 < \sqrt{19} < 4{,}4$;
в) $11{,}0 < \sqrt{123} < 11{,}1$; г) $21{,}3 < \sqrt{456} < 21{,}4$.

**191.** Какое число является более точным приближением $\sqrt{11}$:

а) 3 или 4; б) 3,3 или 3,4;
в) 3,31 или 3,32; г) 3,316 или 3,317?

# Дополнения к главе 1

## 1. Множества

**Множество** — это собрание каких-либо предметов, вещей, понятий, называемых его **элементами**. В математике это множества чисел (натуральных, целых, действительных и др.), множества точек, фигур и т. п.

Множества обозначают латинскими буквами $A$, $B$, $C$, ... . Если $a$ является элементом множества $A$, то пишут $a \in A$ и говорят «$a$ принадлежит $A$». Если $b$ не является элементом множества $A$, то пишут $b \notin A$ и говорят «$b$ не принадлежит $A$».

Если любой элемент множества $A$ является элементом множества $B$, то $A$ называют **подмножеством** множества $B$. Пишут $A \subset B$ и говорят «$A$ подмножество $B$».

Если $A$ состоит только из одного элемента $a$, то различают множество $A = \{a\}$ и элемент $a$ множества $\{a\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют **пустым множеством**. Его обозначают знаком $\varnothing$ и считают, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называют **конечным**. Элементы конечного множества, состоящего из $n$ элементов, можно занумеровать:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n.$$

Множество называют **бесконечным**, если для любого сколь угодно большого натурального $n$ в этом множестве найдётся более чем $n$ элементов.

Например, множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

бесконечно. Множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел тоже бесконечно.

**Объединением множеств** $A$ и $B$ называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих либо множеству $A$, либо множеству $B$. Объединение множеств $A$ и $B$ обозначают $A \cup B$. Знак $\cup$ происходит от первой буквы латинского слова *union* (объединение, союз). Объединение множеств $A$ и $B$ иногда называют **суммой множеств** $A$ и $B$.

**Пересечением множеств** $A$ и $B$ называют множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит и множеству $A$, и множеству $B$. Пересечение множеств $A$ и $B$ обозначают $A \cap B$.

Например, пусть $A = [0;\ 2]$, $B = [1;\ 3]$. Тогда

$$A \cup B = [0;\ 2] \cup [1;\ 3] = [0;\ 3],$$
$$A \cap B = [0;\ 2] \cap [1;\ 3] = [1;\ 2].$$

**Разностью множеств** $A$ и $B$ называют множество, состоящее из всех элементов множества $A$, не являющихся элементами множества $B$. Разность множеств $A$ и $B$ обозначают $A \setminus B$.

Например, если $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, а $B = \{3,\ 4,\ 5\}$, то

$$A \setminus B = \{1,\ 2\},$$
$$B \setminus A = \{5\}.$$

Говорят, что множества $A$ и $B$ имеют равные (одинаковые) мощности, если между элементами $a \in A$ и $b \in B$ можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Например, между элементами множества $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ и множества $B = \{1,\ 4,\ 9\}$ можно установить взаимно-однозначное соответствие

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 4 & 9 \end{array}$$

Эти множества имеют равные мощности.

Говорят, что мощность множества $A$ меньше мощности множества $B$, если между элементами этих множеств нельзя установить взаимно-однозначное соответствие, но существует подмножество $B' \subset B$, такое, что между элементами $A$ и $B'$ можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Если $A$ и $B$ — конечные множества и множество $A$ состоит из $n_1$ элементов, а множество $B$ состоит из $n_2$ элементов, то, очевидно, мощности множеств $A$ и $B$ равны, если $n_1 = n_2$, и мощность множества $A$ меньше мощности множества $B$, если $n_1 < n_2$.

Мощность конечного множества $A$ меньше мощности бесконечного множества $B$: ведь $A$ состоит из конечного числа элементов, а в $B$ существует больше чем $n$ элементов для любого натурального $n$.

Множество $N$ всех натуральных чисел имеет мощность одинаковую с множеством всех чётных натуральных чисел. Ведь имеет место взаимно-однозначное соответствие

$$n \leftrightarrows 2n,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Получился пример бесконечного множества, имеющего одинаковую мощность со своей частью.

Вот ещё пример. Множество всех натуральных чисел и множество всех целых неотрицательных чисел имеют одинаковую мощность. Взаимную однозначность между элементами этих множеств можно осуществить так:

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots \\ \upharpoonleft\downharpoonright & \upharpoonleft\downharpoonright & \upharpoonleft\downharpoonright & \upharpoonleft\downharpoonright & \upharpoonleft\downharpoonright \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \end{array}$$

Уравнение $a + x = b$, где $a$ и $b$ — натуральные числа, не всегда разрешимо, т. е. не всегда имеет решение в множестве натуральных чисел, но всегда имеет решение в множестве целых чисел.

Уравнение $a + x = b$, где $a$ и $b$ — обыкновенные положительные дроби, не всегда разрешимо в множестве обыкновенных положительных дробей, но всегда имеет решение в множестве рациональных чисел.

Уравнение $ax = b$, где $a$ и $b$ — целые числа и $a \neq 0$, не всегда разрешимо в множестве целых чисел, но всегда разрешимо в множестве рациональных чисел.

Если данная арифметическая операция (сложение, вычитание, умножение, деление) применима к любым двум числам из данного множества и в результате даёт число из этого же множества, то говорят, что *множество замкнуто относительно этой операции*. В противном случае говорят, что оно *незамкнуто относительно этой операции*.

Например, множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения, незамкнуто относительно вычитания и деления; множество целых чисел замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, незамкнуто относительно деления; множество рациональных чисел замкнуто относительно всех арифметических операций (деление на нуль запрещено).

**Принцип Дирихле.** Пусть $A$ — конечное множество из $n$ натуральных чисел, каждое из которых не превышает число $k$, и $k < n$, тогда в $A$ есть равные числа.

**Прямым произведением** $A \times B$ множеств $A$ и $B$ называют множество всех пар $(x; y)$, где $x \in A$, $y \in B$.

Например, координатную плоскость $\boldsymbol{R}_2$ можно рассматривать как прямое произведение $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}'$ двух действительных осей $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}'$, где $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}'$.

Если конечные множества $A$ и $B$ имеют $m$ и $n$ элементов соответственно, то их прямое произведение содержит $m \cdot n$ элементов, так как с каждым из элементов множества $A$ можно образовать $n$ пар с элементами множества $B$.

**192.** $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ соответственно множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел.

а) Запишите, используя принятые обозначения, какому из этих множеств принадлежит, а какому не принадлежит число:

1) $3$; 2) $-5$; 3) $\frac{3}{7}$; 4) $\pi$; 5) $\sqrt{2}$.

б) Запишите, используя принятые обозначения, подмножеством каких из множеств $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ является множество:

1) $\boldsymbol{N}$; 2) $\boldsymbol{Z}$; 3) $\boldsymbol{Q}$; 4) $\boldsymbol{R}$.

в) Упростите запись:

1) $\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{Z}$; 2) $\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{Z}$; 3) $\boldsymbol{Z} \cup \boldsymbol{Q}$; 4) $\boldsymbol{Z} \cap \boldsymbol{Q}$.

**193.** Даны множества:

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ и } B = \{2, 3, 4, 5\}.$$

а) Из каких элементов состоит множество:

1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \times B$?

б) Составьте множество $C$, состоящее из пяти элементов, для которого выполняется условие:

$$A \cap C = C \cap B.$$

в) Запишите все подмножества множеств $A$ и $B$, определите число подмножеств каждого из этих множеств.

**194.** Даны два множества:

$$A = [1; 3] \text{ и } B = [2; 4].$$

а) Изобразите на координатной оси множество:
1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$.

б) Изобразите в системе $xOy$ все точки, координаты которых $(x; y)$ являются элементами множества $A \times B$.

**195.** **Доказываем.** Докажите, что:
а) множества $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Z}$ имеют одинаковую мощность;
б) множества точек двух любых отрезков имеют одинаковую мощность;
в) множества $(0; 1)$ и $\boldsymbol{R}$ имеют одинаковую мощность.

**196.** Является ли замкнутым относительно операции сложения, вычитания, умножения, деления множество:
а) чётных натуральных чисел;
б) нечётных натуральных чисел;
в) чётных целых чисел;
г) нечётных целых чисел?

**197.** **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о Дирихле, о задачах, решаемых с помощью принципа Дирихле.

## 2. Исторические сведения

Алгебра оперирует с буквенными выражениями. Буква в алгебре часто означает произвольное число, принадлежащее некоторому множеству чисел. Отсюда небольшой шаг к тому, чтобы под буквой в алгебре понимать переменную величину, пробегающую некоторое множество чисел.

Мы уже отмечали, что определение функции, данное в этом учебнике, принадлежит великому русскому математику Н. И. Лобачевскому (1792—1856) и немецкому математику П. Дирихле (1805—1859).

Н. И. Лобачевский был профессором и ректором Казанского университета. Он создал новую геометрию, носящую теперь его имя. Однако Н. И. Лобачевский интересовался не только геометрией, он внёс также существенный вклад в математический анализ. Отвечая на вопрос, что такое функция, он дал следующее определение:

«Это общее понятие требует, чтобы функцией от $x$ называть число, которое даётся для каждого $x$ и вместе с $x$ постепенно изменяется. Значение функции может быть дано аналитическим выражением, или условием, которое подаёт средства испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной. Обширный вид теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одно с другим в связи, принимать как бы данными вместе».

Система координат даёт возможность изобразить функцию графически — в виде линии. И наоборот, может оказаться, что линия, изображённая в системе координат, есть график некоторой функции. Но тогда изучение линии может быть сведено к изучению соответствующей функции. Таким образом мы изучали прямую, параболу, гиперболу и в дальнейшем будем изучать другие линии.

Впервые метод координат к изучению геометрических вопросов применил французский математик и философ Р. Декарт (1596—1650). Это привело к созданию новой науки — аналитической геометрии. Например, графические методы решения линейных уравнений относятся к аналитической геометрии.

Слово «координаты» составлено из двух латинских слов: *co* (*cum*) — приставка, означающая «совместно», и *ordinatus*, что значит «упорядоченный», «определённый». Значит, координаты — это заданные совместно в определённом порядке числа.

Ещё учёные Вавилона (более 4000 лет назад) умели находить приближённое значение квадратного корня из любого натурального числа. Правило, применявшееся в Вавилоне, таково: чтобы вычислить корень из натурального числа $c$, его раскладывают на сумму $a^2 + b$ (число $a$ должно быть наибольшим, для которого $a^2 < c$), тогда квадратный корень из с приближённо вычисляют по формуле

$$\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Например:

$$\sqrt{1620} = \sqrt{40^2 + 20} \approx 40 + \frac{20}{2 \cdot 40} = 40 + \frac{1}{4} = 40{,}25.$$

Грекам был известен вавилонский метод приближённого нахождения квадратного корня. Например, у Герона Александрийского написано:

$$\sqrt{160} = \sqrt{144 + 16} \approx 12 + \frac{16}{2 \cdot 12} = 12\frac{2}{3}.$$

Существует и точный способ вычисления квадратного корня из числа, являющегося квадратом натурального числа. Он был известен в России ещё во времена Л. Ф. Магницкого (1669—1739).

Рассмотрим подробнее этот способ на примере вычисления арифметического квадратного корня из числа 65 536.

Цифры данного числа разобьём на пары (справа налево), получилось две полные и одна неполная пара. Это означает, что искомое число будет записано тремя цифрами. Найдём наибольшее натуральное число, квадрат которого не превосходит 6, — число 2. Это первая цифра искомого числа. Число 2 возведём в квадрат, полученный реа)

$$\sqrt{6'55'36} = 2\,.\,.$$

$$\begin{array}{l} \underline{4} \\ 255 \end{array}$$

б)

$$\sqrt{6'55'36} = 25\,.$$

$$\begin{array}{r|l} & \underline{4} \\ 45 & 255 \\ 5 & \underline{225} \\ & \quad 3036 \end{array}$$

в)

$$\sqrt{6'55'36} = 256$$

$$\begin{array}{r|r} & \underline{4} \\ 45 & 255 \\ 5 & \underline{225} \\ 506 & 3036 \\ 6 & \underline{3036} \\ & 0 \end{array}$$

**Рис. 34**

зультат вычтем из числа 6 и снесём следующую пару цифр 55 (рис. 34, *а*). Слева от числа 255 напишем удвоенное число 2 и припишем к нему такую цифру, чтобы при умножении полученного двузначного числа на эту цифру получилось наибольшее число, не превосходящее 255. Припишем 5, так как $45 \cdot 5 = 225 < 255$, а $46 \cdot 6 = 276 > 255$. Вторая цифра искомого результата 5. Вычислим разность $255 - 225 = 30$ и снесём следующую пару цифр 36 (рис. 34, *б*). Слева от числа 3036 напишем удвоенное число 25 и припишем к нему такую цифру, чтобы при умножении полученного трёхзначного числа на эту цифру получилось наибольшее натуральное число, не превосходящее 3036. Припишем 6, так как $506 \cdot 6 = 3036$. Третья цифра искомого результата 6 (рис. 34, *в*).

**Ответ:** $\sqrt{65536} = 256$.

Предложенный способ можно применять и для приближённого вычисления квадратных корней из натуральных чисел и десятичных дробей.


ГЛАВА 2

# Квадратные и рациональные уравнения

При работе с материалом главы 2 вам предстоит научиться решать квадратные и рациональные уравнения, а также применять их к решению текстовых задач. Это основные виды уравнений, которые будут использоваться при изучении алгебры, геометрии и других предметов.

## § 4. Квадратные уравнения

### 4.1. Квадратный трёхчлен

Многочлен относительно $x$

$$ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

где $a$, $b$, $c$ — данные числа и $a \neq 0$, называют **квадратным трёхчленом.** Число $a$ называют коэффициентом при $x^2$, число $b$ — коэффициентом при $x$, число $c$ — свободным членом квадратного трёхчлена.

Число $D = b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом квадратного трёхчлена** (1).

**Теорема 1**

Справедливо равенство

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right]. \tag{2}$$

**Доказательство.** Вынося за скобки число $a$ (по условию отличное от нуля) и выделяя в скобках полный квадрат, получаем

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2 \cdot x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right].$$

Отметим, что равенство (2) есть тождество, так как оно превращается в верное числовое равенство для любого числового значения $x$.

На практике обычно формулой (2) не пользуются, а в каждом конкретном случае повторяют рассуждения, используемые при доказательстве этой формулы.

Например:

а) $2x^2 + 4x + 34 = 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 17) = 2[(x+1)^2 + 16]$;

б) $3x^2 + 18x + 27 = 3(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 9) = 3(x+3)^2$;

в) $2x^2 - 4x - 16 = 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 8) = 2[(x-1)^2 - 9]$.

**Теорема 2**

Если дискриминант $D$ квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, то этот квадратный трёхчлен можно разложить на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{3}$$

где

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \tag{4}$$

**Доказательство.** В теореме 1 показано, что справедливо равенство (2). Так как $D > 0$, то существует квадратный корень из числа $D$ и выполняется равенство

$$\frac{D}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2.$$

Следовательно,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right]. \tag{5}$$

В квадратных скобках в правой части равенства (5) записана разность квадратов. Применив формулу разности квадратов, получим

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right] =$$

$$= a\left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)\right].$$

Но тогда, если обозначить

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

получим требуемое разложение (3).

Отметим, что равенство (3) есть тождество, так как оно превращается в верное числовое равенство для любого числового значения $x$.

Множители $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$ называют **линейными множителями**, поэтому разложение (3) часто называют **разложением квадратного трёхчлена на линейные множители.**

Отметим, что так как $D > 0$, то эти линейные множители разные.

**Пример.** Разложим на линейные множители квадратный трёхчлен

$$2x^2 - 3x + 1. \qquad (6)$$

Решение. Так как $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$, то согласно теореме 2 квадратный трёхчлен (6) можно разложить на линейные множители.

Вычислим числа $x_1$ и $x_2$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

### Теорема 3

Если дискриминант $D$ квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ равен нулю, то этот квадратный трёхчлен можно разложить на два одинаковых линейных множителя.

Доказательство. Как следует из теоремы 1, если $D = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Это равенство и означает, что квадратный трёхчлен разложен на два одинаковых линейных множителя.

### Теорема 4

Если дискриминант $D$ квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен, то этот трёхчлен отличен от нуля для любого значения $x$ и его нельзя разложить на линейные множители.

Доказательство. В самом деле, если $D < 0$, то $\frac{-D}{4a^2} > 0$, и так как $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ для любого $x$, то выражение в квадратных скобках в равенстве (2) положительно для любого $x$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-D}{4a^2}\right) > 0.$$

Умножим это неравенство на число $a$ ($a \neq 0$) и, используя равенство (2), получим для любого $x$:

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ если } a > 0,$$

и

$$ax^2 + bx + c < 0, \text{ если } a < 0.$$

Первое утверждение теоремы 4 доказано.

Второе утверждение докажем от противного.

Пусть дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен ($D < 0$) и этот трёхчлен можно записать в виде произведения $a(x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1$ и $x_2$ — действительные числа. Тогда при $x = x_1$ и при $x = x_2$ это произведение равно нулю, а значит, и сам трёхчлен равен нулю, что противоречит ранее доказанному. Следовательно, при условии $D < 0$ квадратный трёхчлен нельзя разложить на линейные множители.

Итак, квадратный трёхчлен:

**1) при $D > 0$ разлагается на два разных линейных множителя;**
**2) при $D = 0$ разлагается на два одинаковых линейных множителя;**
**3) при $D < 0$ не разлагается на линейные множители.**

**198.** Что называют квадратным трёхчленом? дискриминантом квадратного трёхчлена?

**199.** Приведите пример квадратного трёхчлена, дискриминант которого:
а) больше нуля; б) равен нулю; в) меньше нуля.

**200.** Назовите коэффициенты $a$, $b$, свободный член $c$ квадратного трёхчлена:
а) $3x^2 + 4x + 5$; б) $2x^2 - 5x - 7$; в) $-5x^2 + 3x - 1$;
г) $6x^2 + x - 2$; д) $x^2 - x + 7$; е) $-x^2 + x + 1$.

**201.** Составьте квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, если даны его коэффициенты и свободный член:
а) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$; б) $a = 5$, $b = -2$, $c = 6$;
в) $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$; г) $a = -1$, $b = 3$, $c = -2$.

**202.** Вычислите дискриминант квадратного трёхчлена:
а) $2x^2 + 5x + 3$; б) $2x^2 - 5x + 3$; в) $2x^2 + 5x - 3$;
г) $2x^2 - 5x - 3$; д) $x^2 - 4x + 5$; е) $x^2 + 6x + 9$;
ж) $x^2 + 2x + 1$; з) $-3x^2 + 5x - 2$; и) $x^2 + 2x + 2$.

**203.** Выделите полный квадрат:
а) $x^2 + 4x + 5$; б) $2x^2 - 6x + 5$; в) $x^2 - 8x + 17$;
г) $x^2 + 4x + 4$; д) $x^2 + 5x - 6$; е) $x^2 - 3x + 2$;

ж) $2x^2 - 8x + 7$; з) $-4x^2 + 4x - 3$; и) $3x^2 - 2x + 1$;
к) $3x^2 - 6x + 1$; л) $-2x^2 - 8x + 10$; м) $5x^2 - 10x - 1$.

**Например:**

$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 5 = (x - 2)^2 + 1;$

$2x^2 + 6x - 5 = 2(x^2 + 3x - 2{,}5) =$

$= 2\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2{,}5\right) = 2((x + 1{,}5)^2 - 4{,}75).$

**204.** Разлагается ли квадратный трёхчлен на линейные множители, если его дискриминант:
а) положителен; б) равен нулю; в) отрицателен?

**205.** Каким должен быть дискриминант квадратного трёхчлена, чтобы он разлагался на линейные множители:
а) разные; б) одинаковые?

**206.** Выясните, разлагается ли на линейные множители квадратный трёхчлен:
а) $x^2 - 4x + 3$; б) $x^2 - 4x + 4$; в) $x^2 - 4x + 5$;
г) $3x^2 - 4x + 1$; д) $5x^2 - 6x + 1$; е) $4x^2 + 4x + 2$.

**207.** Разложите на линейные множители квадратный трёхчлен:
а) $2x^2 - 5x + 3$; б) $3x^2 + 5x - 2$; в) $5x^2 - 2x - 3$;
г) $x^2 - 7x + 6$; д) $x^2 + 6x - 7$; е) $x^2 + x - 2$.

**Указание.** Воспользуйтесь равенством

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

**208.** Разложите квадратный трёхчлен на линейные множители, если это возможно (если нет, то укажите причину):
а) $x^2 + 8x + 15$; б) $4x^2 - 4x + 1$; в) $2x^2 - 3x + 4$.

**Доказываем (209—210).**

**209.** Докажите, что при любых значениях $x$ отличны от нуля значения квадратного трёхчлена:
а) $x^2 + x + 3$; б) $-x^2 + 4x - 5$; в) $x^2 + 2x + 2$;
г) $3x^2 - x + 1$; д) $-5x^2 + 2x - 10$; е) $-x^2 + 2x - 2$;
ж) $-x^2 + 5x - 7$; з) $x^2 + 6x + 10$; и) $4x^2 + 4x + 3$.

**Например:**

$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2 > 0$ при любых $x$;

$-x^2 - 4x - 5 = -(x^2 + 4x + 4 + 1) = -((x + 2)^2 + 1) < 0$ при любых $x$.

**210.** Докажите, что найдётся такое значение $x$, при котором значение квадратного трёхчлена $x^2 - 7x + 6$:
а) положительно; б) отрицательно; в) равно нулю.

## 4.2. Понятие квадратного уравнения

**Квадратным уравнением с неизвестным $x$** называют уравнение, левая часть которого есть квадратный трёхчлен относительно $x$, а правая — нуль.

Квадратное уравнение называют также **уравнением второй степени**.

Следующие уравнения

$$2x^2 - 3x - 7 = 0, \quad 2x^2 - 3 = 0, \quad x^2 - 4x = 0,$$
$$-x^2 + 11 = 0, \quad -5x^2 + 3x + 5 = 0$$

служат примерами квадратных уравнений с неизвестным $x$.

Рассмотрим квадратное уравнение с неизвестным $x$, записанное в общем виде:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

где $a$, $b$ и $c$ — данные числа и $a \neq 0$. Число $a$ называют коэффициентом при $x^2$, число $b$ — коэффициентом при $x$, число $c$ — свободным членом уравнения (1). Выражения $ax^2$, $bx$ и $c$ называются членами уравнения (1). Число $D = b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом квадратного уравнения** (1).

Так, в уравнении

$$2x^2 - 3x - 7 = 0$$

2 — коэффициент при $x^2$, $-3$ — коэффициент при $x$, $-7$ — свободный член, $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 65$ — его дискриминант; в уравнении

$$x^2 - 3 = 0$$

1 — коэффициент при $x^2$, 0 — коэффициент при $x$, $-3$ — свободный член, $D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 12$ — его дискриминант.

Напомним, что **корнем** (или **решением**) **уравнения** с неизвестным $x$ называют число, при подстановке которого в уравнение вместо $x$ получится верное числовое равенство.

Например, число 0 является корнем уравнения

$$2x^2 - 7x = 0,$$

ибо если подставить 0 вместо $x$, то получим верное числовое равенство

$$2 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 = 0.$$

**Решить уравнение — это значит найти все его корни или показать, что их нет.** В следующих пунктах будет показано, как надо решать квадратное уравнение, т. е. как находить его корни.

В дополнениях к главе 2 будут введены так называемые комплексные числа, тогда мы увидим, что уравнения, которые мы рассматриваем, всегда имеют корни. В одних случаях они являются действительными числами, в других — комплексными. Но сейчас речь о комплексных числах не идёт, и мы будем говорить, что данное уравнение не имеет корней, если оно не имеет действительных корней.

При решении уравнений приходится умножать или делить обе части уравнения на не равное нулю число, а также переносить члены уравнения из одной его части в другую. В результате будет получаться уравнение, **равносильное** прежнему, т. е. уравнение, имеющее те и только те корни, что и прежнее уравнение. Доказательство этих утверждений такое же, как и для линейных уравнений.

**211.** а) Какое уравнение называют квадратным уравнением?
б) Что называют дискриминантом квадратного уравнения?
в) Укажите среди следующих уравнений квадратные или равносильные квадратным:
1) $3x^2 - 2x + 1 = 0$; 2) $4 = x^2$;
3) $2x - 8 = 0$; 4) $x(x - 1) = 3$;
5) $\frac{1}{x} - 2 = 0$; 6) $x^2 + 3x = 0$;
7) $-0,5x + \sqrt{3}x^2 - 7 = 0$; 8) $12x - 3x^3 + 5 = 0$.

**212.** Для квадратных уравнений в задании 211, в) определите коэффициенты $a$, $b$ и свободный член $c$.

**213.** Назовите члены квадратного уравнения и коэффициенты при $x^2$, при $x$ и свободный член:
а) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; б) $x^2 - 5x + 1 = 0$;
в) $x^2 - 9 = 0$; г) $x^2 - 9x = 0$.

**214.** Составьте квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, если даны его коэффициенты и свободный член:
а) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$; б) $a = 3$, $b = -3$, $c = 1$;
в) $a = -1$, $b = 0,5$, $c = \frac{1}{3}$; г) $a = 5$, $b = 2$, $c = 0$;
д) $a = 1$, $b = 0$, $c = 7$; е) $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = -8$.

**215.** Вычислите дискриминант квадратного уравнения:
а) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; б) $x^2 + 5x + 1 = 0$;
в) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; г) $x^2 + x + 1 = 0$.

**216.** Проверьте, является ли число 0 корнем уравнения:
а) $x^2 - 5x = 0$; б) $x^2 + 1 = 0$;
в) $5x^2 - 6x + 1 = 0$; г) $x^2 - 5 = 0$;
д) $x^2 + x = 0$; е) $x^2 + 10x + 0,1 = 0$.

**217.** Проверьте, является ли хотя бы одно из чисел 1 или −1 корнем уравнения:
а) $x^2 + x = 0$; б) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
в) $x^2 - 4x + 4 = 0$; г) $x^2 - x = 0$;
д) $x^2 + 6x + 5 = 0$; е) $x^2 - 1 = 0$.

**218.** Выберите из чисел $-1$, $-\frac{1}{3}$, 0, 1, 2 корни уравнения:

а) $x^2 - x - 2 = 0$; б) $x^2 + x = 0$;
в) $3x^2 = -x$; г) $3x^2 + 5x = 2$;
д) $4x - 5 = -6 - 3x^2$; е) $2x + x^2 = -2 - x$.

**219.** Подберите хотя бы один корень уравнения:
а) $x^2 - 4 = 0$; б) $x^2 - 4x = 0$;
в) $3x^2 - 2x - 1 = 0$; г) $5x^2 - x - 6 = 0$.

**220.** Какие уравнения называют равносильными?

**221.** Равносильны ли уравнения:
а) $2x^2 = 5x$ и $2x^2 - 5x = 0$;
б) $7x^2 = 28$ и $x^2 = 4$;
в) $x^2 - 8x + 8 = 3x^2 - 8$ и $x^2 + 4x - 8 = 0$;
г) $(x - 1)(x + 5) = 2(x - 1)$ и $x + 5 = 2$;
д) $x^2 + 3x - 5 = x^2 + 4$ и $3x - 5 = 4$;
е) $(x - 2)x = x$ и $x - 2 = 1$?

## 4.3. Неполное квадратное уравнение

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

называют **неполным**, если у него или $b = 0$, или $c = 0$, или $b = c = 0$. В этом пункте рассматривается решение неполных квадратных уравнений.

**Пример 1.** Решим уравнение

$$x^2 = 0. \tag{1}$$

Существует только одно число 0, квадрат которого равен 0. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень $x_0 = 0$.

Неполное квадратное уравнение, у которого $b = c = 0$, т. е. уравнение

$$ax^2 = 0 \ (a \neq 0)$$

равносильно уравнению (1) и, следовательно, также имеет единственный корень $x_0 = 0$.

**Пример 2.** Решим уравнение

$$x^2 - 5 = 0. \tag{2}$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x^2 = 5.$$

Следовательно, нам надо найти все числа, квадраты которых равны числу 5. Таких чисел только два: $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$.

Таким образом, уравнение (2) имеет два корня: $x_1 = \sqrt{5}$ и $x_2 = -\sqrt{5}$ и других корней не имеет.

Но можно рассуждать иначе. Уравнение (2) можно записать в виде

$$x^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0$$

или в виде

$$\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) = 0,$$

откуда видно, что числа $x_1 = \sqrt{5}$ и $x_2 = -\sqrt{5}$ являются корнями уравнения (2). Других корней уравнение (2) не имеет, так как если в него вместо $x$ подставить любое число, отличное от $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$, то левая часть уравнения (2) будет отлична от 0.

**Пример 3.** Решим уравнение

$$x^2 + 7 = 0. \qquad (3)$$

Очевидно, что это уравнение не имеет корней. Ведь квадрат любого действительного числа $x_0$ неотрицателен, и, следовательно, $x_0^2 + 7$ есть положительное число. Другими словами, никакое действительное число $x_0$ не может быть корнем уравнения (3). Мы решили уравнение (3), а именно показали, что оно не имеет действительных корней.

Неполное квадратное уравнение, у которого $b = 0$, имеет вид

$$ax^2 + c = 0 \ (a \neq 0). \qquad (4)$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0. \qquad (5)$$

Ясно, что если $\frac{c}{a}$ есть число положительное, то, как и в примере 3, уравнение (5), а значит, и уравнение (4) не имеют корней.

Пусть теперь $\frac{c}{a}$ есть число отрицательное. Уравнение (5) равносильно уравнению

$$x^2 - \left(-\frac{c}{a}\right) = 0. \qquad (6)$$

Так как число $\left(-\frac{c}{a}\right)$ положительно, то уравнение (6), а значит, и уравнение (4) равносильны уравнению

$$\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0,$$

которое имеет два корня:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \ \text{и} \ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

и других корней не имеет.

При $c = 0$ уравнение (4), как мы знаем, имеет единственный корень $x_0 = 0$.

**Пример 4.** Решим уравнение

$$x^2 - 3x = 0. \qquad (7)$$

Перепишем уравнение (7) в виде

$$x(x - 3) = 0. \qquad (8)$$

Это уравнение имеет, очевидно, корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Других корней оно не имеет, ибо если в него подставить вместо $x$ любое число, отличное от 0 и 3, то в левой части уравнения (8) получится число, не равное 0.

Неполное квадратное уравнение, у которого $c = 0$, $b \neq 0$, имеет вид

$$ax^2 + bx = 0 \ (a \neq 0,\ b \neq 0). \qquad (9)$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x^2 + \frac{b}{a}x = 0. \qquad (10)$$

Так же, как и в примере 4, показывается, что уравнение (10), а значит, и уравнение (9) имеют два корня:

$$x_1 = 0 \ \text{ и } \ x_2 = -\frac{b}{a}$$

и других корней не имеют.

Приведённые примеры показывают, что квадратное уравнение может иметь один или два корня, а может и не иметь корней.

В следующем пункте мы увидим, что любое квадратное уравнение имеет либо два корня, либо один, либо не имеет корней.

**222.** Какое уравнение называют неполным квадратным уравнением?

**223.** Сколько корней может иметь неполное квадратное уравнение:
а) $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0,\ c \neq 0)$; б) $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$?

Решите уравнение (224—228):

**224.** а) $x^2 = 0$; б) $2x^2 = 0$;
в) $x(x - 1) = 0$; г) $(x + 3)x = 0$;
д) $x(x + 2) = 0$; е) $0{,}5x(2 + x) = 0$;
ж) $3x(x - 0{,}5) = 0$; з) $(x - 7)(7 + x) = 0$;
и) $3(x - 5)(5 + x) = 0$; к) $0{,}8(x + 1)(1 - x) = 0$.

**225.** а) $x^2 - 4x = 0$; б) $x^2 + 6x = 0$; в) $3x^2 + x = 0$;
г) $x^2 - 0{,}5x = 0$; д) $2x + 3x^2 = 0$; е) $x^2 - 2x = 0$;
ж) $7x^2 = 5x$; з) $3x = 11x^2$; и) $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$.

**226.** а) $x^2 - 1 = 0$; б) $x^2 - 9 = 0$; в) $x^2 - 25 = 0$;
г) $16 - x^2 = 0$; д) $49 - x^2 = 0$; е) $3 + x^2 = 0$;

ж) $4 - 2x^2 = 0$; з) $3 - 12x^2 = 0$; и) $7 = 28x^2$;
к) $\frac{1}{4} + x^2 = 0$; л) $x^2 - \frac{2}{9} = 0$.

**Например:**
$x^2 - 1{,}5 = 0$,
$x^2 - \left(\sqrt{1{,}5}\right)^2 = 0$,
$\left(x - \sqrt{1{,}5}\right)\left(x + \sqrt{1{,}5}\right) = 0$,
$x_1 = \sqrt{1{,}5}$, $x_2 = -\sqrt{1{,}5}$.
**Ответ:** $-\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{1{,}5}$.

**227.** а) $x^2 - 3 = 0$; б) $x^2 - 5 = 0$; в) $\frac{1}{3}x^2 - 1 = 0$;
г) $\frac{1}{5}x^2 - 10 = 0$; д) $4x^2 - 3 = 0$; е) $5x^2 + 2 = 0$;
ж) $x^2 = 2304$; з) $x^2 - 31{,}36 = 0$; и) $0{,}001x^2 = 40$.

**228.** а) $4x^2 + 6x = 7x^2 - 12x$; б) $1{,}2x - 0{,}5x^2 = 4x^2 - 0{,}8x$;
в) $0{,}76x^2 + 1{,}4x = 0$; г) $0{,}6x^2 + \sqrt{3}x = 0$;
д) $0{,}07x^2 - 50 = 2{,}1x - 50$; е) $9x^2 - 10x = 7x^2 - 15x$;
ж) $-0{,}5x^2 + \sqrt{5}x = 0$; з) $\frac{2}{3}x^2 = 5x$.

**229.** Запишите общий вид квадратного уравнения:
а) один корень которого равен нулю, а другой не равен нулю;
б) корни которого равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.
Как решается каждое из этих уравнений?

**230.** Запишите квадратное уравнение, корни которого:
а) 0 и 2; б) 0 и 4; в) 0 и 7;
г) 0 и $-8$; д) $-5$ и 5; е) $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{7}$;
ж) $-3$ и 3; з) $-1$ и 1; и) $-2$ и 2.

**231.** Решите уравнение:
а) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 2$;
б) $(x - 7)(x + 3) + (x - 1)(x + 5) + 26 = 0$;
в) $(3x - 8)^2 - (4x - 6)^2 + (5x - 2)(x + 2) = 24$;
г) $(2x - 5)(3x - 4) - (3x + 4)(x - 2) - 10x - 28 = 0$;
д) $(x + 2)(x + 3) = 2x(x + 6) + 6$.

**232.** Решите уравнение:
а) $(x - 1)^2 - 1 = 0$; б) $(x + 2)^2 - 4 = 0$;
в) $\frac{4x^2 - 1}{3} - \frac{3x^2 + 8}{5} = 1$; г) $\frac{5x^2 - 48}{8} - \frac{33 - 2x^2}{6} = 3\frac{5}{6}$;

д) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}$; е) $(3x+1{,}5)(3x-1{,}5)=54$;

ж) $\frac{3x^2-4x}{2}=\frac{5x^2-x}{3}$; з) $\frac{2x-3x^2}{5}-\frac{7x^2-x}{4}=\frac{x^2}{2}$.

**233.** а) При каких числовых значениях $m$ существуют корни уравнения $x^2+m=0$?
б) При каком числовом значении $k$ уравнение $10x^2+4x-k=0$ имеет корень 0?

**234.** а) Квадрат натурального числа равен утроенному этому же числу. Найдите такое число.
б) Квадрат числа в 2 раза меньше самого числа. Найдите это число.

**Исследуем** (235—236).

**235.** Решите уравнение относительно $x$ ($m$ и $n$ — данные числа):
а) $m^2x^2-n^2=0$; б) $m^2x^2-4=0$;
в) $mx^2-\frac{1}{m}=0$; г) $nx^2-\frac{m^2}{n}=0$.

**236.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение:
а) $ax^2-(a+1)x=0$; б) $ax^2+(a-1)x=0$
имеет единственный корень.

## 4.4. Решение квадратного уравнения общего вида

В этом пункте мы рассмотрим решение квадратного уравнения, записанного в общем виде:

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0). \qquad (1)$$

**Теорема 1**

Если дискриминант квадратного уравнения (1) положителен, то оно имеет два различных корня:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (2)$$

и других корней не имеет.

Доказательство. Как показано в п. 4.1 (теорема 2), если $D>0$, то для любого $x$ справедливо равенство

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где числа $x_1$ и $x_2$ определяются равенствами (2). Поэтому уравнение (1) можно записать в виде

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0\ (a\neq 0). \qquad (3)$$

Очевидно, что уравнение (3) имеет корни $x_1$ и $x_2$ и других корней не имеет, потому что если подставить в его левую часть вместо $x$ любое число, отличное от $x_1$ и $x_2$, то получится число, отличное от нуля. Теорема доказана.

**Теорема 2**

Если дискриминант квадратного уравнения (1) равен нулю, то оно имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и других корней не имеет.

Доказательство. Как показано в п. 4.1 (теорема 3), если $D = 0$, то для любого $x$ справедливо равенство

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2,$$

где $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Поэтому уравнение (1) можно записать в виде

$$a(x - x_0)^2 = 0 \ (a \neq 0). \quad (4)$$

Очевидно, что уравнение (4) имеет корень $x_0$ и других корней не имеет, потому что если подставить в его левую часть вместо $x$ любое число, отличное от $x_0$, то получится число, отличное от нуля. Теорема доказана.

**Теорема 3**

Если дискриминант квадратного уравнения (1) отрицателен, то оно не имеет корней.

Доказательство. Как показано в п. 4.1 (теорема 4), если $D < 0$, то для любого $x$ выполняется одно из неравенств:

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ если } a > 0,$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0, \text{ если } a < 0.$$

Это означает, что если $D < 0$, то не существует действительного числа, обращающего левую часть уравнения (1) в нуль, т. е. при $D < 0$ уравнение (1) не имеет действительных корней. Теорема доказана.

Итак, квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$:

**1) имеет два различных корня, если его дискриминант больше нуля;**
**2) имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю;**
**3) не имеет корней, если его дискриминант меньше нуля.**

**Замечание 1.** Если дискриминант уравнения (1) положителен, то формулы (2) для корней этого уравнения часто записывают в виде одной формулы

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \qquad (5)$$

понимая её как упрощённую форму записи двух формул (2).

**Замечание 2.** Если $D = 0$, то формула (5) остаётся справедливой. В этом случае она даёт единственный корень

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

или, как говорят, два совпадающих корня:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

В дальнейшем при решении квадратных уравнений мы не будем повторять приведённое выше рассуждение, а будем пользоваться формулой (5).

Вот несколько примеров.

**Пример 1.** Решим уравнение

$$3x^2 + 2x - 2 = 0. \qquad (6)$$

Вычислим дискриминант уравнения (6):

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 28 > 0.$$

Следовательно, уравнение (6) имеет два корня, которые вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3},$$

т. е. уравнение (6) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \text{ и } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}.$$

**Пример 2.** Решим уравнение

$$25x^2 - 30x + 9 = 0. \qquad (7)$$

Вычислим дискриминант уравнения (7):

$$D = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9 = 0.$$

Следовательно, уравнение (7) имеет единственный корень, который можно вычислить по формуле

$$x_0 = x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{30 \pm 0}{2 \cdot 25} = \frac{30}{50} = 0{,}6,$$

т. е. уравнение (7) имеет единственный корень 0,6, или, как говорят, два совпадающих корня:

$$x_1 = x_2 = 0{,}6.$$

**Пример 3.** Решим уравнение

$$2x^2 - 4x + 3 = 0. \qquad (8)$$

Вычислим дискриминант уравнения (8):

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -8 < 0.$$

Следовательно, уравнение (8) не имеет корней.

**Замечание.** Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют также корнями квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

**237.** Сколько корней имеет квадратное уравнение, если его дискриминант:
а) положителен; б) равен нулю; в) отрицателен?

**238.** По какой формуле можно найти корни квадратного уравнения, если его дискриминант неотрицателен?

**239.** Вычислите дискриминант и укажите число корней уравнения:
а) $x^2 - 10x + 21 = 0$; б) $x^2 - 2x + 2 = 0$;
в) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; г) $-2x^2 + 7x - 3 = 0$;
д) $4x - x^2 - 1 = 0$; е) $3 + 2x^2 - 7x = 0$;
ж) $\frac{x^2}{3} - 7x = 1$; з) $\frac{x^2}{2} - 3{,}5 = 2x$;
и) $x^2 = \frac{x}{2} - 1$; к) $4 - 4x + x^2 = 0$.

**240.** Решите уравнение:
а) $x^2 - 6x + 8 = 0$; б) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
в) $x^2 - x - 2 = 0$; г) $x^2 + x - 6 = 0$;
д) $x^2 + 4x + 15 = 0$; е) $x^2 + 4x + 4 = 0$;
ж) $5x^2 + 8x - 9 = 0$; з) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;
и) $3x^2 - 5x - 2 = 0$; к) $5x^2 - 6x + 1 = 0$.

**241.** Решите уравнение, предварительно приведя коэффициенты уравнения к целочисленному виду, умножив левую и правую части уравнения на одно и то же число:
а) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$; б) $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$;
в) $x^2 - 8 - \frac{x}{3} = 0$; г) $x^2 + \frac{x}{7} - 50 = 0$;
д) $x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$; е) $x^2 - 5\frac{1}{5}x + 1 = 0$.

Решите уравнение (242—246):

**242.** а) $2x^2 = 5 + 3x$; б) $-x^2 + 14x - 48 = 0$;
в) $-7x^2 + 2x = -329$; г) $x^2 + x - 5 = 0$;
д) $2x^2 - 17x - 9 = 0$; е) $7x^2 + 13x - 3 = 0$;
ж) $9x^2 - 20 = 24x$; з) $4x^2 - 4x = 15$.

**243.** а) $(x + 8)(x - 9) = -52$; б) $(x - 1)(2x + 3) = 7$;
в) $(x + 1)(x + 2) = (2x - 1)(2x - 10)$;
г) $(x - 1)(x - 2) = (3x + 1)(x - 2)$;
д) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6}$; е) $\frac{5(x^2-1)}{4} = \frac{x}{6} - 2$;
ж) $\frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} = \frac{3x-10}{4}$; з) $\frac{x-3}{4} + \frac{2x+3}{6} = \frac{x^2-11}{12}$.

**244.** а) $(x + 3)(x - 2) + (x + 2)^2 = 3x + 10$;
б) $(x - 5)^2 + (3 - x)^2 - 4(x + 5)(3 - x) - 48 = (x + 1)^2$;
в) $(x - 1)(x - 3) + (x + 3)(x - 5) + 2x = 4$;
г) $8x^2 + 11 + \frac{x}{7} = \frac{1-5x}{7}$; д) $1{,}2x^2 - 0{,}8x - 3{,}1 = 0$.

**245.** а) $x^2 + 6x + 8 = 0$; б) $x^2 - 10x + 9 = 0$;
в) $x^2 - 3x = 1{,}75$; г) $x^2 + x = 2$;
д) $x^2 - 6x + 6 = 0$; е) $x^2 + 8x + 2 = 0$;
ж) $x^2 - 3x + 1 = 0$; з) $x^2 - 5x - 1 = 0$;
и) $x^2 + 8x + 15 = 0$; к) $x^2 + 5x - 6 = 0$.

**246.** а) $3x^2 - 4x - 4 = 0$; б) $2x^2 - 8x - 20 = 0$;
в) $4x^2 + 6x + 9 = 0$; г) $4x^2 + 12x + 9 = 0$;
д) $16x^2 + 21x - 22 = 0$; е) $18x^2 - x - 1 = 0$;
ж) $7x^2 - x - 1 = 0$; з) $14x^2 + 11x - 3 = 0$.

**247.** **Доказываем.** Докажите, что корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ при $D \geqslant 0$ можно вычислять по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ где } \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

Решите по этой формуле уравнение:
а) $x^2 - 8x + 7 = 0$; б) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
в) $x^2 + 2x - 3 = 0$; г) $3x^2 - 10x + 8 = 0$;
д) $8x^2 - 10x + 3 = 0$; е) $24x^2 - 10x + 1 = 0$;
ж) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; з) $5x^2 + 8x + 3 = 0$.

**Исследуем** (248—251).

**248.** Найдите все значения $m$, при каждом из которых уравнение:
а) $x^2 + mx + 3 = 0$; б) $2x^2 - mx - 2 = 0$;
в) $3x^2 - 2x + m = 0$; г) $x^2 = mx + m$
имеет два совпадающих корня.

**249.** Решите уравнение:
а) $ax^2 - 2x + 1 = 0$, если число $a$ таково, что $a \leqslant 1$ и $a \neq 0$;
б) $x^2 - 4x + 4a = 0$, если число $a$ таково, что $a \leqslant 1$.

**250.** При каких значениях $a$ уравнение $x^2 + 2x + a = 0$:
а) имеет два различных корня;
б) имеет единственный корень;
в) не имеет корней?

**251.** Решите уравнение для каждого действительного числа $a$:
а) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$; б) $ax^2 - 2x + 1 = 0$;
в) $x^2 - 4x + 4a = 0$; г) $x^2 - 2x + a = 0$.

Решите уравнение (**252—254**):

**252.** а) $|x^2 - 5x + 2| = 2$;
б) $|x^2 - 4x - 1| = 4$;
в) $|x^2 - 4x + 1| = |x^2 - 3x - 10|$;
г) $|x^2 - 7x + 2| = |x^2 - 2x - 13|$.

**253.** а) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0$; б) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0$;
в) $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 0$; г) $\sqrt{2x^2 - 3x + 9} = 0$.

**254.** а) $\sqrt{x^2 + 3x - 3} = 1$; б) $\sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2$;
в) $\sqrt{x^2 - 6x + 18} = 3$; г) $\sqrt{x^2 + 5x + 22} = 4$;
д) $\sqrt{x^2 - 6x + 21} = -4$; е) $\sqrt{x^2 - 10x - 2} = -3$.

## 4.5. Приведённое квадратное уравнение

**Квадратное уравнение с коэффициентом 1 при $x^2$ называют приведённым квадратным уравнением.**

Следующие уравнения

$$x^2 - 2x + 7 = 0, \quad x^2 = 0,$$
$$x^2 - 5 = 0, \quad x^2 - 3x = 0$$

служат примерами приведённых квадратных уравнений.

Приведённое квадратное уравнение в общем виде обычно записывают так:

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0,} \tag{1}$$

где $p$ и $q$ — данные числа. Число $p$ — коэффициент при $x$, а $q$ — свободный член.

Таким образом, уравнение (1) можно рассматривать как частный случай квадратного уравнения общего вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2}$$

где $a = 1$, $b = p$, $c = q$.

Дискриминант уравнения (1) равен:

$$D = b^2 - 4ac = p^2 - 4q. \qquad (3)$$

Пусть $D > 0$, тогда уравнение (1) имеет два корня, вычисляемые по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}. \qquad (4)$$

Пусть теперь $D = 0$, тогда уравнение (1) имеет единственный корень, или, как говорят, два совпадающих корня:

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}. \qquad (5)$$

Если же $D < 0$, то уравнение (1) не имеет действительных корней.

Часто в случае приведённого уравнения (1) вместо дискриминанта $D$ рассматривается выражение $\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. При этом формулу корней приведённого квадратного уравнения (4) записывают так:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}. \qquad (6)$$

Так как выражение $\frac{D}{4}$ имеет тот же знак, что и $D$, то:

1) если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, то уравнение (1) имеет два корня, вычисляемые по формуле (6);

2) если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, то уравнение (1) имеет два совпадающих корня, вычисляемые по той же формуле (6) или, что всё равно, по формуле (5);

3) если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, то уравнение (1) не имеет корней.

**Пример.** Решим уравнение $x^2 - 8x + 7 = 0$.

Вычислим $\frac{D}{4}$:

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-4)^2 - 7 = 9 > 0.$$

Уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}} = 4 \pm \sqrt{9} = 4 \pm 3; \; x_1 = 1, \; x_2 = 7.$$

**255.** Какое уравнение называют приведённым квадратным уравнением?

**256.** По какой формуле можно найти корни приведённого квадратного уравнения, если его дискриминант неотрицателен?

Решите уравнение **(257—259)**:

**257.** а) $x^2 - 6x + 8 = 0$; б) $x^2 - 2x - 15 = 0$;
в) $x^2 + 6x + 8 = 0$; г) $x^2 + 2x - 15 = 0$;
д) $x^2 + 20x + 51 = 0$; е) $x^2 - 22x - 23 = 0$;
ж) $x^2 - 20x - 69 = 0$; з) $x^2 + 22x + 21 = 0$.

**258.** а) $x^2 - 4x + 4 = 0$; б) $x^2 - 8x + 20 = 0$;
в) $x^2 - 2x + 1 = 0$; г) $x^2 + 4x + 3 = 0$;
д) $x^2 + 16x + 48 = 0$; е) $x^2 - 9x - 22 = 0$;
ж) $x^2 + 8x + 71 = 0$; з) $x^2 + 12x + 40 = 0$.

**259.** а) $x^2 - x - 2 = 0$; б) $x^2 - 5x - 24 = 0$;
в) $x^2 - 3x + 2 = 0$; г) $x^2 - 13x + 42 = 0$;
д) $x^2 + x - 2 = 0$; е) $x^2 - x - 6 = 0$;
ж) $x^2 + 13x + 22 = 0$; з) $x^2 + 17x + 66 = 0$.

**260. Доказываем.** Докажите, что если $q < 0$, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных корня.

## 4.6. Теорема Виета

Пусть дано приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0. \qquad (1)$$

**Теорема Виета**

Если приведённое квадратное уравнение (1) имеет неотрицательный дискриминант, то сумма корней этого уравнения равна коэффициенту при $x$, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.


*Ф. Виет*

Иначе говоря, если $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения (1), то

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q. \qquad (2)$$

Формулы (2) называют **формулами Виета** в честь французского математика Ф. Виета (1540—1603).

**Замечание 1.** Подчеркнём, что здесь при $D = 0$ подразумевается, что уравнение (1) имеет два совпадающих корня.

Доказательство. Корни уравнения (1) при неотрицательном дискриминанте вычисляются по формулам

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{3}$$

Сложив равенства (3), получим

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = -p.$$

Перемножив равенства (3) и применив формулу разности квадратов, получим

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) =$$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Теорема Виета доказана.

Справедлива также **теорема, обратная теореме Виета.**

Если для чисел $x_1$, $x_2$, $p$, $q$ справедливы формулы (2), то $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения (1).

Действительно, пользуясь формулами (2), преобразуем выражение

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + px + q.$$

Теперь видно, что числа $x_1$ и $x_2$ обращают в нуль выражение $x^2 + px + q$, следовательно, $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

**Замечание 2.** Теорему Виета можно сформулировать и для квадратного уравнения общего вида

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0), \tag{4}$$

используя его равносильность приведённому уравнению

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

*Если квадратное уравнение общего вида* (4) *имеет неотрицательный дискриминант и если $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения* (4), *то*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема Виета и теорема, обратная ей, часто применяются при решении различных задач.

**Пример 1.** Напишем приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа 1 и –3.

Иначе говоря, найдём числа $p$ и $q$, такие, чтобы уравнение $x^2 + px + q = 0$ имело корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$.

По формулам Виета

$$-p = x_1 + x_2 = -2,$$
$$q = x_1x_2 = -3.$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

**Пример 2.** Не решая уравнения

$$x^2 - 364x + 497 = 0, \qquad (5)$$

определим знаки его корней.

Дискриминант этого уравнения положителен, так как

$$\frac{D}{4} = 182^2 - 497 > 0.$$

Значит, уравнение имеет два корня: $x_1$ и $x_2$. По теореме Виета $x_1x_2 = 497$, т. е. произведение корней положительно. Корни имеют одинаковые знаки: либо $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, либо $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$.

Но по теореме Виета $x_1 + x_2 = 364$, т. е. сумма корней также положительна. Следовательно, уравнение (5) имеет два положительных корня.

**Пример 3.** Вычислим значение выражения $x_1^2 + x_2^2$, где $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения

$$x^2 - 3x + 1 = 0. \qquad (6)$$

Вычислим дискриминант $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5$. Уравнение (6) действительно имеет два корня, но вычислять их для решения задачи не нужно. Преобразуем выражение

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Так как $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то

$$x_1^2 + x_2^2 = (-p)^2 - 2q = 3^2 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7.$$ ●

**261.** Сформулируйте:
а) теорему Виета; б) теорему, обратную теореме Виета.

**262.** Запишите формулы Виета.

**263.** **Доказываем.** Для неприведённого квадратного уравнения докажите:
а) теорему Виета;
б) теорему, обратную теореме Виета.

**264.** Определите, имеет ли корни уравнение:

а) $x^2 - x + 1 = 0$; б) $x^2 + x + 3 = 0$;

в) $x^2 + 3x - 2 = 0$; г) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

д) $x^2 - 2x + 1 = 0$; е) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Если имеет, то укажите их сумму и произведение.

**265.** Составьте приведённое квадратное уравнение, если известны сумма $L$ и произведение $K$ его корней:

а) $L = 3$, $K = -28$; б) $L = -3$, $K = -18$;

в) $L = -3{,}5$, $K = 2{,}5$; г) $L = \frac{5}{6}$, $K = \frac{1}{6}$;

д) $L = 0$, $K = -9$; е) $L = 4$, $K = 4$.

**266.** Составьте приведённое квадратное уравнение, если известны его корни:

а) 1 и 5; б) −2 и 3; в) 4 и 6; г) −3 и −6;

д) 0,5 и 4; е) 1,2 и −5; ж) 1 и −1; з) 5 и 5.

**Например:** $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

$p = -(2 + 3) = -5$, $q = 2 \cdot 3 = 6$,

т. е. искомое уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$.

**267.** Составьте квадратное уравнение, если известны его корни:

а) 2 и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$ и 5; в) $\sqrt{7}$ и $-\sqrt{7}$;

г) 0 и 5; д) $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$; е) $2 - \sqrt{5}$ и $2 + \sqrt{5}$.

**268.** Не решая уравнения, определите знаки его корней.

а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $x^2 + 7x + 12 = 0$;

в) $x^2 + 5x - 14 = 0$; г) $x^2 - 5x - 14 = 0$;

д) $x^2 + 1{,}27x - 1{,}46 = 0$; е) $x^2 - \frac{3}{5}x - 0{,}5 = 0$;

ж) $x^2 - 56x + 768 = 0$; з) $x^2 - 20x - 684 = 0$;

и) $x^2 = -377x - 31\,242$; к) $x^2 + 272x = 49\,104$.

**269.** Укажите сумму и произведение корней квадратного уравнения (если они существуют):

а) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; б) $3x^2 + x + 4 = 0$;

в) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$; г) $1{,}4x^2 - 3x + \frac{5}{7} = 0$;

д) $0{,}1x^2 - 8x + 4{,}2 = 0$; е) $3x^2 + 1{,}1x - 0{,}4 = 0$.

**270.** Составьте приведённое квадратное уравнение, имеющее два совпадающих корня, равные 3.

**271.** Один из корней уравнения равен 2. Найдите второй корень уравнения, не решая его:

а) $x^2 + 5x - 14 = 0$; б) $x^2 - 13x + 22 = 0$;

в) $x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$; г) $x^2 - 1\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0$.

**272.** Объясните, почему уравнение:
а) $5x^2 - 8x - 284 = 0$ не имеет корней одного знака;
б) $17x^2 - 7x + 354 = 0$ не имеет корней разных знаков.

**273.** Известно, что $x_1$ — корень уравнения:
а) $2x^2 + 16x + a = 0$, $x_1 = 3$;
б) $3x^2 + ax - 72 = 0$, $x_1 = 8$.
Определите второй корень уравнения и число $a$.

**274.** Составьте квадратное уравнение, корни которого:
а) равны соответственно сумме и произведению корней уравнения $3x^2 + 2x - 15 = 0$;
б) больше корней уравнения $3x^2 - 11x + 2 = 0$ на единицу;
в) меньше корней уравнения $2x^2 - 13x + 3 = 0$ в два раза.

**275.** Числа $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $x^2 - 2000x + 1999 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корни которого $-x_1$ и $-x_2$.

**276.** Решите устно квадратное уравнение:
а) $x^2 + 2000x - 2001 = 0$; б) $x^2 - 2000x - 2001 = 0$;
в) $x^2 - 2001x + 2000 = 0$; г) $x^2 + 2001x + 2000 = 0$.

**277.** Уравнение $x^2 + 3x - 1 = 0$ имеет два корня $x_1$ и $x_2$. Вычислите:
а) $x_1 + x_2$; б) $x_1 \cdot x_2$; в) $(x_1 + x_2)^2$;
г) $x_1^2 + x_2^2$; д) $x_1^3 + x_2^3$; е) $(x_1 - x_2)^2$.

**278.** Уравнение $x^2 - 2x - 5 = 0$ имеет два корня $x_1$ и $x_2$. Вычислите:
а) $x_1 + x_2$; б) $x_1 \cdot x_2$; в) $(x_1 + x_2)^2$;
г) $x_1^2 + x_2^2$; д) $x_1^3 + x_2^3$; е) $(x_1 - x_2)^2$.

**279.** **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о Ф. Виете и его формулах для корней уравнений второй и третьей степеней.

## 4.7. Применение квадратных уравнений к решению задач

**Задача 1.** Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел больше произведения этих чисел на 57. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим меньшее из искомых чисел через $x$, тогда большее будет $(x + 1)$. По условию задачи

$$x^2 + (x + 1)^2 - x(x + 1) = 57. \qquad (1)$$

Таким образом, искомое число $x$ должно быть корнем уравнения (1). Перенеся все члены уравнения (1) в левую часть, после преобразований получим уравнение

$$x^2 + x - 56 = 0, \qquad (2)$$

равносильное уравнению (1). Так как дискриминант уравнения $D = 1 - 4 \cdot (-56) = 225 > 0$, то корни квадратного уравнения (2) вычисляются по формуле

$$x_{1,\,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-1 \pm 15}{2}.$$

Следовательно, уравнение (2) и равносильное ему уравнение (1) имеют корни

$$x_1 = 7,\; x_2 = -8. \qquad (3)$$

Так как нам надо найти *натуральное* число $x$, удовлетворяющее уравнению (1), то из этих двух корней условию задачи удовлетворяет лишь $x_1 = 7$.

Итак, $x = 7$, $x + 1 = 8$.

Ответ. 7 и 8.

**Задача 2.** Предмет первоначально стоил 25 р. После того как цена была снижена дважды, он стал стоить 18 р. При этом процент снижения во второй раз был в два раза больше, чем в первый раз. На сколько процентов снижалась цена каждый раз?

Решение. Пусть в первый раз цена предмета снизилась на $x$ %. Это значит, что после первого снижения цены предмет стал стоить

$$25 - 25 \cdot \frac{x}{100} = 25 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) \text{ р.}$$

Во второй раз цена предмета снизилась на $2x$ %. Это значит, что после второго снижения цены предмет стал стоить

$$25\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{2x}{100}\right) \text{ р.}$$

По условию задачи после двух снижений цен предмет стал стоить 18 р. Следовательно, искомое число должно быть корнем уравнения

$$25\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{2x}{100}\right) = 18. \qquad (4)$$

Перенеся все члены уравнения (4) в левую часть, умножив это уравнение на 200 и раскрыв скобки, получим уравнение

$$x^2 - 150x + 1400 = 0. \qquad (5)$$

Решив уравнение (5), найдём его корни $x_1 = 10$ и $x_2 = 140$. Так как уравнения (5) и (4) равносильны, то уравнение (4) имеет те же корни $x_1 = 10$ и $x_2 = 140$.

Поскольку снизить цену предмета на 140 % нельзя, то условию задачи удовлетворяет лишь корень $x_1 = 10$.

Итак, $x = 10$, $2x = 20$.

Ответ: цену снизили на 10 %, затем на 20 %.

**280.** а) Разложите число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых было равно 21.
б) Разложите число 14 на два слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых было равно 36,75.

**281.** а) Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 110. Найдите эти числа.
б) Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 210. Найдите эти числа.

**282.** а) Произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 7 больше другого, равно 44. Найдите эти числа.
б) Произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 12 меньше другого, равно 448. Найдите эти числа.

**283.** а) Найдите два числа, сумма которых равна 20, а сумма их квадратов равна 218.
б) Найдите два числа, сумма которых равна –2, а сумма их квадратов равна 34.

**284.** а) Одна из цифр двузначного числа[1] на 2 больше другой, а сумма квадратов этого числа и числа, полученного от перестановки его цифр, равна 4034. Найдите это число.
б) Найдите двузначное число, если цифра единиц этого числа на 4 меньше цифры его десятков и произведение числа на сумму его цифр равно 306.

**285.** а) Если периметр квадрата уменьшить на 40, то его площадь уменьшится в $1\frac{7}{9}$ раза. Определите периметр первоначального квадрата.
б) Прямоугольник, одна сторона которого на 11 м больше другой, преобразован в равновеликий (т. е. имеющий такую же площадь) прямоугольник, у которого большая сторона стала равной 10 м, а меньшая сторона увеличилась на 2 м. Определите площадь и стороны прямоугольника.
в) Возможен ли такой прямоугольный треугольник, стороны которого выражаются тремя последовательными натуральными числами? тремя последовательными чётными числами? тремя последовательными нечётными числами?
г) В каком выпуклом многоугольнике число сторон равно числу его диагоналей?

**286.** а) Выпускники одного класса решили после окончания школы обменяться фотографиями — каждый с каждым. Сколько выпускников было в классе, если всего было роздано 930 фотографий?

---

[1] Двузначное число принято обозначать $\overline{ab} = 10a + b$ $(a \neq 0)$. Аналогично $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ и т. д. $(a \neq 0)$.

б) Несколько человек при встрече приветствовали друг друга рукопожатиями. Сколько человек встретились, если всего рукопожатий было 21?

**287.** а) Высота прямоугольника составляет 75% его основания. Найдите периметр этого прямоугольника, если его площадь равна 48 м$^2$.
б) От листа жести, имеющего форму квадрата, отрезали полосу шириной 3 см, после чего площадь оставшейся части листа стала равной 10 см$^2$. Определите первоначальные размеры листа жести.

**288.** Оптовый склад покупает товар по 800 р. и продаёт его, повысив цену на некоторое число процентов. Магазин покупает тот же товар на оптовом складе и продаёт его, повысив цену на число процентов, в 1,5 раза большее, чем оптовый склад. В результате цена товара в магазине составляет 1248 р. На сколько процентов увеличивает цену оптовый склад? магазин?

**289.** Цена товара составляла 500 р. После двух повышений цены товар стоил 546 р. Известно, что во второй раз цена увеличилась на число процентов, меньшее на 1, чем в первый раз. На сколько процентов увеличилась цена в первый раз? во второй раз?

# § 5. Рациональные уравнения

## 5.1. Понятие рационального уравнения

Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно $x$, называют **рациональным уравнением с неизвестным $x$**.

Например, уравнения

$$5x^6 - 9x^5 + 4x^2 - 3x + 1 = 0, \quad \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = 1 + x, \quad \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{5x^3 - 2}{x^4 + 3}$$

являются рациональными.

Выражение, являющееся слагаемым правой или левой части уравнения, называют **членом уравнения**.

Например, членами уравнения $\frac{5x^2}{x^2+1} + x - 2 = \frac{x-3}{x^4-1}$ являются выражения $\frac{5x^2}{x^2+1}$, $x$, $-2$, $\frac{x-3}{x^4-1}$.

Напомним, что **корнем** (или решением) уравнения с неизвестным $x$ называют число, при подстановке которого в уравнение вместо $x$ получается верное числовое равенство. **Решить уравнение** — значит найти все его корни или показать, что их нет.

При решении рациональных уравнений приходится умножать или делить обе части уравнения на не равное нулю число, переносить члены уравнения из одной его части в другую (с противоположным знаком), применять правила сложения и вычитания алгебраических дробей. В результате будет получаться уравнение, равносильное предшествующему, т. е. уравнение, имеющее те же корни и только их.

В этом параграфе будет рассмотрено несколько типов рациональных уравнений, решение которых сводится к решению уравнений первой и второй степени.

**290.** а) Какое уравнение называют рациональным с неизвестным $x$?

б) Что называют корнем уравнения с неизвестным $x$?

в) Что значит решить уравнение?

г) Какие уравнения называют равносильными?

**291.** Является ли рациональным уравнение:

а) $1 - 3x = 0$;

б) $\frac{1}{2}x - (5 - x) \cdot 0,2 = 4x - \frac{1}{4}$;

в) $3x^2 = 7$;

г) $12 - \frac{x^2}{3} = (1 - x)x$;

д) $\frac{x^2 - 6}{2} = 1 - \frac{x^3}{4}$;

е) $\frac{3}{x} + 5 = 3 - \frac{7}{x + 13}$;

ж) $\sqrt{x} = 2$;

з) $\sqrt{x - 8} = 24$;

и) $\sqrt{7}x + 8 = \sqrt{12\frac{1}{3}}$;

к) $\frac{x}{\sqrt{3}} - 2x^2 = 147$?

**292.** Является ли указанное число корнем уравнения:

а) $2;\ 3x - \frac{x - 5}{3} = x + 5$;

б) $-0,1;\ 3(x - 8) = 4 - 2(x - 1)$;

в) $3;\ x^2 + 4x - 28 = 0$;

г) $\frac{1}{4};\ \frac{x^2 - x}{x - 3} - 1 = \frac{13 + 2x}{10}$;

д) $-2;\ \frac{3x^2 - x^3}{5} = 6 + 2(x + 1)$;

е) $-10;\ x^5 + 3x^4 = 7x^3 + 7700$;

ж) $1;\ \frac{x^2 + x}{x - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}$;

з) $-1;\ \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{2}{x + 1}$?

**293.** Равносильны ли уравнения:

а) $x + 2 = 3$ и $x + 5 = 6$;

б) $12x = 7$ и $1,2x = 0,7$;

в) $2x = 4$ и $24x - 7 = 41$;

г) $x - 1 = 3$ и $\frac{x^2 - x}{5} = \frac{3x}{5}$;

д) $\frac{x^2 + x}{x - 1} = 0$ и $\frac{x + 1}{x - 1} = 0$;

е) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$ и $x + 1 = 0$;

ж) $3x - 1 + 5x = x - 12$ и $7x = -11$;

з) $1\frac{1}{3}x^2 - x + 8 = 0$ и $x^2 - 0,75x + 6 = 0$?

## 5.2. Биквадратное уравнение

**Уравнение**

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad (1)$$

**где $a$, $b$ и $c$ — данные числа и $a \neq 0$, называют биквадратным уравнением с неизвестным $x$.**

Чтобы решить уравнение (1), делают замену неизвестного

$$y = x^2. \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) превращается в квадратное уравнение

$$ay^2 + by + c = 0 \qquad (3)$$

с неизвестным $y$.

Если уравнение (3) не имеет корней, то и данное уравнение (1) не имеет корней.

Если же уравнение (3) имеет корни, то, подставив каждый из них в равенство (2) вместо $y$, получим уравнения относительно $x$. Решения полученных уравнений, если они существуют, и являются решениями уравнения (1). Других решений уравнение (1) не имеет.

**Пример 1.** Решим уравнение

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) после замены неизвестного $y = x^2$ превращается в квадратное уравнение $y^2 - 4y + 3 = 0$.

Так как $\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 3 > 0$, то оно имеет два корня: $y_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}} = 2 \pm 1$, т. е. $y_1 = 1$ и $y_2 = 3$.

Подставив эти числа вместо $y$ в равенство $y = x^2$, получим уравнения относительно $x$:

$$1 = x^2 \text{ и } 3 = x^2.$$

Решив их, найдём четыре корня уравнения (4):

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \sqrt{3},\ x_4 = -\sqrt{3}.$$

Других корней уравнение (4) не имеет.

**Пример 2.** Решим уравнение

$$x^4 - 2x^2 - 2 = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) после замены неизвестного $y = x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$y^2 - 2y - 2 = 0.$$

Так как $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 3 > 0$, то оно имеет два корня: $y_1 = 1 + \sqrt{3}$ и $y_2 = 1 - \sqrt{3}$.

Подставив $y_1$ в равенство $y = x^2$ вместо $y$, получим уравнение

$$1 + \sqrt{3} = x^2,$$

откуда найдём два корня уравнения (5):

$$x_1 = \sqrt{1+\sqrt{3}},\ x_2 = -\sqrt{1+\sqrt{3}}.$$

Подставив $y_2$ в равенство $y = x^2$ вместо $y$, получим уравнение

$$1 - \sqrt{3} = x^2,$$

не имеющее корней, потому что $1 - \sqrt{3} < 0$.

Таким образом, уравнение (5) имеет два найденных выше корня $x_1$ и $x_2$ и других корней не имеет.

**Пример 3.** Решим уравнение

$$2x^4 - 3x^2 + 5 = 0. \qquad (6)$$

Уравнение (6) после замены неизвестного $y = x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$2y^2 - 3y + 5 = 0.$$

Его дискриминант $D = b^2 - 4ac = 9 - 40 = -31 < 0$, и, следовательно, оно не имеет корней.

Но тогда уравнение (6) также не имеет корней.

**Пример 4.** Решим уравнение

$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) после замены неизвестного $y = x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$9y^2 - 6y + 1 = 0$$

с дискриминантом $D = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$. Оно имеет единственный корень

$$y_0 = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Решив уравнение $\frac{1}{3} = x^2$, найдём два корня уравнения (7):

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Других корней уравнение (7) не имеет.

**Пример 5.** Решим уравнение

$$x^4 + 10x^2 + 25 = 0. \qquad (8)$$

Уравнение (8) после замены неизвестного $y = x^2$ превращается в квадратное уравнение

$$y^2 + 10y + 25 = 0,$$

для которого $\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 25 - 25 = 0$. Оно имеет, таким образом, единственный корень $y_0 = -5 \pm 0 = -5$.

Подставив $y_0$ вместо $y$ в равенство $y = x^2$, получим уравнение

$$x^2 = -5,$$

которое не имеет корней. Значит, уравнение (8) также не имеет корней.

Отметим, что уравнение $x^4 = 0$ имеет один корень $x_0 = 0$, а уравнение $x^4 - x^2 = 0$ имеет три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

**Замечание.** Из рассмотренных примеров видно, что биквадратное уравнение может иметь четыре, три, два или один корень, но может и не иметь корней.

**294.** а) Какое уравнение называют биквадратным уравнением? Как решают биквадратное уравнение?
б) Сколько корней может иметь биквадратное уравнение?

**295.** Представьте выражение в виде квадрата:
а) $x^4$; б) $a^6$; в) $y^8$; г) $m^{10}$.

**296.** Какую замену неизвестного необходимо выполнить, чтобы уравнение стало квадратным:
а) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$; б) $m^4 - 3 + 2m^2 = 0$;
в) $4y^2 - 7y^4 = 0$; г) $15 - x^4 + 2x^2 = 0$;
д) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$; е) $y^8 - 4 = 0$?

Решите уравнение (297—299):

**297.** а) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$; б) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
в) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; г) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$;
д) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$; е) $x^4 + 20x^2 + 64 = 0$;
ж) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$; з) $4x^4 - 41x^2 + 100 = 0$;
и) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$; к) $25x^4 - 25x^2 + 6 = 0$.

**298.** а) $a^4 + 2a^2 - 8 = 0$; б) $y^4 + 9y^2 = 400$;
в) $k^4 = 12k^2 + 64$; г) $m^4 = 21m^2 + 100$;
д) $n^4 - 2n^2 + 1 = 0$; е) $9x^4 - 24x^2 + 16 = 0$;
ж) $6c^4 - 35 = 11c^2$; з) $10p^4 - 21 = p^2$.

**299.** а) $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$; б) $x^4 - 14x^2 - 15 = 0$;
в) $25x^4 + 30x^2 + 9 = 0$; г) $7x^4 - 9x^2 + 3 = 0$;
д) $9x^4 = 9x^2 - 1$; е) $x^4 = 30x^2 - 36$;
ж) $4x^4 = 5x^2 + 6$; з) $x^4 - x^2 - 4 = 0$;
и) $3 - 2x^4 = 11x^2$; к) $3x^4 + 21 = 4x^2$.

## 5.3. Распадающееся уравнение

**Пример 1.** Решим уравнение

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + x - 2) = 0. \qquad (1)$$

Если число $x_0$ есть корень уравнения (1), то, подставляя $x_0$ вместо $x$ в уравнение (1), получим верное числовое равенство

$$(x_0^2 - 5x_0 + 6)(x_0^2 + x_0 - 2) = 0. \qquad (2)$$

Но произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, поэтому верно хотя бы одно из числовых равенств $x_0^2 - 5x_0 + 6 = 0$ или $x_0^2 + x_0 - 2 = 0$. Следовательно, число $x_0$ есть корень хотя бы одного из уравнений

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad (3)$$

или

$$x^2 + x - 2 = 0. \qquad (4)$$

С другой стороны, любой корень любого из уравнений (3) и (4) является корнем уравнения (1).

Таким образом, множество всех корней уравнения (1) состоит из всех корней уравнения (3) и всех корней уравнения (4).

Уравнение (3) имеет корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, а уравнение (4) имеет корни $x_3 = -2$ и $x_4 = 1$. Следовательно, уравнение (1) имеет корни $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$ и других корней не имеет.

Уравнение вида $A(x) \cdot B(x) = 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно $x$, называют **распадающимся уравнением.**

В Примере 1 уравнение (1) распадается на два уравнения (3) и (4).

> **Чтобы решить распадающееся уравнение $A(x) \cdot B(x) = 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены, надо решить каждое из уравнений $A(x) = 0$ и $B(x) = 0$ и объединить все найденные корни.**

**Пример 2.** Решим уравнение

$$x^3 - 1 = 0. \qquad (5)$$

Разложим левую часть уравнения (5) на множители, используя формулу разности кубов:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Уравнение (5) распадается на два уравнения:

$$x - 1 = 0 \qquad (6)$$

и

$$x^2 + x + 1 = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (6) имеет единственный корень $x_1 = 1$, уравнение (7) не имеет корней. Следовательно, уравнение (5) имеет единственный корень $x_1 = 1$.

**Пример 3.** Решим уравнение

$$x^6 - 1 = 0. \qquad (8)$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1).$$

Уравнение (8) равносильно уравнению

$$(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0,$$

которое распадается на два уравнения:

$$x^2 - 1 = 0 \qquad (9)$$

и

$$x^4 + x^2 + 1 = 0. \qquad (10)$$

Уравнение (9) имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Уравнение же (10) не имеет корней. В самом деле, уравнение (10) биквадратное. Замена неизвестного $y = x^2$ превращает его в квадратное уравнение

$$y^2 + y + 1 = 0,$$

не имеющее корней, так как $D = b^2 - 4ac = -3 < 0$.

Значит, уравнение (8) имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

**Пример 4.** Решим уравнение

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0. \qquad (11)$$

Так как $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3)$, то уравнение (11) распадается на два уравнения:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ и } x = 0.$$

Первое из них имеет два корня: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$, но тогда уравнение (11) имеет три корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$.

**300.** а) Приведите пример распадающегося уравнения и объясните, как его решить.
б) Что значит «уравнение распадается на два уравнения»?

**301.** а) Для каких пар чисел $a$ и $b$ верно равенство $ab = 0$?
б) Верно ли, что если числа $a$ и $b$ таковы, что $ab = 0$, то $a = 0$?
в) Равносильны ли уравнения $x^2 - x = 0$ и $x - 1 = 0$?
г) Является ли число 0 корнем уравнения $3x^4 - x^3 + 5x^2 = 0$?

**302.** Решите уравнение:
а) $(x - 1)(x - 2) = 0$;
б) $(x - 3)(x + 4) = 0$;
в) $(x - 7)^2 = 0$;
г) $(x + 4)(x - 6) = 0$;
д) $x(x - 2) = 0$;
е) $(x + 3)x = 0$;
ж) $3x^2 = 0$;
з) $-x^2(3 + x) = 0$.

**303.** Представьте левую часть уравнения в виде произведения многочленов и решите уравнение:

а) $2x^2 - 3x = 0$; б) $7x^2 + 5x = 0$; в) $x^3 - x = 0$;
г) $x^2 + x^3 = 0$; д) $1 - x^3 = 0$; е) $1 + x^3 = 0$;
ж) $x^3 - 8 = 0$; з) $125 - x^3 = 0$; и) $x^4 - 1 = 0$.

Решите уравнение (304—305):

**304.** а) $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$; б) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$;
в) $x^4 = 2x^3 + 3x^2$; г) $10x^2 = x^4 + 3x^3$;
д) $x^3 - 4x^2 = x$; е) $x^3 + x = 2x^2$;
ж) $x^5 + x^3 = x^4$; з) $(x - 3)^2 x = 0$.

**305.** а) $(2x + 3)(2x + 5) = 0$; б) $(3x - 7)(4 - 3x) = 0$;
в) $(5 - x)(3x + 2) = 0$; г) $(7 - x)(6 - 9x) = 0$;
д) $(2x - 3)(x^2 + 3x + 2) = 0$; е) $(x^2 - 5x + 6)(3x - 2) = 0$;
ж) $(x^2 + 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$; з) $x(x^2 - 6x + 9) = 0$;
и) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 5x + 7) = 0$;
к) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 4x + 4) = 0$;
л) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4x - 3) = 0$;
м) $(x^2 + 5x + 1)(x^2 - x + 6) = 0$;
н) $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 7) = 0$;
о) $(x^2 - 3)(x^2 - 4x + 4) = 0$.

**306.** **Исследуем.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$(x - 1)(x^2 - 6x + a) = 0$$

имеет ровно два корня.

## 5.4. Уравнение, одна часть которого алгебраическая дробь, а другая — нуль

**Пример 1.** Решим уравнение

$$\frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - x - 3} = 0. \qquad (1)$$

Мы знаем, что корнем уравнения относительно неизвестного $x$ называется число $x_0$, при подстановке которого вместо $x$ получается верное числовое равенство. Поэтому если $x_0$ есть корень уравнения (1), то выражение $\frac{x_0^2 + 4x_0 - 21}{x_0^2 - x_0 - 3}$ есть числовое выражение, равное нулю. Но тогда знаменатель этого выражения не должен равняться нулю, а числитель должен равняться нулю.

Таким образом, чтобы решить уравнение (1), мы должны найти корни уравнения

$$x^2 + 4x - 21 = 0. \qquad (2)$$

Затем подставить каждый из них в знаменатель левой части уравнения (1).

Корни уравнения (2), которые обращают знаменатель дроби в число, не равное нулю, являются корнями уравнения (1). Других корней уравнение (1) не имеет.

Дискриминант квадратного уравнения (2) положительный, и, следовательно, оно имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = -7$.

Подставив эти числа в знаменатель левой части уравнения (1), получим

$$x_1^2 - x_1 - 3 = 9 - 3 - 3 = 3 \neq 0,$$
$$x_2^2 - x_2 - 3 = 49 + 7 - 3 = 53 \neq 0.$$

Это показывает, что числа $x_1 = 3$ и $x_2 = -7$ являются корнями уравнения (1) и других корней это уравнение не имеет.

**Пример 2.** Решим уравнение

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 3x} = 0. \qquad (3)$$

Сначала решим уравнение

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Оно имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -1$.

Подставим их в знаменатель левой части уравнения (3):

$$x_1^3 - 2x_1^2 - 3x_1 = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = -6 \neq 0,$$
$$x_2^3 - 2x_2^2 - 3x_2 = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 3(-1) = 0.$$

Следовательно, уравнение (3) имеет единственный корень $x_1 = 2$.

**Пример 3.** Решим уравнение

$$\frac{2x - 3}{4x^4 + 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3} = 0. \qquad (4)$$

Сначала решим уравнение $2x - 3 = 0$. Оно имеет единственный корень $x_1 = \frac{3}{2}$. Так как

$$4x_1^4 + 4x_1^3 - 15x_1^2 + 2x_1 - 3 =$$
$$= 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 0,$$

то уравнение (4) не имеет корней.

**Пример 4.** Решим уравнение

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 3} = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) не имеет корней, потому что уравнение

$$x^2 + x + 1 = 0$$

не имеет корней.

Таким образом, чтобы решить уравнение

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \qquad (6)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, надо найти корни уравнения $P(x) = 0$ и подставить каждый из них в знаменатель $Q(x)$ левой части уравнения (6). Те из них, которые обращают знаменатель $Q(x)$ в число, не равное нулю, являются корнями уравнения (6); других корней уравнение (6) не имеет.

**307.** Как можно решить уравнение, одна часть которого нуль, а другая — алгебраическая дробь?

**308.** а) Для каких пар чисел $a$ и $b$ верно равенство $\frac{a}{b} = 0$?

б) Верно ли, что если числа $a$ и $b$ таковы, что $\frac{a}{b} = 0$, то $a = 0$?

в) Верно ли, что если число $a = 0$, то $\frac{a}{b} = 0$ для любого числа $b$?

г) Является ли корнем уравнения $\frac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - 1} = 0$ число 1? число 5?

д) Является ли число 3 корнем уравнения $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0$?

**309.** При каком значении $x$ равна нулю дробь:

а) $\frac{x}{5}$; б) $\frac{x + 3}{6}$; в) $\frac{x + 2}{x}$; г) $\frac{x}{x - 4}$;

д) $\frac{x - 7}{x + 1}$; е) $\frac{x + 3}{x - 3}$; ж) $\frac{x(x - 3)}{x - 3}$; з) $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$?

**310.** Запишите две алгебраические дроби, равные нулю при:
а) $x = -2$; б) $x = 0$; в) $x = 3$; г) $x = -2{,}5$.

Решите уравнение (311—314):

**311.** а) $\frac{x^2 + 2x}{x - 2} = 0$; б) $\frac{3x^2 - 7x}{x^2 + 1} = 0$;

в) $\frac{(x - 7)(1{,}5 + x)}{x^2 - 3x + 4} = 0$; г) $\frac{(-2 - x)(x - 8{,}5)}{(x - 3)(x + 4)} = 0$;

д) $\frac{x^2 - 8x + 7}{x - 3} = 0$; е) $\frac{4x^2 - 4x - 3}{x + 2} = 0$;

ж) $\frac{4x^2 - 12x - 27}{x^2 - 3x - 10} = 0$; з) $\frac{4x^2 + 4x - 35}{x^2 - 7x + 12} = 0$.

**312.** а) $\dfrac{x^2-2x+1}{x-7}=0$; б) $\dfrac{x^2+4x+4}{x+8}=0$;

в) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-7x+5}=0$; г) $\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+3x-1}=0$;

д) $\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x-1}=0$; е) $\dfrac{(x+7)^2(x-4)}{x-4}=0$.

**313.** а) $\dfrac{x^2+x-6}{x+3}=0$; б) $\dfrac{x^2-x-20}{x-5}=0$;

в) $\dfrac{x+7}{x+7}=0$; г) $\dfrac{x-9}{x-9}=0$.

**314.** а) $\dfrac{x^3-4x^2-5x}{x^2-3}=0$; б) $\dfrac{x^3+3x^2-18x}{x^2+4}=0$;

в) $\dfrac{2x^3-7x^2+6x}{2x^2-3x}=0$; г) $\dfrac{3x^3+5x^2+2x}{2x+3x^2}=0$;

д) $\dfrac{9x^2-6x+1}{3x-1}=0$; е) $\dfrac{25x^2+10x+1}{5x+1}=0$.

**315. Исследуем.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x^2-4x+a}{x+1}=0$ имеет единственный корень.

## 5.5. Решение рациональных уравнений

**Пример 1.** Решим уравнение

$$2-\frac{x+1}{x-1}=0. \qquad (1)$$

Применим к левой части уравнения (1) правило вычитания алгебраических дробей:

$$2-\frac{x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)-(x+1)}{x-1}=\frac{x-3}{x-1}. \qquad (2)$$

Для любого числа $x_0 \neq 1$ равны числовые значения левой и правой частей равенства (2).

В частности, если для некоторого числа $x_0$ обращается в нуль одна часть равенства (2), то для него обращается в нуль и другая его часть. А это означает, что уравнение (1) равносильно уравнению

$$\frac{x-3}{x-1}=0. \qquad (3)$$

Решим сначала уравнение

$$x-3=0.$$

Оно имеет единственный корень $x_0 = 3$. При этом число $x_0 = 3$ не обращает в нуль знаменатель дроби левой части уравнения (3):

$$x_0 - 1 = 3 - 1 = 2 \neq 0.$$

Поэтому уравнение (3) имеет единственный корень $x_0 = 3$.

Значит, и исходное уравнение (1) имеет единственный корень $x_0 = 3$.

**Пример 2.** Решим уравнение

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-4}{x-3} - 1. \qquad (4)$$

Перенесём все члены уравнения (4) влево, получим уравнение

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-4}{x-3} + 1 = 0, \qquad (5)$$

равносильное уравнению (4).

Применим к левой части уравнения (5) правила сложения и вычитания алгебраических дробей:

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-4}{x-3} + 1 =$$

$$= \frac{(x-1)(x-3) - (x-4)(x+2) + (x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \frac{x^2 - 3x + 5}{(x+2)(x-3)}.$$

Рассуждая, как в примере 1, получаем уравнение

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x+2)(x-3)} = 0, \qquad (6)$$

равносильное уравнению (5).

Для решения уравнения (6) надо сначала решить уравнение

$$x^2 - 3x + 5 = 0.$$

Поскольку его дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0,$$

то оно не имеет корней.

Следовательно, исходное уравнение (4) не имеет корней.

Из приведённых примеров следует правило:

**чтобы решить рациональное уравнение, надо перенести все его члены в левую часть, затем, применяя правила сложения и вычитания алгебраических дробей, записать левую часть как алгебраическую дробь и решить полученное уравнение.**

**Замечание.** Отклонение от высказанного правила может привести к потере корней или к приобретению посторонних корней данного уравнения.

**316.** По какому правилу решают рациональные уравнения? Что может произойти при отклонении от этого правила?

**317.** Равносильны ли уравнения:

а) $\frac{1}{x} = 3$ и $\frac{1}{x} - 3 = 0$; б) $\frac{2x-4}{x-5} = 0$ и $\frac{x-2}{x-5} = 0$;

в) $\frac{x}{x-1} + 3 = 0$ и $\frac{4x-3}{x-1} = 0$; г) $\frac{2x}{x-1} = x$ и $\frac{2}{x-1} = 1$?

Решите уравнение (318—324):

**318.** а) $\frac{x-1}{x} + 2 = 0$; б) $1 - \frac{2x}{x-1} = 0$; в) $\frac{k+3}{k} = 4$;

г) $2 = \frac{y}{y-5}$; д) $\frac{3}{m} = \frac{m}{3}$; е) $\frac{4}{x-1} = \frac{x}{5}$;

ж) $x - \frac{9}{x} = 0$; з) $\frac{25}{b} - b = 0$; и) $y + \frac{1}{y} = 1$.

**319.** а) $\frac{x^2}{x-3} - \frac{x+6}{x-3} = 1$; б) $\frac{6x-5}{4x-3} = \frac{3x+3}{2x+5}$;

в) $\frac{5a-7}{a+1} = \frac{2+5a}{a-2}$; г) $1 - \frac{1-m}{m} = \frac{2m+2}{m-1}$.

**320.** а) $\frac{y+1}{y-1} = 2 - \frac{y}{y+1}$; б) $\frac{4n-1}{n+3} = \frac{4n+1}{n-3}$;

в) $\frac{3c-2}{3c+2} = \frac{2c-5}{2c+5}$; г) $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2}{x-2} + 1$.

**321.** а) $\frac{5-2a}{8a} + \frac{2a-5}{10a} = 0$; б) $\frac{3x-1}{4x} + \frac{1-2x}{2x} = 0$;

в) $a + \frac{1}{a-2} = 0$; г) $a + \frac{4}{a-4} = 0$.

**322.** а) $\frac{1}{2a-3} + \frac{1}{a-1} = 2$; б) $\frac{x}{x-3} + \frac{x-8}{x} = 3$;

в) $\frac{b-3}{b^2-3b-4} = \frac{b-1}{b^2-b-2}$; г) $\frac{x+1}{x+3} + \frac{4}{x+7} = 1$;

д) $\frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+2} = \frac{3}{x}$; е) $\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z^2-1} = \frac{3}{z-1}$.

**323.** а) $\frac{7}{x^2+x+12} - \frac{6}{x^2+2x-8} = 0$; б) $\frac{2}{a} + \frac{10}{a^2-2a} = \frac{1+2a}{a-2}$;

в) $\frac{12}{3k-k^2} + \frac{3k+5}{k-3} + \frac{1}{k} = 0$; г) $\frac{3m}{m+1} + \frac{2}{m} = \frac{2m+5}{m^2+m}$;

д) $\frac{33}{b^2 - 11b} + \frac{b-4}{11-b} = -\frac{3}{b}$; е) $\frac{a+7}{a^2-7a} - \frac{4}{(7-a)^2} = \frac{1}{a-7}$;

ж) $\frac{2p-2}{p^2-36} - \frac{p-2}{p^2-6p} - \frac{p-1}{p^2+6p} = 0$.

**324.** а) $\frac{x-40}{39} + \frac{x-39}{40} = \frac{39}{x-40} + \frac{40}{x-39}$;

б) $\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{49}{x-50} + \frac{50}{x-49}$.

## 5.6. Решение задач при помощи рациональных уравнений

**Задача 1.** Теплоход, отчалив от пристани $A$, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани $B$. Весь путь от $A$ до $B$ теплоход прошёл за 7 ч. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость теплохода (собственная скорость — скорость в неподвижной воде).

Решение. Обозначим через $x$ км/ч собственную скорость теплохода. Тогда вниз по течению реки теплоход шёл со скоростью $(x + 1)$ км/ч и затратил на путь до устья притока $\frac{60}{x+1}$ ч.

По притоку теплоход шёл со скоростью $(x - 1)$ км/ч и затратил на путь по притоку $\frac{20}{x-1}$ ч. На весь путь теплоход затратил 7 ч. Значит,

$$\frac{60}{x+1} + \frac{20}{x-1} = 7. \qquad (1)$$

Таким образом, искомое число $x$ должно быть корнем рационального уравнения (1). Решим его.

Перенеся все его члены в левую часть и применив к левой части полученного уравнения правила сложения и вычитания алгебраических дробей, получим уравнение

$$\frac{7x^2 - 80x + 33}{(x+1)(x-1)} = 0, \qquad (2)$$

равносильное уравнению (1).

Уравнение $7x^2 - 80x + 33 = 0$ имеет корни

$$x_1 = 11, \ x_2 = \frac{3}{7}.$$

Каждый из них не обращает в нуль знаменатель левой части уравнения (2), и поэтому эти корни являются корнями уравнения (2), а значит, и уравнения (1).

Итак, уравнение (1) имеет два корня: $x_1 = 11$ и $x_2 = \frac{3}{7}$.

Однако по условию задачи скорость теплохода не может быть меньше 1 км/ч, так как теплоход двигался по притоку против течения, скорость которого равна 1 км/ч.

Следовательно, условию задачи удовлетворяет лишь $x = 11$.

**Ответ**: собственная скорость теплохода 11 км/ч.

**Задача 2.** Первая бригада может выполнить задание на 10 дней быстрее, чем вторая, а вместе они выполнят это задание за 12 дней. За сколько дней может выполнить то же задание каждая бригада, работая отдельно?

**Решение.** Пусть первая бригада может выполнить задание за $x$ дней, тогда вторая — за $(x + 10)$ дней. Первая бригада в день выполняет $\frac{1}{x}$ часть задания, а вторая — $\frac{1}{x+10}$ часть задания. Вместе они выполняют в день $1 : 12 = \frac{1}{12}$ часть задания. Составим уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}. \qquad (3)$$

Перенося все члены уравнения (3) в левую часть и применяя к левой части полученного уравнения правила сложения и вычитания алгебраических дробей, получаем равносильное ему уравнение

$$\frac{x^2 - 14x - 120}{12x(x+10)} = 0. \qquad (4)$$

Уравнение $x^2 - 14x - 120 = 0$ имеет корни $x_1 = 20$ и $x_2 = -6$. Каждый из них не обращает в нуль знаменатель левой части уравнения (4), следовательно, они являются корнями уравнения (4), а значит, и равносильного ему уравнения (3). Но по смыслу задачи искомое число положительно, поэтому условию удовлетворяет лишь $x_1 = 20$. Тогда $x + 10 = 30$.

**Ответ**: первая бригада может выполнить задание за 20 дней, а вторая — за 30 дней.

**325.** а) Числитель дроби на 2 больше знаменателя. Если числитель умножить на 2, а к знаменателю прибавить 3, то получится число $1\frac{2}{3}$. Найдите дробь.

б) Знаменатель дроби на 2 больше числителя. Если числитель увеличить на 15, а знаменатель — на 3, то получится число $1\frac{5}{6}$. Найдите дробь.

**326.** а) Числитель дроби на 1 меньше знаменателя. Если числитель умножить на 3, а знаменатель — на 2, то получится число $1\frac{2}{7}$. Найдите дробь.

б) Числитель дроби на 6 меньше знаменателя. Если знаменатель увеличить на 5, а числитель умножить на 15, то получится число 1,25. Найдите дробь.

в) Числитель дроби на 2 меньше знаменателя. Если сложить эту дробь с обратной к ней дробью, то получится число $2\frac{4}{15}$. Найдите эту дробь.

**327.** а) Расстояние между двумя населёнными пунктами 50 км. Из этих пунктов одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Скорость мотоциклиста на 30 км/ч больше скорости велосипедиста. Встретились они на расстоянии 10 км от одного из населённых пунктов. Какова скорость велосипедиста?

б) Используя условие и решение предыдущей задачи, определите, через сколько минут после встречи мотоциклист догонит велосипедиста, если они продолжат движение после встречи и мотоциклист, доехав до населённого пункта, развернётся и сразу же поедет в обратном направлении.

**328.** Расстояние между городами $A$ и $B$ 60 км. Из города $A$ в город $B$ выезжают одновременно две автомашины. Скорость первой на 20 км/ч больше скорости второй. И она прибывает в город $B$ на полчаса раньше. Определите скорость каждой автомашины.

**329.** а) Велосипедист проехал 5 км по лесной дороге и 7 км по шоссе, затратив на весь путь 1 ч. По шоссе он ехал со скоростью, на 4 км/ч большей, чем по лесу. С какой скоростью велосипедист ехал по лесной дороге?

б) Турист прошёл по шоссе 3 км, а по просёлочной дороге 6 км, затратив на весь путь 2 ч. С какой скоростью шёл турист по просёлочной дороге, если известно, что по шоссе он шёл со скоростью, на 2 км/ч большей, чем по просёлочной дороге?

**330.** а) На обработку одной детали первый рабочий затрачивает на 1 мин меньше, чем второй. Сколько деталей обработает каждый из них за 4 ч, если первый рабочий обрабатывает за это время на 8 деталей больше, чем второй?

б) Две работницы должны были обработать по 120 деталей за определённое время. Одна из них выполнила задание на 5 ч раньше, так как в час она обрабатывала на 2 детали больше другой. Сколько деталей в час обрабатывала каждая работница?

**331.** а) Две машинистки должны были напечатать по 120 страниц. Первая машинистка выполнила работу на 1 день раньше второй, так как печатала на 10 страниц в день больше. Сколько страниц в день печатала каждая машинистка?
б) На расстоянии 175 м переднее колесо старинного экипажа делало на 20 оборотов больше, чем заднее колесо, длина окружности которого на 1 м больше длины окружности переднего. Найдите длину окружности каждого колеса.

**332.** а) На уборке урожая с каждого из двух участков было собрано по 500 ц пшеницы. Площадь первого участка на 5 га меньше площади второго участка. Сколько центнеров пшеницы собрано с 1 га на каждом участке, если урожай пшеницы на первом участке с 1 га был на 5 ц больше, чем на втором?
б) Автомашина должна была пройти 840 км. В середине пути водитель остановился на обед, а через час продолжил путь. Чтобы прибыть вовремя в пункт назначения, пришлось увеличить скорость на 10 км/ч. Сколько времени занял весь путь, включая время на остановку?
в) Из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми 32 км, одновременно навстречу друг другу отправились пешеход и велосипедист. Через 2 ч они встретились. После встречи пешеход прибыл в пункт $B$ на 5 ч 20 мин позже, чем велосипедист в пункт $A$. Найдите скорости пешехода и велосипедиста.

**333.** Первый пешеход может пройти расстояние между двумя пунктами на 5 ч быстрее, чем второй. Если пешеходы выйдут из этих пунктов одновременно навстречу друг другу, то встретятся через 6 ч. За сколько часов каждый из них может пройти это расстояние?

**334.** Два экскаватора вырыли котлован за 48 дней. Первый экскаватор, работая отдельно, мог бы выполнить эту работу в 3 раза быстрее, чем второй. За сколько дней первый экскаватор, работая отдельно, мог бы выполнить эту работу?

**335.** Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из городов $A$ и $B$. Первый проезжает в час на 2 км больше второго и приезжает в $B$ на 1 ч раньше, чем второй в $A$. Расстояние от $A$ до $B$ 24 км. Определите скорость первого велосипедиста.

**336.** Двое рабочих выполнили некоторую работу за 8 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить ту же работу на 12 ч быстрее второго, если тот будет работать отдельно. За сколько часов второй рабочий один может выполнить ту же работу?

**337.** *Задача Безу.* Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он её купил?

**338.** Торговец покупает книги по оптовой цене, а продаёт за 11 р. Он подсчитал, что доход от продажи одной книги в процентах равен оптовой цене книги в рублях. Какова оптовая цена книги?

## 5.7*. Решение рациональных уравнений при помощи замены неизвестного

**Пример 1.** Решим уравнение

$$(x^2 - 5x + 7)^2 - 2(x^2 - 5x + 7) - 3 = 0. \quad (1)$$

Сделаем замену неизвестного:

$$y = x^2 - 5x + 7. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) превращается в квадратное уравнение

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \quad (3)$$

с неизвестным $y$. Так как

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 3 = 4 > 0,$$

то уравнение (3) имеет два корня: $y_1 = 3$ и $y_2 = -1$.

Подставив эти числа вместо $y$ в равенство (2), получим уравнения относительно $x$: $x^2 - 5x + 7 = 3$ и $x^2 - 5x + 7 = -1$. Решим сначала первое из них. Оно равносильно уравнению

$$x^2 - 5x + 4 = 0, \quad (4)$$

дискриминант которого $D = b^2 - 4ac = 9 > 0$.

Следовательно, уравнение (4) имеет два корня: $x_1 = 4$ и $x_2 = 1$.

Теперь решим второе уравнение. Оно равносильно уравнению

$$x^2 - 5x + 8 = 0, \quad (5)$$

дискриминант которого $D = b^2 - 4ac = -7 < 0$.

Следовательно, уравнение (5) не имеет корней.

Таким образом, уравнение (1) имеет два найденных выше корня $x_1$ и $x_2$ и других корней не имеет.

**Пример 2.** Решим уравнение

$$(x^4 + x^2 - 3)(x^4 + x^2 - 1) + 2 = 0. \quad (6)$$

Сделаем замену неизвестного:

$$y = x^4 + x^2 - 3, \quad (7)$$

тогда уравнение (6) превратится в квадратное уравнение с неизвестным $y$:

$$y^2 + 2y + 2 = 0, \quad (8)$$

дискриминант которого $D = b^2 - 4ac = 4 - 8 < 0$.

Следовательно, уравнение (8) корней не имеет. Но тогда и уравнение (6) не имеет корней.

**Пример 3.** Решим уравнение

$$x^2+4x-\frac{15}{x^2+4x}-2=0. \qquad (9)$$

Сделаем замену неизвестного:

$$y=x^2+4x. \qquad (10)$$

Тогда уравнение (9) превращается в рациональное уравнение с неизвестным $y$:

$$y-\frac{15}{y}-2=0. \qquad (11)$$

Приведём левую часть уравнения (11) к общему знаменателю, получим уравнение

$$\frac{y^2-2y-15}{y}=0, \qquad (12)$$

равносильное уравнению (11). Для решения уравнения (12) решим сначала квадратное уравнение $y^2-2y-15=0$. Это уравнение имеет два корня: $y_1=5$ и $y_2=-3$.

Так как ни одно из этих чисел не обращает в нуль знаменатель левой части уравнения (12), то уравнение (12), а значит, и равносильное ему уравнение (11) имеют два корня: $y_1=5$ и $y_2=-3$. Теперь для решения уравнения (9) остаётся решить два уравнения с неизвестным $x$:

$$x^2+4x=5 \text{ и } x^2+4x=-3.$$

Эти уравнения равносильны соответственно уравнениям

$$x^2+4x-5=0 \text{ и } x^2+4x+3=0.$$

Каждое из этих квадратных уравнений имеет по два корня:

$x_1=1$, $x_2=-5$ — корни первого уравнения;

$x_3=-1$, $x_4=-3$ — корни второго уравнения.

Следовательно, уравнение (9) имеет четыре корня: 1, –5, –1, –3.

**Пример 4.** Решим уравнение

$$x^2-5x+7=\frac{12}{(x-2)(x-3)}. \qquad (13)$$

Заметив, что $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$, сделаем замену неизвестного:

$$y=x^2-5x+6. \qquad (14)$$

Тогда уравнение (13) превращается в уравнение с неизвестным $y$:

$$y+1=\frac{12}{y}. \qquad (15)$$

Уравнение (15) равносильно уравнению

$$\frac{y^2+y-12}{y}=0. \qquad (16)$$

Квадратное уравнение
$$y^2 + y - 12 = 0$$
имеет два корня: $y_1 = 3$ и $y_2 = -4$.

Так как ни одно из этих чисел не обращает в нуль знаменатель левой части уравнения (16), то уравнение (16), а значит, и равносильное ему уравнение (15) имеют по два корня: $y_1 = 3$ и $y_2 = -4$.

Теперь для решения уравнения (13) остаётся решить два уравнения с неизвестным $x$:
$$x^2 - 5x + 6 = 3 \text{ и } x^2 - 5x + 6 = -4.$$

Первое из них имеет два корня: $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ и $x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$, а второе корней не имеет.

Следовательно, уравнение (13) имеет два корня: $\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$, $\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$.

Решите уравнение (339—342):

**339.** а) $(x + 2)^2 = 2(x + 2) + 3$;
б) $(x^2 + 3x - 25)^2 - 2(x^2 + 3x - 25) = -7$;
в) $(x^4 + x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 2) = 12$;
г) $(x^2 - 5x + 7)^2 - 2(x - 2)(x - 3) = 1$;
д) $(x^2 + 5x - 7)(2x^2 + 10x - 11) + 1 = 0$.

**340.** а) $\left(\frac{2x + 1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{2x + 1}{x}\right) = 3$;
б) $\frac{x}{2x + 1} + \frac{2x + 1}{x} = 2$;
в) $2x^2 - 3x + 2 - \frac{6}{2x^2 - 3x + 1} = 0$;
г) $x^4 + 3x^2 = \frac{1}{x^4 + 3x^2 + 2}$;
д) $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$;
е) $\frac{x}{x - 1} + \frac{x - 1}{x} = \frac{13}{6}$;
ж) $\frac{x}{10 - x} + \frac{10 - x}{x} = 25$.

**341.** а) $x(x + 2)(x + 3)(x + 5) = 72$;
б) $x(x + 2)(x + 4)(x + 6) = 105$;
в) $x^2 - 9x + 13 + \frac{1}{x^2 - 9x + 15} = 0$;
г) $x^2 - 10x + 15 + \frac{1}{x^2 - 10x + 17} = 0$.

**342.** а) $\frac{5}{(x + 1)(x + 4)} + \frac{6}{(x + 2)(x + 3)} = 1$;
б) $\frac{9}{(x + 2)(x + 5)} + \frac{7}{(x + 1)(x + 6)} = 1$;
в) $\frac{x^2 - x + 3}{x^2 - x + 1} + \frac{x^2 - x + 4}{x^2 - x + 2} = 5$;
г) $\frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1} + \frac{x^2 + x + 6}{x^2 + x + 3} = 4$.

## 5.8*. Уравнение-следствие

Решение уравнений вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \qquad (1)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, можно оформить иначе, чем в п. 5.4: с помощью нового понятия «уравнение-следствие».

Пусть даны два уравнения. Если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называют **следствием** первого уравнения.

Например, следствием уравнения (1) является уравнение

$$P(x) = 0. \qquad (2)$$

Отметим, что если следствие уравнения не имеет действительных корней, то и само уравнение не имеет действительных корней.

Переход от уравнения (1) к уравнению (2) называют **освобождением уравнения (1) от знаменателя.** Поэтому, освобождаясь в уравнении от знаменателя, получаем уравнение, являющееся следствием исходного уравнения.

Уравнение-следствие может иметь корни, не являющиеся корнями исходного уравнения (их ещё называют «посторонними» корнями). Например, уравнение $x^2 - 1 = 0$ имеет два корня: $-1$ и 1, это уравнение является следствием уравнения $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$, которое имеет единственный корень 1. Поэтому если при решении уравнения выполнен переход к уравнению-следствию, то **проверка корней уравнения-следствия является обязательной частью решения исходного уравнения.**

В частности, **после освобождения уравнения от знаменателя необходима проверка корней полученного уравнения-следствия.**

**Пример 1.** Решим уравнение

$$\frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = 0. \qquad (3)$$

Освобождая уравнение (3) от знаменателя, получим уравнение

$$x^2 + x - 6 = 0, \qquad (4)$$

являющееся следствием уравнения (3). Квадратное уравнение (4) имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$.

Проверим, являются ли они корнями уравнения (3).

Так как $x_1 + 3 = 5$, $x_1^2 + x_1 - 6 = 0$, то $\frac{x_1^2 + x_1 - 6}{x_1 + 3} = 0$, т. е. число $x_1$ является корнем уравнения (3).

Так как $x_2 + 3 = 0$, $x_2^2 + x_2 - 6 = 0$, то выражение $\frac{x_2^2 + x_2 - 6}{x_2 + 3}$ не имеет смысла. Поэтому число $x_2$ не является корнем уравнения (3).

Следовательно, уравнение (3) имеет единственный корень 2.

Переход от данного уравнения к уравнению-следствию можно применять при решении уравнений, содержащих одинаковые члены.

Если при решении уравнения выполнена замена разности $f(x) - f(x)$ нулём (где выражение $f(x)$ определено не для всех $x$), то получаем уравнение-следствие исходного уравнения.

Например, уравнение $x^2 = 4$, имеющее два корня 2 и –2, является следствием уравнения $x^2 + \sqrt{x} = 4 + \sqrt{x}$, имеющего единственный корень 2.

Замену разности $f(x) - f(x)$ нулём часто называют **приведением подобных членов**.

**Если при решении уравнения выполнено приведение подобных членов, то необходима проверка корней полученного уравнения-следствия.**

**Пример 2.** Решим уравнение

$$x^2 + \frac{1}{x} = 9x + \frac{1}{x}. \tag{5}$$

Перенеся все слагаемые уравнения (5) в левую часть и заменив разность $\frac{1}{x} - \frac{1}{x}$ нулём, получим уравнение

$$x^2 - 9x = 0, \tag{6}$$

являющееся следствием уравнения (5). Уравнение (6) имеет два корня: $x_1 = 9$, $x_2 = 0$.

Проверим, являются ли они корнями уравнения (5).

Так как $x_1^2 + \frac{1}{x_1} = 81\frac{1}{9}$, $9x_1 + \frac{1}{x_1} = 81\frac{1}{9}$, то число $x_1$ является корнем уравнения (5).

Так как выражения $x_2^2 + \frac{1}{x_2}$ и $9x_2 + \frac{1}{x_2}$ не имеют смысла, то число $x_2$ не является корнем уравнения (5).

Следовательно, уравнение (5) имеет единственный корень 9.

Переход от данного уравнения к уравнению-следствию можно применять при решении уравнений, не являющихся рациональными, например уравнений, в которых неизвестное находится под знаком корня или модуля.

**Пример 3.** Решим уравнение

$$\frac{x^2 + 1}{|x - 1|} + \sqrt{x} = \sqrt{x} + \frac{2}{|x - 1|}. \tag{7}$$

Перенеся все члены уравнения (7) в левую часть и заменив разность $\sqrt{x} - \sqrt{x}$ нулём, получим уравнение

$$\frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = 0, \qquad (8)$$

являющееся следствием уравнения (7). Освободив уравнение (8) от знаменателя, получим уравнение

$$x^2 - 1 = 0, \qquad (9)$$

являющееся следствием уравнения (8), а значит, и уравнения (7). Уравнение (9) имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Проверим, являются ли они корнями уравнения (7). Так как $|x_1 - 1| = 0$, то выражения $\frac{x_1^2 + 1}{|x_1 - 1|}$ и $\frac{2}{|x_1 - 1|}$ не имеют смысла, поэтому число $x_1$ не является корнем уравнения (7). Так как выражение $\sqrt{x_2}$ не имеет смысла, то число $x_2$ не является корнем уравнения (7).

Следовательно, уравнение (7) не имеет корней.

К уравнению-следствию приводит также приведённое ниже преобразование уравнения.

Пусть дано уравнение. Если записать новое уравнение, каждая из частей которого есть квадрат соответствующей части первого уравнения, то говорят, что исходное **уравнение возвели в квадрат**; новое уравнение является следствием исходного.

Например, рассмотрим уравнение $x = 2$, оно имеет единственный корень 2. Возведя это уравнение в квадрат, получим новое уравнение $x^2 = 4$, имеющее два корня: 2 и $-2$. Новое уравнение является следствием исходного, так как корень 2 исходного уравнения является корнем нового уравнения. Но второй корень уравнения-следствия — число $-2$ — не является корнем исходного уравнения.

И в других случаях при возведении уравнения в квадрат могут появиться корни, «посторонние» для исходного уравнения. Поэтому **после возведения уравнения в квадрат необходима проверка корней полученного уравнения-следствия.**

**Пример 4.** Решим уравнение

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = 2x + 1. \qquad (10)$$

Возведя уравнение (10) в квадрат, получим уравнение

$$x^2 - 2x + 10 = (2x + 1)^2, \qquad (11)$$

являющееся следствием уравнения (10). Уравнение (11) имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$. Проверим, являются ли они корнями уравнения (10).

Так как $\sqrt{x_1^2 - 2x_1 + 10} = \sqrt{9} = 3$, $2x_1 + 1 = 3$ и $3 = 3$, то число $x_1$ является корнем уравнения (10).

Так как $\sqrt{x_2^2 - 2x_2 + 10} = \sqrt{25} = 5$, $2x_2 + 1 = -5$ и $5 \neq -5$, то число $x_2$ не является корнем уравнения (10).

Следовательно, уравнение (10) имеет единственный корень 1.

**Пример 5.** Решим уравнение

$$\sqrt{3x - 3} = \sqrt{2x + 1}. \tag{12}$$

Возведя уравнение (12) в квадрат, получим уравнение

$$3x - 3 = 2x + 1, \tag{13}$$

являющееся следствием уравнения (12). Уравнение (13) имеет единственный корень $x_1 = 4$. Проверим, является ли он корнем уравнения (12).

Так как $\sqrt{3x_1 - 3} = 3$, $\sqrt{2x_1 + 1} = 3$ и $3 = 3$, то число $x_1$ является корнем уравнения (12).

Следовательно, уравнение (12) имеет единственный корень 4.

**Пример 6.** Решим уравнение

$$|x^2 - 3x + 1| = x^2 - 4x + 2. \tag{14}$$

Возведя уравнение (14) в квадрат, получим уравнение

$$(x^2 - 3x + 1)^2 = (x^2 - 4x + 2)^2, \tag{15}$$

являющееся следствием уравнения (14).

Перенеся все члены уравнения (15) в левую часть и применив формулу разности квадратов, перепишем уравнение (15) в виде

$$(x - 1)(2x^2 - 7x + 3) = 0. \tag{16}$$

Только корни двух уравнений:

$$1)\ x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

являются корнями уравнения (16). Уравнение 1) имеет единственный корень $x_1 = 1$, а уравнение 2) имеет два корня: $x_2 = \frac{1}{2}$ и $x_3 = 3$. Поэтому уравнение (16) имеет три корня: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ и $x_3 = 3$. Проверим, являются ли они корнями уравнения (14).

Так как $|x_1^2 - 3x_1 + 1| = |-1| = 1$, $x_1^2 - 4x_1 + 2 = -1$, $1 \neq -1$, то число $x_1$ не является корнем уравнения (14).

Так как $|x_2^2 - 3x_2 + 1| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$, $x_2^2 - 4x_2 + 2 = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, то число $x_2$ является корнем уравнения (14).

Так как $|x_3^2 - 3x_3 + 1| = |1| = 1$, $x_3^2 - 4x_3 + 2 = -1$, $1 \neq -1$, то число $x_3$ не является корнем уравнения (14).

Следовательно, уравнение (14) имеет единственный корень $\frac{1}{2}$.

Решите уравнение (343—345):

**343.** а) $\frac{x^2+2x-15}{x-3}=0$; б) $\frac{2x^2-x-10}{x+2}=0$;

в) $\frac{x^2-x-2}{x-2}=3x+3$; г) $\frac{x^2-5x+4}{x-4}=5x-5$;

д) $\frac{x^2-5x+6}{x^3-9x^2+27x-27}=0$; е) $\frac{x^2+2x-8}{x^3-6x^2+12x-8}=0$.

**344.** а) $x^2-x+\sqrt{x-1}=6+\sqrt{x-1}$; б) $x^2+x+\sqrt{x+2}=6+\sqrt{x+2}$;

в) $5x^2-\frac{1}{x-6}=30x-\frac{1}{x-6}$; г) $3x^2+1+\frac{1}{x-1}=4x+\frac{1}{x-1}$.

**345.** а) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{4}$;

б) $\frac{1}{(x-3)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}=-2$;

в) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}=-1{,}5$.

**Указание.** В задании а) замените дроби $\frac{1}{x(x+1)}$ и $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ разностями дробей $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ и $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ соответственно.

**346.** Решите уравнения из заданий 252—254 (см. с. 85) переходом к уравнению-следствию.

Решите уравнение (347—348):

**347.** а) $\sqrt{2x^2+x+3}=x+3$; б) $\sqrt{3x^2+5x-1}=2x+5$;

в) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{6x+1}$; г) $\sqrt{2x^2-3x+1}=\sqrt{x^2-1}$;

д) $\sqrt{3x^2-x-3}=\sqrt{x^2-4x+2}$; е) $\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{2x^2+2x-2}$;

ж) $\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{x^2-x-1}$; з) $\sqrt{2x^2-3x+5}=\sqrt{x^2+x+1}$;

и) $\sqrt{2x^2-3x-9}=\sqrt{x^2+4x-1}$; к) $\sqrt{2x^2-5x-4}=\sqrt{x^2-10}$;

л) $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{5x-4}$; м) $\sqrt{3x^2-5x+7}=\sqrt{x^2-1}$;

н) $\sqrt{x^2-6x+5}=\sqrt{x^2-x}$; о) $\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{2x^2-9}$.

**348.** а) $|x-2|=2x-1$; б) $|x+3|=3x-1$;

в) $|x^2-4x+1|=2x-4$; г) $|x^2-6x+6|=2x-6$;

д) $|x^2-5x+5|=x^2-6x+7$; е) $|x^2-x-1|=x^2-2x-1$;

ж) $|x^2-4x+2|=x^2-8x+14$; з) $|x^2-4|=x^2-6x+8$;

и) $|x^2-8x+11|=x^2-10x+25$; к) $|x^2-6x+5|=x^2-5$.

# Дополнения к главе 2

## 1. Разложение многочленов на множители и решение уравнений

**Теорема Безу. Корень многочлена.** Пусть $P_n(x)$ — многочлен относительно $x$ степени $n$ ($n \geqslant 1$), т. е.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — данные числа, причём $a_n \neq 0$. Число $a_0$ называют свободным членом многочлена $P_n(x)$. Если многочлен $P_n(x)$ разделить с остатком на двучлен $x - a$, то частное (неполное частное) есть многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени $n - 1$, а остаток $R$ есть число, при этом справедливо равенство

$$P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + R. \quad (2)$$

Из равенства (2) следует, что если $R = 0$, то многочлен $P_n(x)$ разлагается на множители, один из которых есть двучлен $x - a$.

Для нахождения частного $Q_{n-1}(x)$ и остатка $R$ обычно применяют метод деления уголком.

**Пример 1.** Найдём частное и остаток при делении многочлена $P_4(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ на двучлен $x - 3$.

Применим деление уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1 & x - 3 \\
\underline{x^4 - 3x^3} \qquad\qquad\qquad & \overline{x^3 + 5x^2 + 14x + 45} \\
-\,5x^3 - x^2 \qquad\qquad & \\
\underline{5x^3 - 15x^2} \qquad\qquad & \\
-\,14x^2 + 3x \qquad & \\
\underline{14x^2 - 42x} \qquad & \\
-\,45x - 1 & \\
\underline{45x - 135} & \\
134 &
\end{array}$$

Следовательно,

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1 =$$
$$= (x - 3)(x^3 + 5x^2 + 14x + 45) + 134,$$

и поэтому частное есть многочлен $x^3 + 5x^2 + 14x + 45$, а остаток — число 134.

**Пример 2.** Найдём частное и остаток при делении многочлена $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на двучлен $x - 1$.

Э. Безу

Применим деление уголком:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\
\underline{x^3 - \phantom{6}x^2\phantom{ + 11x - 6}} & \overline{x^2 - 5x + 6} \\
-\;-5x^2 + 11x\phantom{ - 6} & \\
\underline{-5x^2 + \phantom{1}5x\phantom{ - 6}} & \\
-\;6x - 6 & \\
\underline{6x - 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

Следовательно,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6),$$

и поэтому частное есть многочлен $x^2 - 5x + 6$, а остаток равен нулю.

Если требуется найти только остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - a$, то пользуются следующим утверждением, доказанным французским математиком Э. Безу (1730—1783):

**Теорема Безу**

Остаток $R$ от деления многочлена (1) на двучлен $x - a$ равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x = a$, т. е. $R = P_n(a)$.

Доказательство. Если в равенство (2) вместо $x$ подставить число $a$, то получится, что $P_n(a) = R$, что и требовалось доказать.

Используя теорему Безу, равенство (2) часто записывают в виде

$$P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + P_n(a).$$

Число $a$ называют *корнем многочлена* $P_n(x)$, если при $x = a$ значение многочлена $P_n(x)$ равно нулю: $P_n(a) = 0$, т. е. если равен нулю остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - a$.

В примере 1 $P_4(3) = 134$ и число 3 не является корнем многочлена $P_4(x)$, а в примере 2 $P_3(1) = 0$, число 1 является корнем многочлена $P_3(x)$ и разложение этого многочлена на множители содержит множитель $x - 1$.

**Целые корни многочлена.**

**Теорема 1**

Если все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ многочлена

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \qquad (3)$$

целые числа, причём $a_0 \neq 0$, и целое число $m$ является корнем многочлена, то число $m$ является делителем свободного члена $a_0$ этого многочлена.

**Доказательство.** Так как число $m$ есть корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(m) = 0$, т. е. справедливо равенство

$$m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0 = 0. \qquad (4)$$

Перепишем равенство (4) в виде

$$a_0 = m(-m^{n-1} - a_{n-1}m^{n-2} - \ldots - a_1). \qquad (5)$$

Так как $m$ — целое число, то в равенстве (5) в скобках записано целое число. Оно не равно 0, ибо тогда $a_0 = 0$. Так как $a_0 \neq 0$ и правая часть равенства (5) делится на $m$, то число $a_0$ делится на $m$, что и требовалось доказать.

### Теорема 2

Если все коэффициенты многочлена (3) — целые числа и этот многочлен имеет корень — рациональное число, то этот корень является целым числом.

**Доказательство.** Пусть многочлен (3) имеет корень — рациональное не равное нулю число $\frac{p}{q}$ (дробь $\frac{p}{q}$ несократимая, и $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}$). Будем считать, что числа $p$ и $q$ не имеют общих делителей. Покажем, что число $q$ не может быть больше 1. Предположим противное, что $q > 1$. Так как число $\frac{p}{q}$ есть корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, т. е. справедливо равенство

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0, \qquad (6)$$

откуда следует, что

$$\frac{p^n}{q^n} = -a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - \ldots - a_1\frac{p}{q} - a_0. \qquad (7)$$

Умножая равенство (7) на $q^{n-1}$, получаем, что справедливо равенство

$$\frac{p^n}{q} = -a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_1 pq^{n-2} - a_0 q^{n-1}. \qquad (8)$$

Так как числа $p$ и $q$ не имеют общих делителей, то числа $p^n$ и $q$ также не имеют общих делителей (заметим, что этот факт требует доказательства, но мы его опускаем). Поэтому число $p^n$ не делится на $q$. Это означает, что правая часть равенства (8) — целое число, а левая — несократимая дробь. Получилось противоречие, следовательно, предположение, что $q > 1$, неверно. Это означает, что $q = 1$, т. е. рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами является целым числом.

Из теорем 1 и 2 следует, что если многочлен (3), все коэффициенты которого целые числа, причём $a_0 \neq 0$, имеет рациональные корни, то эти корни — целые числа, являющиеся делителями свободного члена многочлена. Поэтому если дан многочлен с целыми коэффициентами и свободным членом, не равным нулю, то для того, чтобы выяснить, есть ли у этого многочлена рациональный корень, надо проверить, является ли корнем многочлена каждый делитель свободного члена многочлена. Если ни один делитель свободного члена многочлена не является корнем многочлена, то этот многочлен не имеет рациональных корней.

**Пример 3.** Выясним, какие рациональные корни имеет многочлен $P_4(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

Свободный член этого многочлена имеет делители 1 и –1. Вычислим $P_4(1)$ и $P_4(-1)$:

$$P_4(1) = 0, \quad P_4(-1) = 8 \neq 0.$$

Следовательно, многочлен $P_4(x)$ имеет рациональный корень — число 1. Разложим многочлен $P_4(x)$ на множители. Разделим многочлен $P_4(x)$ на двучлен $x - 1$ уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 - x^3}\qquad\qquad\qquad & x^3 + 2x - 1 \\
-\;2x^2 - 3x\quad\;\; & \\
\underline{2x^2 - 2x}\quad\;\; & \\
-\;-x + 1 & \\
\underline{-x + 1} & \\
0 &
\end{array}$$

Следовательно, $x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^3 + 2x - 1)(x - 1)$.

Проверим, есть ли у многочлена $P_3(x) = x^3 + 2x - 1$ рациональные корни. Свободный член этого многочлена имеет делители 1 и –1.

Вычислим $P_3(1)$ и $P_3(-1)$:

$$P_3(1) = 2 \neq 0, \quad P_3(-1) = -4 \neq 0.$$

Следовательно, многочлен $P_3(x)$ не имеет рациональных корней, и поэтому многочлен $P_4(x)$ имеет только один рациональный корень — число 1.

**Решение уравнений $P_n(x) = 0$.** Умение находить рациональные корни многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами помогает решить уравнение $P_n(x) = 0$.

**Пример 4.** Решим уравнение

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0. \qquad (9)$$

Свободный член многочлена

$$P_5(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2$$

имеет делители 1, –1, 2 и –2.

Так как

$$P_5(1) = 1 - 1 - 4 + 5 + 1 - 2 = 0,$$

то многочлен $P_5(x)$ имеет корень 1 и его можно разложить на множители. Для этого разделим многочлен $P_5(x)$ на двучлен $x - 1$ уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5 - x^4} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad & x^4 - 4x^2 + x + 2 \\
-\,-4x^3 + 5x^2 \qquad\qquad\quad & \\
\underline{-4x^3 + 4x^2} \qquad\qquad\quad & \\
-\,x^2 + x \qquad\quad & \\
\underline{x^2 - x} \qquad\quad & \\
-\,2x - 2 & \\
\underline{2x - 2} & \\
0 &
\end{array}$$

Итак, $P_5(x) = P_4(x)(x - 1)$, где $P_4(x) = x^4 - 4x^2 + x + 2$.

Проверим, есть ли у многочлена

$$P_4(x) = x^4 - 4x^2 + x + 2$$

рациональные корни. Свободный член многочлена $P_4(x)$ имеет делители 1, –1, 2 и –2. Так как $P_4(1) = 1 - 4 + 1 + 2 = 0$, то многочлен $P_4(x)$ имеет корень 1 и его разложение на множители имеет множитель $x - 1$.

Разделим многочлен $P_4(x)$ на двучлен $x - 1$ уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4 + 0x^3 - 4x^2 + x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 - x^3} \qquad\qquad\qquad\quad & x^3 + x^2 - 3x - 2 \\
-\,x^3 - 4x^2 \qquad\qquad\quad & \\
\underline{x^3 - x^2} \qquad\qquad\quad & \\
-\,-3x^2 + x \qquad\quad & \\
\underline{-3x^2 + 3x} \qquad\quad & \\
-\,-2x + 2 & \\
\underline{-2x + 2} & \\
0 &
\end{array}$$

Итак, $P_4(x) = P_3(x)(x - 1)$, где $P_3(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$. Свободный член многочлена $P_3(x)$ имеет делители 1, –1, 2 и –2. Вычислим $P_3(1)$, $P_3(-1)$, $P_3(2)$ и $P_3(-2)$:

$P_3(1) = 1 + 1 - 3 - 2 = -3 \neq 0,$

$P_3(-1) = -1 + 1 + 3 - 2 = 1 \neq 0,$

$P_3(2) = 8 + 4 - 6 - 2 = 4 \neq 0,$

$P_3(-2) = -8 + 4 + 6 - 2 = 0.$

Так как $P_3(-2) = 0$, то многочлен $P_3(x)$ имеет корень –2 и его разложение на множители имеет множитель $x + 2$.

Разделим многочлен $P_3(x)$ на двучлен $x + 2$ уголком:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + \phantom{2}x^2 - 3x - 2 & x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 + 2x^2} \phantom{{}- 3x - 2} & x^2 - x - 1 \\ -x^2 - 3x \phantom{{}- 2} & \\ \underline{-x^2 - 2x} \phantom{{}- 2} & \\ -x - 2 & \\ \underline{-x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Итак, $P_3(x) = P_2(x)(x + 2)$, где $P_2(x) = x^2 - x - 1$.

Так как многочлен $P_2(x)$ — многочлен второй степени, то легко найти его корни:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно,

$$P_2(x) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Подводя итоги, получаем, что

$$P_5(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x - x_1)(x - x_2).$$

Поэтому уравнение (9) имеет корни:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ x_3 = -2,\ x_4 = 1.$$

Очевидно, что других корней оно не имеет.

**Пример 5.** Решим уравнение

$$x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9} = 0. \tag{10}$$

Так как коэффициенты трёхчлена $x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}$ не целые числа, то умножим обе части уравнения (10) на 9. Получим равносильное ему уравнение

$$9x^3 + 6x^2 - 1 = 0. \tag{11}$$

Так как старший член многочлена $P_3(x) = 9x^3 + 6x^2 - 1$ не равен 1, то сразу нельзя применить рассмотренный выше метод. Поэтому поступим следующим образом. Умножая уравнение (11) на 3, получаем равносильное ему уравнение

$$(3x)^3 + 2(3x)^2 - 3 = 0. \tag{12}$$

Сделаем в уравнении (12) замену неизвестного $y = 3x$, тогда уравнение (12) превращается в уравнение с неизвестным $y$:

$$y^3 + 2y^2 - 3 = 0. \tag{13}$$

Так как старший член многочлена $P_3(y) = y^3 + 2y^2 - 3$ равен 1, то к уравнению (13) можно применить рассмотренный выше метод. Свободный член многочлена $P_3(y)$ имеет делители 1, −1, 3 и −3. Так как $P_3(1) = 1 + 2 - 3 = 0$, то многочлен $P_3(y)$ делится на двучлен $y - 1$:

$$\begin{array}{r|l} y^3 + 2y^2 + 0y - 3 & y - 1 \\ \cline{2-2} \underline{y^3 - \;\; y^2} \quad\quad\quad\quad & y^2 + 3y + 3 \\ 3y^2 + 0y \quad\;\; & \\ \underline{3y^2 - 3y} \quad\;\; & \\ 3y - 3 & \\ \underline{3y - 3} & \\ 0 & \end{array}$$

Итак, $P_3(y) = P_2(y)(y - 1)$, где $P_2(y) = y^2 + 3y + 3$.

Так как дискриминант квадратного трёхчлена $P_2(y)$ меньше нуля, то квадратный трёхчлен $P_2(y)$ не разлагается на линейные множители и не имеет корней. Поэтому уравнение (13) имеет единственный корень $y_1 = 1$.

Теперь найдём корень уравнения (11), решив уравнение $3x = 1$. Уравнение (11) и, следовательно, равносильное ему уравнение (10) имеют единственный корень $x_1 = \frac{1}{3}$.

**349.** Разделите многочлен:

а) $2x^3 + x^2 + 3$; б) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$;
в) $4x^3 + 5x^2 - 3x + 2$; г) $x^5 - 3x^3 + 3x - 10$
на двучлен $x - 1$.

**350.** Не выполняя деления, определите остаток от деления многочлена:

а) $5x^3 - 3x^2 + 2$; б) $2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$;
в) $3x^3 + 2x^2 - 6x + 7$; г) $3x^5 - 4x^2 - 3x + 6$
на двучлен $x - 1$, на двучлен $x + 1$.

**351.** Разложите многочлен на множители:

а) $x^3 - x^2 - x - 2$; б) $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$;
в) $x^3 - 7x + 6$; г) $x^3 - 6x - 9$;
д) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$; е) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$;
ж) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 4$; з) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

Решите уравнение (352—354):

**352.** а) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; б) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$;
в) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$; г) $x^3 + x^2 - x + 2 = 0$;
д) $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$; е) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$.

**353.** а) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$; б) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$;
в) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$; г) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$;
д) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 0$; е) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$.

**354.** а) $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$; б) $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$;
в) $3x^3 + 4x^2 + 7x + 2 = 0$; г) $3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$;
д) $2x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 2x - 3 = 0$; е) $2x^4 + x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$.

**355.** **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о Э. Безу и его теореме.

## 2. Комплексные числа

Рассмотрим уравнение

$$x^2 - 2x + 2 = 0. \tag{1}$$

Хотя оно имеет отрицательный дискриминант $D = -4$, напишем формально формулы для его корней:

$$x_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{-1}. \tag{2}$$

До сих пор мы считали, что такие выражения не имеют смысла, так как символу $\sqrt{-1}$ не соответствует никакое действительное число. Однако этот символ оказался очень полезным в математике. Его обозначают буквой $i$:

$$\sqrt{-1} = i$$

и называют **мнимой единицей.**

С помощью мнимой единицы $i$ и действительных чисел можно составлять буквенные выражения.

Например, $1 + i$, $\dfrac{2 + i}{i - 1}$, $\dfrac{2 - i}{3}$, $i^2 + i^3$.

С такими буквенными выражениями можно выполнять арифметические действия, подчиняющиеся следующему правилу: эти выражения преобразуются как обычные буквенные выражения, однако при этом считают, что $i^2 = -1$.

Например:

$$1 - 3i + 5i = 1 + 2i, \qquad i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1, \qquad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

$$(1 + i) : (1 - i) = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{(1 + i)^2}{1 - i^2} = \frac{(1 + i)^2}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 + i)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(1 + 2i + i^2) = \frac{1}{2}(1 + 2i - 1) = i.$$

Выражение $a + bi$, где $a$ и $b$ — действительные числа, а $i$ — мнимая единица, называют **комплексным числом**.

Действительное число $a$ есть частный случай комплексного числа $a + bi$ при $b = 0$:

$$a + 0i = a.$$

Выражение $bi$, где $b$ — действительное число, называют *мнимым числом*.

Например, $3i$, $-i$, $-7i$ — мнимые числа.

Мнимое число $bi$ есть частный случай комплексного числа $a + bi$ при $a = 0$:

$$0 + bi = bi.$$

Наконец, считают, что

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7}\sqrt{-1} = \sqrt{7} \cdot i, \ \sqrt{-8} = \sqrt{8}\sqrt{-1} = 2\sqrt{2} \cdot i$$

и т. д.

Важно отметить, что сумма, разность, произведение и частное (делитель не нуль) комплексных чисел есть комплексное число.

Например:

$$(2 + 3i) + (5 - 7i) = 7 - 4i,$$

$$(2 + 3i) - (5 - 7i) = -3 + 10i,$$

$$(2 + 3i)(1 - i) = 2 + 3i - 2i - 3i^2 = 5 + i,$$

$$\frac{2 - i}{3 + 2i} = \frac{(2 - i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{6 - 3i - 4i + 2i^2}{9 - 4i^2} = \frac{4 - 7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i.$$

Итак, выражения $1 + \sqrt{-1}$ и $1 - \sqrt{-1}$ представляют собой комплексные числа

$$x_1 = 1 + i \text{ и } x_2 = 1 - i.$$

Легко проверить, применяя изложенные правила, что комплексные числа $x_1$ и $x_2$ являются корнями уравнения (1).

Действительно,

$$x_1^2 - 2x_1 + 2 = (1 + i)^2 - 2(1 + i) + 2 = 1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2 = 0,$$

$$x_2^2 - 2x_2 + 2 = (1 - i)^2 - 2(1 - i) + 2 = 1 - 2i + i^2 - 2 + 2i + 2 = 0.$$

Числа

$$a + bi \text{ и } a - bi$$

называют **сопряжёнными**.

Например, $3 + 2i$ и $3 - 2i$ — сопряжённые числа.

С введением комплексных чисел можно утверждать, что любое квадратное уравнение имеет два корня: действительные различные, если дискриминант положительный, действительные совпадающие, если дискриминант равен нулю, и комплексные (различные), если дискриминант отрицательный.

Таким образом, квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \tag{3}$$

имеет два корня, вычисляемые по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4}$$

Если $b^2 - 4ac < 0$, эти формулы можно записать так:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}, \tag{5}$$

где $\sqrt{|b^2 - 4ac|}$ есть арифметический квадратный корень из положительного числа $|b^2 - 4ac|$.

Итак, при $b^2 - 4ac < 0$ корни уравнения (3) комплексные различные, сопряжённые.

**Пример.** Решим уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0. \tag{6}$$

Корни уравнения (6) ищем по формулам (4):

$$x_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = 1 \pm 2i.$$

Итак, уравнение (6) имеет два корня: $1 + 2i$ и $1 - 2i$.

Отметим, что теорема Виета остаётся верной и в случае, когда дискриминант квадратного уравнения отрицателен, только в этом случае корни $x_1$ и $x_2$ будут комплексными числами.

**356.** а) Какой буквой обозначают символ $\sqrt{-1}$?
б) Как называют символ $i$?
в) Что называют комплексным числом?
г) По каким правилам выполняют действия с комплексными числами?

**357.** Выполните указанные действия:
а) $(2 - 3i) + (5 + i)$;
б) $(7 - 2i) - (4 - 3i)$;
в) $(3 - 5i)(4 - 6i)$;
г) $(40 + i) : (3 - i)$;
д) $(5 + 4i)(5 - 4i)$;
е) $(1 + i) : (1 - i)$.

**358.** Решите квадратное уравнение:
а) $x^2 + 1 = 0$;
б) $x^2 + 4 = 0$;
в) $x^2 + 5 = 0$;
г) $x^2 + 7 = 0$;
д) $x^2 + x + 1 = 0$;
е) $x^2 + 2x + 3 = 0$;
ж) $2x^2 - 5x + 5 = 0$;
з) $x^2 + 6x + 10 = 0$.

## 3. Исторические сведения

Квадратные уравнения умели решать ещё вавилоняне. Это было связано с решением задач о нахождении площадей земельных участков, а также с развитием астрономии.

Однако у вавилонян ещё не было понятия отрицательного числа, и поэтому корни квадратного уравнения могли быть только положительными.

В «Арифметике» греческого математика из Александрии Диофанта (III в.) нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится ряд задач, решаемых при помощи составления уравнений.

Есть в ней и такая задача:

Найти два числа по их сумме 20 и произведению 96.

Если обозначим одно из неизвестных через $y$, то придём к квадратному уравнению

$$y(20 - y) = 96.$$

Чтобы избежать решения квадратного уравнения общего вида, Диофант обозначил неизвестные числа через $10 + x$ и $10 - x$. Их сумма равна 20.

Составим уравнение и решим его:

$$(10 + x)(10 - x) = 96,$$
$$100 - x^2 = 96,$$
$$x^2 = 4.$$

Во времена Диофанта ещё не применяли отрицательных чисел, поэтому Диофант указал лишь один корень последнего уравнения $x_1 = 2$. Тогда неизвестные числа равны $10 + 2 = 12$ и $10 - 2 = 8$. Ясно, что для $x_2 = -2$ ответ будет тем же.

Задачи на квадратные уравнения встречаются в трудах индийских математиков уже с V в. н. э. Вот одна из задач индийского математика XII в. Бхаскары:

«Обезьянок резвых стая,
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам...
Стали прыгать, повисая...
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?»

Этой задаче соответствует квадратное уравнение

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x.$$

Квадратные уравнения классифицируются в трактате «Алгебра» узбекского математика аль-Хорезми, в нём приводятся и способы их решения.

Только в XVI в. благодаря главным образом исследованиям французского математика Ф. Виета (1540—1603) уравнения 2-й степени, так же, впрочем, как 3-й и 4-й степеней, стали рассматривать в буквенных обозначениях. Именно Виет ввёл буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для данных, т. е. коэффициентов уравнений. Особенно ценил Виет открытые им формулы, которые теперь называются формулами Виета. Отметим, что сам Виет признавал только положительные корни.

Лишь в XVII в. после работ Р. Декарта (1596—1650), И. Ньютона (1643—1727) и других математиков решение квадратных уравнений приняло современный вид.

В «Арифметике» Л. Ф. Магницкого (1669—1739) имеется немало задач на квадратные уравнения. Вот одна из них:

«Некий генерал хочет с 5000 человек баталию учинить, и чтобы та была в лице вдвое, нежели в стороне. Колико оная баталия имети будет в лице и в стороне», т. е. сколько солдат надо поставить по фронту и сколько им в затылок, чтобы число солдат по фронту было в два раза больше, чем число солдат, расположенных им в затылок?

Ещё в древневавилонских текстах (III—II вв. до н. э.) и у Диофанта (III в.) встречаются задачи, для решения которых требуется решать уравнения второй степени. Задачи на решение рациональных уравнений рассматривали таджикский математик, поэт и философ Омар Хайям (1040—1123), немецкий математик Иоганн Мюллер (Региомонтан) (1436—1476).

Уже в древности математики сталкивались в процессе решения задач с извлечением корня квадратного из отрицательного числа, в этом случае задача считалась неразрешимой. Однако постепенно выяснилось, что решение многих задач, задаваемых в действительных числах, получает простое объяснение при помощи выражений

$$a + b\sqrt{-1},$$

которые в конце концов тоже стали называть числами, но уже комплексными.

Первое обоснование простейших действий над комплексными числами дал итальянский математик Р. Бомбелли (1530—1572), хотя ещё долгое время к комплексным числам относились как к чему-то сверхъестественному. Член Петербургской академии наук Л. Эйлер (1707—1783) внёс существенный вклад в вопросы теории комплексных чисел. После его работ комплексные числа получили окончательное признание. Само название «комплексное число» было предложено в 1831 г. немецким математиком К. Гауссом (1777—1855).

В настоящее время комплексные числа широко используются в физике и технике.


ГЛАВА 3

# ЛИНЕЙНАЯ, КВАДРАТИЧНАЯ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИИ

При работе с материалом главы 3 вам предстоит изучить линейную, квадратичную, дробно-линейную функции и их свойства, научиться строить их графики и применять функции к решению задач. Это основные функции, используемые в школьной математике и физике.

## § 6. Линейная функция

### 6.1. Прямая пропорциональность

Функцию

$$y = kx, \tag{1}$$

где $k$ — данное не равное нулю число, называют **прямой пропорциональной зависимостью** или коротко — **прямой пропорциональностью**. Эта функция определена для всех действительных чисел $x$, т. е. область определения функции $y = kx$ есть множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Название «прямая пропорциональность» связано с тем, что для положительных чисел $x$, $y$ и $k$, для которых верно равенство (1), с увеличением $x$ увеличивается $y$. А для любых двух отличных от нуля чисел $x_1$ и $x_2$ соответствующие значения $y_1 = kx_1$ и $y_2 = kx_2$ им пропорциональны.

Действительно, так как $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{kx_1}{x_1} = k$ и $\dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{kx_2}{x_2} = k$, то

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Если функция задана формулой (1), то говорят ещё, что переменная $y$ пропорциональна переменной $x$ с **коэффициентом пропорциональности $k$**.

Например, функция $s = 80t$ есть прямая пропорциональность. При равномерном движении тела путь ($s$), пройденный им, прямо пропорционален времени ($t$) с коэффициентом пропорциональности, равным его скорости (80).

Каждая из функций $y = 5x$, $y = x$, $y = -0{,}2x$ является прямой пропорциональностью с коэффициентом пропорциональности в первом случае $k = 5$, во втором $k = 1$, в третьем $k = -0{,}2$.

**359.** Какую функцию называют прямой пропорциональностью?

**360.** Является ли прямой пропорциональностью функция:

а) $y = 2x$; б) $y = -3x$; в) $y = 0x$;
г) $y = x$; д) $y = -x$; е) $y = 2x + 1$;
ж) $y = x^2$; з) $y = \frac{1}{x}$; и) $y = -5x - 2$?

Если да, то назовите коэффициент пропорциональности.

**361.** Функция задана формулой $y = 2x$.

а) Заполните таблицу значений функции:

| $x$ | 0 | 1 | –1 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | 6 | –8 |

б) Найдите значение $y$ при $x$, равном 3; 5; –3; –4.
в) Найдите значение $x$ при $y$, равном 8; 4; –2; 1.

**362.** Функция задана формулой $y = 3x$.

а) Найдите значения функции $y_1$ и $y_2$, соответствующие значениям аргумента $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$.
б) Найдите значения аргумента $x_1$ и $x_2$, соответствующие значениям функции $y_1 = 6$ и $y_2 = -12$.

**363.** Определите коэффициент пропорциональности $k$ функции $y = kx$, если:

а) $x = 3$, $y = 6$; б) $x = -2$, $y = -10$;
в) $x = 2$, $y = -8$; г) $x = -1$, $y = 4$.

**364.** Определите коэффициент пропорциональности $k$ функции $y = kx$ и заполните таблицу её значений.

а)

| $x$ | –3 | 0 | 5 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | –5 | 6 | –7 |

б)

| $x$ | 2 | 1 | 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | 12 | 0 | –8 |

в)

| $x$ | 2 | 0 | 4 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | 2 | –3 | 5 |

г)

| $x$ | –4 | 0 | –6 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | 3 | 4 | –8 |

**365.** Определите, одинаковые или разные знаки имеют $x$ ($x \neq 0$) и соответствующее ему $y$, если функция задана формулой:
а) $y = 2x$; б) $y = 3x$;
в) $y = kx$, $k > 0$; г) $y = -5x$;
д) $y = -1{,}5x$; е) $y = kx$, $k < 0$.

## 6.2. График функции $y = kx$

Зададим на плоскости прямоугольную систему координат $xOy$ и рассмотрим, например, функцию $y = 2x$.

Эта функция определена для любых действительных чисел $x$, при этом каждому числу $x$ соответствует число $y$, равное $2x$. Следовательно, каждому значению $x$ соответствует точка $A(x; y)$ координатной плоскости, где $y = 2x$, т. е. каждому значению $x$ соответствует точка $A(x; 2x)$ координатной плоскости, имеющая абсциссу $x$ и ординату $2x$.

Графиком функции $y = 2x$ является множество точек координатной плоскости $xOy$ с координатами $(x; 2x)$, где $x$ — любое действительное число.

Ниже приведена таблица некоторых значений $x$, соответствующих им значений $y$ ($y = 2x$) и точек $(x; 2x)$.

| $x$ | $y = 2x$ | $(x; y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $2 \cdot 0 = 0$ | (0; 0) |
| 1 | $2 \cdot 1 = 2$ | (1; 2) |
| −1 | $2 \cdot (-1) = -2$ | (−1; −2) |
| 2 | $2 \cdot 2 = 4$ | (2; 4) |
| −2 | $2 \cdot (-2) = -4$ | (−2; −4) |
| 3 | $2 \cdot 3 = 6$ | (3; 6) |
| −3 | $2 \cdot (-3) = -6$ | (−3; −6) |

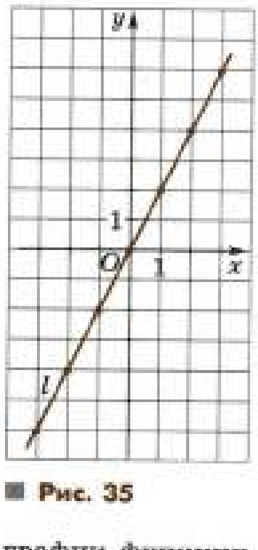


Рис. 35

Полученные точки отмечены на рисунке 35. Приложив линейку, мы видим, что эти точки лежат на одной прямой ($l$), проходящей через начало координат и точку (1; 2).

Возникает вопрос: если мы будем задавать другие значения $x$, то будут ли соответствующие точки лежать на прямой $l$?

Ответ: да, будут.

В дополнении 3 к главе 3 доказывается, что график функции $y = 2x$ есть прямая, проходящая через начало координат и точку (1; 2).

Рассмотрим теперь функцию

$$y = kx,$$

где $k$ — данное число.

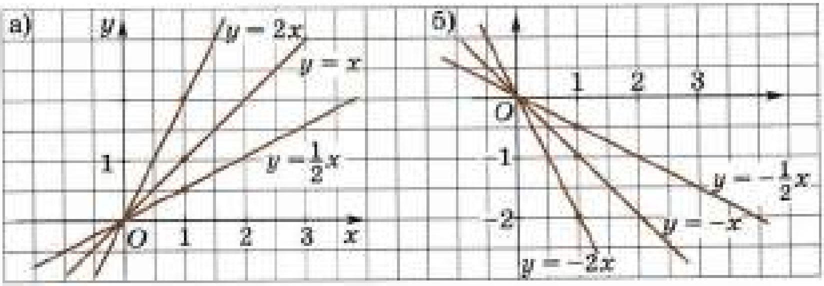



**Рис. 36**

*Графиком функции* $y = kx$ является множество точек координатной плоскости $xOy$ с координатами $(x;\ kx)$, где $x$ — любое действительное число.

Так же, как для функции $y = 2x$, можно доказать, что для любого $k$ $(k \neq 0)$ график функции $y = kx$ есть прямая, проходящая через начало координат и точку $(1;\ k)$.

При положительном $k$ точка $(1;\ k)$ находится в I четверти, а при отрицательном $k$ — в IV четверти.

Отметим, что любая точка оси абсцисс имеет ординату $y$, равную 0, независимо от её абсциссы. Таким образом графиком функции $y = 0$ является ось абсцисс.

Итак, **графиком функции $y = kx$, где $k$ есть некоторое данное число (положительное, отрицательное или нуль), является прямая, проходящая через начало координат и точку $B(1;\ k)$.**

Вместо того чтобы говорить «график функции $y = kx$», часто говорят «прямая $y = kx$». Говорят ещё, что прямая, проходящая через начало координат и точку $B(1;\ k)$, имеет уравнение $y = kx$.

Число $k$ называют **угловым коэффициентом** прямой $y = kx$.

Если угловой коэффициент $k$ прямой $y = kx$ положителен $(k > 0)$, то она образует острый угол с положительным направлением оси $x$, если угловой коэффициент $k$ прямой $y = kx$ отрицателен $(k < 0)$, то она образует тупой угол с положительным направлением оси $x$ — угол отсчитывается против часовой стрелки (рис. 36). А если угловой коэффициент $k = 0$, то прямая $y = kx$ образует нулевой угол с положительным направлением оси $Ox$ (прямая совпадает с осью $Ox$).

**Замечание.** Напомним, что для построения прямой достаточно знать координаты двух точек, лежащих на ней.

При построении прямой $y = kx$ точку $B(1;\ k)$ можно заменить любой другой точкой $B_1(x_0;\ kx_0)$, достаточно удалённой от начала координат, чтобы чертёж получился более точным.

**Пример.** Зададим систему координат $tOs$. Будем считать, что 1 см на оси $t$ соответствует 1 с, а 1 см на оси $s$ соответствует 1 м.

По оси $s$ равномерно вверх движется точка со скоростью $v = 2$ м/с, при этом в начальный момент времени она находилась в точке $O$. К моменту времени $t$ ($t > 0$) точка пройдёт путь $2t$, и её ордината в этот момент будет

$$s = 2t.$$

Мы получили закон движения точки, выражающий зависимость её ординаты $s$ от времени $t$. График функции $s = 2t$ ($t \geqslant 0$) — полупрямая, выходящая из начала координат с угловым коэффициентом, равным 2, т. е. луч (рис. 37).

Отметим, что точка движется по оси $s$, а график её движения только помогает нам наглядно узнавать координату $s$ движущейся точки в момент времени $t$.

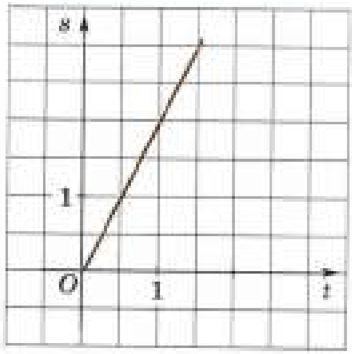


Рис. 37

**366.** а) Что является графиком функции $y = kx$?
б) Как записывается уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $(1; k)$, где $k$ — данное число?
в) Что называют угловым коэффициентом прямой $y = kx$?
г) Какой угол с осью $x$ образует прямая $y = kx$ при $k > 0$; при $k < 0$; при $k = 0$?

**367.** Задана функция $y = 3x$.
а) Укажите, для каких значений $x$ определена данная функция.
б) Вычислите значения $y$, взяв значения $x$ от $-2$ до 2 через 1 единицу. Решение оформите в виде таблицы.

| $x$ | $y = 3x$ | $(x; 3x)$ |
|---|---|---|
| | | |

в) Постройте систему координат $xOy$ (единичные отрезки по 1 см). В системе координат постройте точки с вычисленными координатами.
г) Постройте график функции $y = 3x$.
д) В каких координатных четвертях располагается график данной функции?
е) С помощью графика определите

$$y(-3),\ y(4),\ y\left(\frac{1}{2}\right),\ y(1{,}2),\ y(-0{,}7).$$

Проверьте полученные результаты вычислением с помощью формулы.

ж) При каких значениях $x$ выполняется неравенство: $y > 0$; $y < 0$?

з) При каких значениях $x$ выполняется неравенство: $y > 3$; $y < -2$?

и) Определите с помощью графика значение $x$, если:
1) $y(x) = 2$; 2) $y(x) = 1$; 3) $y(x) = -6$.

к) Как изменится значение $y$, если значение $x$ увеличить на единицу?

**368.** Задана функция $y = -\frac{1}{2}x$. Исследуйте эту функцию по плану предыдущего задания.

**369.** Укажите координаты таких двух точек, с помощью которых можно построить график функции:
а) $y = 7x$; б) $y = -3x$; в) $y = 0{,}2x$;
г) $y = -1{,}4x$; д) $y = 0 \cdot x$; е) $y = -x$.
Постройте графики этих функций.

**370.** Постройте график функции:
а) $y = \frac{2}{3}x$; б) $y = -4x$; в) $y = 10x$; г) $y = 0{,}1x$.

**371.** Постройте график функции:
а) $y = 100x$; б) $y = -3000x$;
в) $y = 0{,}0001x$; г) $y = \frac{1}{400}x$.

**Указание.** Для удобства построения следует использовать различные единицы масштаба по осям координат.

**372.** Какой формулой задана прямая, проходящая через начало координат и точку:
а) $A(1; 2)$; б) $B(1; 0{,}5)$; в) $C(1; -1)$;
г) $D(1; 5)$; д) $E\left(1; \frac{2}{3}\right)$; е) $K(1; -1{,}7)$?

**373.** Принадлежит ли прямой $y = -2{,}5x$ точка:
а) $A(1; -2{,}5)$; б) $B(1; 2{,}5)$; в) $C(-1; -2{,}5)$;
г) $D(-1; 2{,}5)$; д) $E(4; 10)$; е) $K(3; -7{,}5)$?

**374.** В каких четвертях расположен график функции:
а) $y = 36x$; б) $y = 100x$; в) $y = 7{,}2x$; г) $y = -0{,}2x$?

**375.** Проверьте, принадлежат ли точки $A$ и $B$ графику функции $y = kx$, если:
а) $A(1; 3)$, $B(3; 9)$; б) $A(1; -2)$, $B(3; -6)$;
в) $A(2; -10)$, $B(-1; 5)$; г) $A(3; 9)$, $B(1; 4)$;
д) $A(0{,}5; 4)$, $B(-2; 16)$; е) $A\left(\frac{2}{3}; 1\right)$, $B(1; 3{,}5)$.

**376.** а) Задана функция $y = 1\frac{1}{3}x$. Точка (6; $a$) принадлежит графику этой функции. Найдите $a$.
б) Задана функция $y = -2{,}7x$. Точка ($b$; −3) принадлежит графику этой функции. Найдите $b$.
в) Точка (6; 4) принадлежит графику функции $y = kx$. Найдите $k$.

**377.** Какой формулой задана прямая, проходящая через начало координат и точку:
а) (6; 8); б) (4; −0,5); в) (3; 1);
г) (−2; 2); д) $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$; е) (−2; −3)?

**378.** а) 1 кг конфет стоит 40 р. Выразите формулой зависимость стоимости конфет $p$ (р.) от их массы $m$ (кг). Постройте график полученной зависимости.
б) Мотоцикл движется по шоссе со скоростью 60 км/ч. Выразите формулой зависимость расстояния $s$ (км) от времени $t$ (ч). Постройте график полученной зависимости. Какие значения может принимать $t$?

**379.** На рисунке 38 изображён график функции $y = kx$. Определите коэффициент $k$.

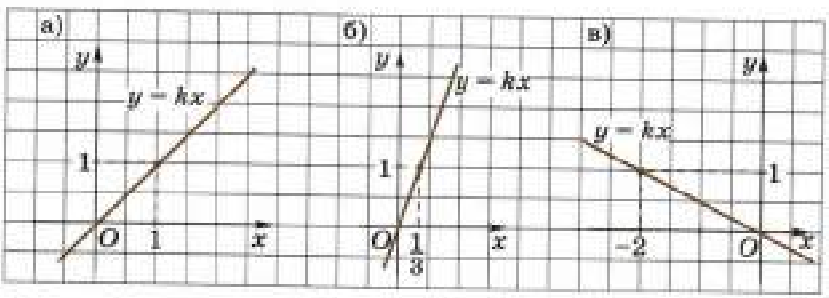



**Рис. 38**

**380.** В одной системе координат постройте графики функций:
а) $y = 2x$ и $y = -\frac{1}{2}x$; б) $y = -3x$ и $y = \frac{1}{3}x$;
в) $y = 4x$ и $y = -\frac{1}{4}x$; г) $y = -5x$ и $y = \frac{1}{5}x$.
Определите угол между пересекающимися прямыми.

**381.** **Доказываем.** Докажите, что прямые $y = kx$ и $y = -\frac{1}{k}x$ ($k \neq 0$) перпендикулярны.

## 6.3. Линейная функция и её график

Функцию $y = kx + b$, где $k$ и $b$ — данные числа, называют **линейной функцией**.

Линейная функция определена на множестве всех действительных чисел, т. е. область определения функции $y = kx + b$ есть множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Если $b = 0$, то получим функцию $y = kx$, которую уже изучали в предыдущем пункте.

Примеры линейных функций: $y = 2x + 4$, $y = -x + 5$, $y = -0{,}5x$.

Графиком функции $y = kx + b$ является множество точек координатной плоскости $xOy$ с координатами $(x; kx + b)$, где $x$ — любое действительное число.

Чтобы построить, например, график функции $y = 2x + 4$ в прямоугольной системе координат $xOy$, построим сначала график функции $y = 2x$. Это прямая, проходящая через точки $O(0; 0)$ и $B(1; 2)$ (рис. 39, *а*). Передвинув эту прямую параллельно самой себе вверх на 4 единицы, получим график функции $y = 2x + 4$ (рис. 39, *б*), потому что если $A$ — произвольная точка графика функции $y = 2x$, а $C$ — точка графика функции $y = 2x + 4$, имеющая ту же абсциссу $x$, то ордината точки $C$, очевидно, на 4 единицы больше ординаты точки $A$.

Итак, прямая $y = 2x + 4$ параллельна прямой $y = 2x$. Кроме того, прямая $y = 2x + 4$ пересекает ось ординат в точке $D(0; 4)$, в чём можно убедиться, положив $x = 0$ в уравнении $y = 2x + 4$.

Рассуждение, которое провели на примере функции $y = 2x + 4$, по аналогии обобщается на любую линейную функцию $y = kx + b$, где $k$ и $b$ — любые данные числа.

Итак, **график линейной функции $y = kx + b$ есть прямая, пересекающая ось ординат в точке $D(0; b)$, параллельная прямой $y = kx$.**

Легко видеть, что точка $B(1; k + b)$ лежит на прямой $y = kx + b$. Поэтому можно сказать так: график линейной функции $y = kx + b$ есть прямая, проходящая через две точки $D(0; b)$ и $B(1; k + b)$.

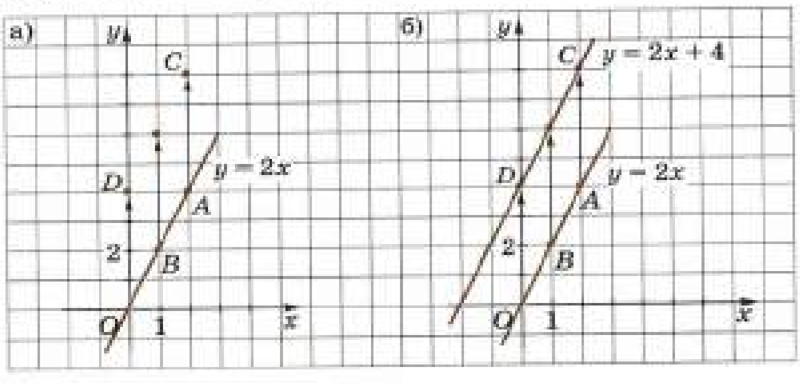



Рис. 39

**Замечание 1.** Для построения прямой $y = kx + b$ необязательно проводить её через точки $D(0;\ b)$, $B(1;\ k + b)$, можно провести её через любые две точки, координаты которых удовлетворяют уравнению этой прямой. Лучше брать точки, достаточно удалённые друг от друга, чтобы чертёж получился более точным.

**Замечание 2.** Отметим, что график функции $y = 2x + 4$ можно было построить иначе, чем он был построен выше. Так как $2x + 4 = 2(x + 2)$, то функцию можно задать формулой $y = 2(x + 2)$.

Чтобы построить график этой функции в прямоугольной системе координат $xOy$, построим сначала график функции $y = 2x$ (рис. 40, *а*).

Если эту прямую передвинуть на 2 единицы влево параллельно самой себе, то получится график функции $y = 2(x + 2)$ (рис. 40, *б*). В самом деле, если $M$ — произвольная точка графика функции $y = 2x$, а $N$ — точка графика функции $y = 2(x + 2)$, имеющая ту же ординату $y$, то абсцисса точки $N$, очевидно, на 2 единицы меньше абсциссы точки $M$.

Например, значение $y = 0$ функция $y = 2x$ принимает при $x = 0$, а функция $y = 2(x + 2)$ — при $x = -2$; значение $y = 4$ функция $y = 2x$ принимает при $x = 2$, а функция $y = 2(x + 2)$ — при $x = 0$ и т. д.

Аналогично рассуждая, получим, что график функции $y = 2(x - 3)$ можно получить сдвигом параллельно самому себе графика функции $y = 2x$ на 3 единицы вправо.

Коэффициент $k$ в уравнении $y = kx + b$ называют **угловым коэффициентом** этой прямой. Число $b$ есть ордината точки пересечения прямой с осью $y$.

Заметим, что две прямые $y = kx + b$ и $y = k_1x + b_1$, имеющие одинаковые угловые коэффициенты ($k = k_1$) и разные числа $b$ и $b_1$ ($b \neq b_1$), параллельны.

Если $k = 0$, то мы получим функцию $y = b$, явно от $x$ не зависящую. Эта функция выражает следующий закон: каждому значению $x$ соответствует одно и то же число $y = b$.

Функцию $y = b$ называют **постоянной**. График её — прямая, параллельная оси $x$, пересекающая ось $y$ в точке $(0;\ b)$ (рис. 41). Угловой коэффициент её равен нулю.

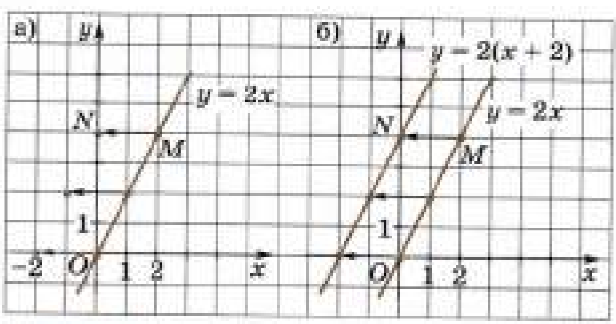



**Рис. 40**

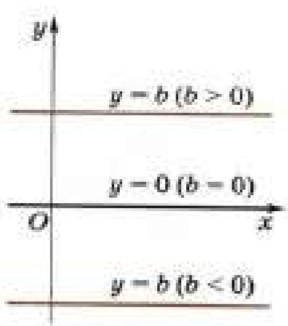



**Рис. 41**

**382.** а) Какую функцию называют линейной функцией?
б) Что является графиком линейной функции?
в) Что называют угловым коэффициентом прямой $y = kx + b$?
г) При каком условии прямые $y = kx + b$ и $y = k_1x + b_1$ параллельны?
д) Что является графиком функции $y = b$? Как называют эту функцию?
е) Какова область определения линейной функции?

**383.** Какие из следующих функций являются линейными? Назовите $k$ и $b$ для функций вида $y = kx + b$.
а) $y = 3x + 1$; б) $y = 5x$; в) $y = 70 - 2x$;
г) $y = x^2 - 1$; д) $y = x - 3x$; е) $y = 0{,}5 + 3x$;
ж) $y = x$; з) $y = 0$; и) $y = \dfrac{5x - 1}{6}$.

**384.** Постройте в одной системе координат графики функций: $y = 2x$, $y = 2x + 2$, $y = 2x - 1$, $y = 2x - 2{,}5$.

**385.** Постройте график функции $y = -2x + 1$.
а) Какова область определения этой функции?
б) В каких четвертях расположен график этой функции?
в) С помощью графика определите $y(2)$, $y(-3)$, $y(0{,}5)$, $y(0{,}3)$. Проверьте полученные результаты вычислением с помощью формулы.
г) При каких значениях $x$ выполняется неравенство: $y > 0$; $y < 0$; $y > 1$; $y < 1$?
д) Определите с помощью графика значение $x$, если: $y(x) = 3$, $y(x) = -1$, $y(x) = 2{,}5$, $y(x) = 0$.
е) Как изменится значение $y$, если значение $x$ увеличить на единицу?
ж) Увеличивается или уменьшается $y$ с увеличением $x$?

**386.** Постройте график функции $y = -2x - 1$. Ответьте на вопросы предыдущего задания.

**387.** В каких точках пересекает ось $Oy$ и ось $Ox$ график функции:
а) $y = -3x - 1$; б) $y = 4 - x$; в) $y = \dfrac{2}{7}x + 1{,}2$; г) $y = -2{,}1 + 0{,}5x$?

**388.** Назовите координаты двух точек, по которым удобно строить график функции:
а) $y = 3x - 5$; б) $y = \dfrac{1}{4}x + 2$;
в) $y = -7x + 1$; г) $y = -2{,}5 + 0{,}5x$.

**389.** Какой формулой задана прямая, проходящая через точки:
а) $(0; 8)$ и $(1; 12)$; б) $(0; -1)$ и $(1; 2)$; в) $(0; 1)$ и $(1; 4)$;
г) $(0; 1)$ и $(1; -5)$; д) $(0; 7)$ и $(1; 7)$; е) $(0; -3)$ и $(1; 0)$?

**390.** Постройте график функции:

а) $y = x + 1$; б) $y = x - 2$; в) $y = x + 2{,}5$;
г) $y = x - 0{,}5$; д) $y = -x$; е) $y = -x + 5$;
ж) $y = 2x - 2$; з) $y = x - 1$; и) $y = -5x - \frac{1}{2}$;
к) $y = -0{,}5x + 2$; л) $y = 3 - x$; м) $y = 1 - 2x$;
н) $y = 7 - 0{,}5x$; о) $y = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$; п) $y = 7$.

**391.** Проверьте, принадлежит ли прямой $y = 0{,}5x + 3$ точка:
а) $A(4; 7)$; б) $A(12; 9)$; в) $A(-4; -1)$;
г) $A(-1; 1)$; д) $A(3; 4{,}5)$; е) $A(5; 6{,}5)$.

**392.** В каких четвертях расположен график функции:
а) $y = 5x + 4$; б) $y = -5x + 4$; в) $y = -5x - 3$; г) $y = 5x - 3$?

**393.** Постройте график функции:
а) $y = 40x + 20$; б) $y = 50 - 20x$;
в) $y = -0{,}02x + 0{,}01$; г) $y = 3x - 0{,}007$.

**Указание.** Для удобства построения следует использовать различные единицы масштаба по осям координат.

**394.** Определите без построения, пересекаются ли графики данных функций, а затем постройте их:
а) $y = 5x$ и $y = 5x - 8$; б) $y = -\frac{2}{3}$ и $y = 6x - 1$;
в) $y = 7x - 12$ и $y = 25$; г) $y = 3x$ и $y = -0{,}5 + 2x$.

**395.** Постройте график функции $y = x + 3$. Принадлежат ли графику функции точки: $(-2; -5)$, $(3; 6)$, $(17; -10)$, $(145; 148)$; $(0; 0)$?

**396.** Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ принадлежат графику функции:
а) $y = 2x - 3$; б) $y = -2x + 3$;
в) $y = kx + b$, $k > 0$; г) $y = kx + b$, $k < 0$.
Верно ли, что если $x_1 > x_2$, то $y_1 > y_2$?

**397.** Какой геометрический смысл имеют числа $k$ и $b$ для линейной функции $y = kx + b$?

**398.** Как изменяется положение прямой $y = kx + b$ на координатной плоскости, если:
а) угловой коэффициент возрастает от 0 до 100;
б) $b$ возрастает от 0 до 100?

**399.** а) Задана функция $y = -4x + 3$. Точка $(1; a)$ принадлежит графику этой функции. Найдите $a$.
б) Задана функция $y = 12x - 1$. Точка $(b; -3)$ принадлежит графику этой функции. Найдите $b$.
в) Определите угловой коэффициент $k$ функции $y = kx + 1$, если точка $A(2; 5)$ принадлежит её графику.

**400.** Точки $A$ и $B$ принадлежат графику функции $y = kx + b$. Определите угловой коэффициент $k$, если:
а) $A(6; 5)$ и $B(12; 11)$; б) $A(6; 7)$ и $B(-2; 3)$.

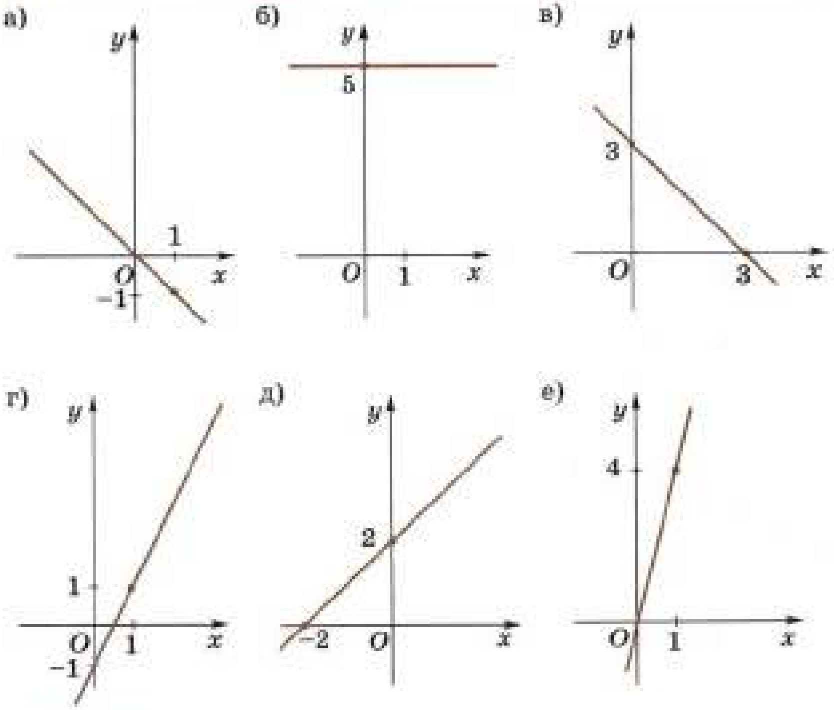



Рис. 42

**401.** Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ принадлежат графику функции $y = kx + b$. Выразите угловой коэффициент $k$ через $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$, если известно, что $x_1 \neq x_2$.

**402.** Какой из графиков, приведённых на рисунке 42, является графиком функции:
а) $y = 2x - 1$; б) $y = -x + 3$;
в) $y = 5$; г) $y = 4x$;
д) $y = x + 2$; е) $y = -x$?

**403.** На рисунке 43 изображены прямые $a$, $b$, $c$ и $d$. Какой формулой задана каждая из них?

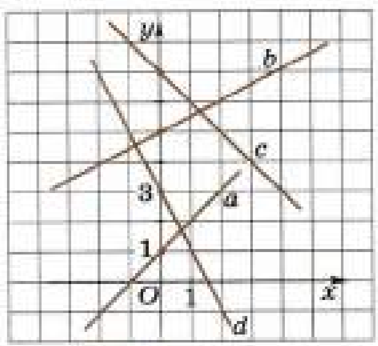



Рис. 43

**404.** На сколько единиц вверх или вниз нужно перенести график функции $y = 3x$, чтобы получить график функции:
а) $y = 3x + 2$; б) $y = 3x - 4$;
в) $y = 3x + 1$; г) $y = 3x - 0,5$;
д) $y = 3x + 7$; е) $y = 3x + 5,5$?

**405.** На сколько единиц вправо или влево нужно перенести график функции $y = 3x$, чтобы получить график функции:
а) $y = 3(x + 2)$; б) $y = 3(x - 4)$; в) $y = 3(x + 1)$;
г) $y = 3x + 3$; д) $y = 3x - 6$; е) $y = 3x + 9$?

## 6.4. Равномерное движение

**Пример 1.** Зададим координатную ось $s$ с начальной точкой $O$ и единичным отрезком длиной 1 см.

Пусть в момент времени $t = 0$ точка оси $s$, имеющая координату 3, начала движение в положительном направлении этой оси равномерно со скоростью 2 см/с (рис. 44). Координата $s$ (см) этой точки есть функция от времени $t$ (с), выражаемая формулой

$$s = 3 + 2t.$$

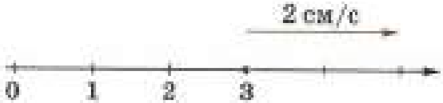


Рис. 44

Данная функция рассматривается для положительных значений $t$ и $t = 0$, поэтому говорят, что она определена для неотрицательных значений $t$ ($t \geq 0$).

Введём прямоугольную систему координат $tOs$ и в ней изобразим график функции

$$s = 3 + 2t \ (t \geq 0), \qquad (1)$$

или, как говорят, график движения точки (рис. 45). Это луч, выходящий из точки $C(0; 3)$, параллельный прямой $s = 2t$.

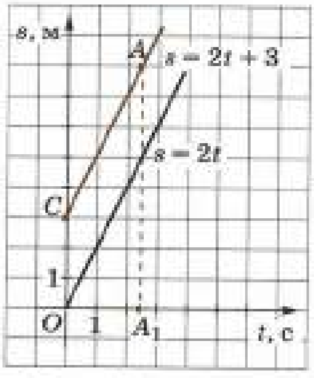


Рис. 45

Пользуясь этим графиком, можно изучать рассматриваемое движение.

Например, чтобы узнать, где находится точка в заданный момент времени $t$, надо отложить по оси абсцисс от $O$ вправо отрезок $OA_1 = t$ и восставить из $A_1$ перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком движения в некоторой точке $A$. Число $s$, равное длине отрезка $AA_1$, есть координата на оси $s$ движущейся точки в момент времени $t$.

Равенство (1) называют законом движения точки, а соответствующий ему график — графиком движения точки.

**Пример 2.** Пусть $tOs$ — прямоугольная система координат, единичный отрезок на оси $t$ — секунда (с), на оси $s$ — сантиметр (см).

Пусть точка движется по оси $s$, и при этом её координата $s$ есть линейная функция от времени $t$, выражаемая формулой

$$s = 4t + 2 \ (t \geq 0). \qquad (2)$$

Если в этой формуле положить $t = 0$, то получим $s = 2$. Это показывает, что движущаяся точка в момент времени $t = 0$ имела координату $s = 2$.

Отметим два произвольных момента времени $t_1$ и $t_2$, где $0 \leq t_1 < t_2$.

В момент $t = t_1$ точка имеет координату $s = s_1$, вычисляемую по формуле $s_1 = 4t_1 + 2$.

В момент $t = t_2$ точка имеет координату $s = s_2$, вычисляемую по формуле $s_2 = 4t_2 + 2$.

Промежуток времени между моментами $t_1$ и $t_2$ равен $t_2 - t_1$. Путь, пройденный точкой за этот промежуток времени, очевидно, равен:

$$s_2 - s_1 = (4t_2 + 2) - (4t_1 + 2) = 4(t_2 - t_1).$$

Отсюда скорость точки равна:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{4(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 4.$$

Мы получили, что если точка движется по оси $s$ по закону, выражаемому формулой (2), то она движется равномерно со скоростью 4 см/с и при этом в момент времени $t = 0$ она находилась в точке $s = 2$.

**406.** Напишите закон движения точки вдоль оси $s$:
а) со скоростью 4 см/с, если она в момент времени $t = 0$ имеет координату $s = 5$;
б) со скоростью 6 см/с, если она в момент времени $t = 0$ имеет координату $s = 2$.
Постройте графики движения.

**407.** Дан закон движения точки вдоль оси $s$:
а) $s = 2t - 7$; б) $s = t + 3$; в) $s = 3t$.
Определите координату точки в момент времени $t = 0$, $t = 3$.
Определите скорость точки. Постройте график движения.

**408.** На рисунке 46 изображён график движения точки. Менялась ли координата точки в промежуток времени от 0 до 3? В какой момент времени началось движение точки и с какой скоростью?

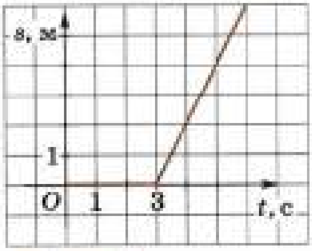



Рис. 46

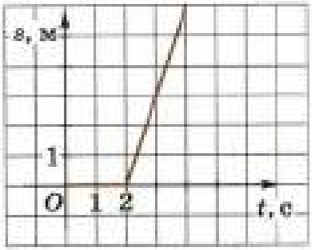



Рис. 47

**409.** Функция, задающая зависимость координаты $s$ от времени $t$, выражена формулой

$$s(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \leqslant t < 3, \\ 2t - 6, \text{ если } t \geqslant 3. \end{cases}$$

Ей соответствует график, изображённый на рисунке 46. Напишите формулу, которой задаётся функция $s(t)$, график которой изображён на рисунке 47.

**410.** Напишите формулу зависимости $s(t)$, график которой изображён на рисунке 48.

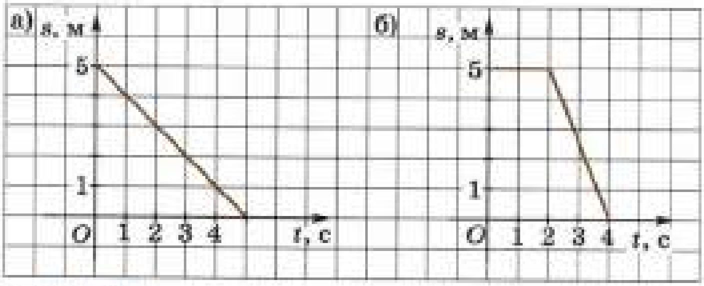



**Рис. 48**

**411.** На рисунке 49 заданы графики движения двух точек. Определите по графику:
а) какая из точек двигалась в положительном направлении оси $Os$, какая — в отрицательном;
б) в какой момент времени началось движение каждой из точек;
в) в какой момент времени точки встретились;
г) с какой скоростью двигалась каждая из точек;
д) какой формулой задаётся зависимость $s(t)$ для каждой из движущихся точек.

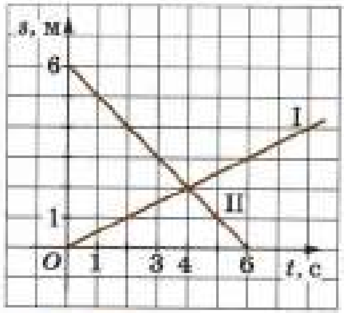



**Рис. 49**

**412.** Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов. Первый мог пройти расстояние между пунктами за 6 ч, а второй — за 3 ч. Через сколько часов после начала движения они встретятся?
Решите задачу, построив графики движения в одной системе координат.

## 6.5. Функция $y = |x|$ и её график

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = |x|$. Так как по определению модуля числа $x$

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -x, \text{ если } x < 0, \end{cases}$$

что коротко иногда записывают так:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x \leqslant 0, \end{cases}$$

то эту функцию можно записать так:

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

На рисунке 50, *а* изображён график этой функции при $x \geqslant 0$, а на рисунке 50, *б* — при $x \leqslant 0$. Тогда график функции $y = |x|$ на всей оси $Ox$ имеет вид, как на рисунке 51.

Сформулируем основные свойства функции $y = |x|$. Эта функция:

**1) определена для любых действительных значений $x$**, т. е. её область определения — промежуток $(-\infty; +\infty)$;

**2) принимает только неотрицательные значения**, т. е. её область значений — промежуток $[0; +\infty)$;

**3) убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$;**

**4) чётная:** $|-x| = |x|$;

**5) непрерывная на промежутке** $(-\infty; +\infty)$.

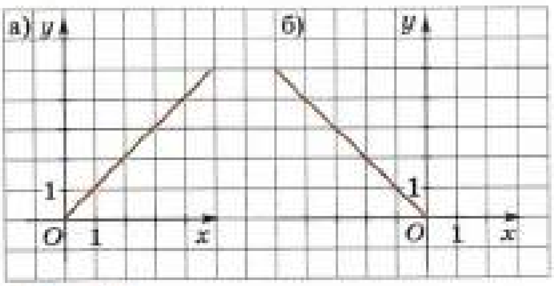



**Рис. 50**

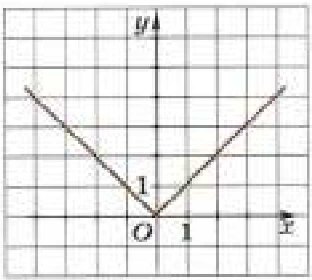



**Рис. 51**

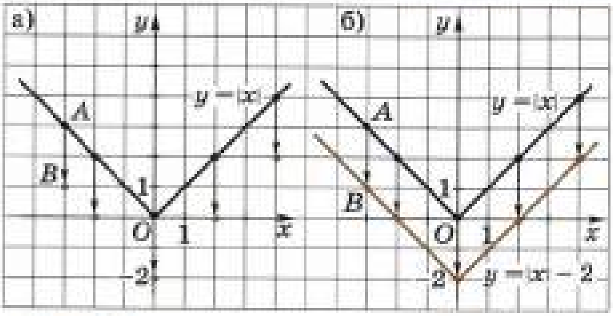



Рис. 52

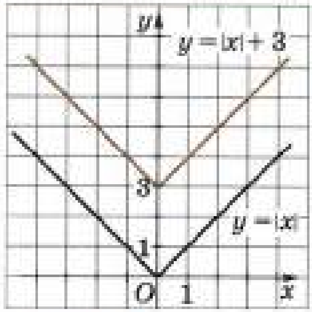



Рис. 53

Рассмотрим примеры построения графиков функций

$$y = |x - x_0| + y_0.$$

**Пример 1.** Построим график функции $y = |x| - 2$.

Чтобы построить график функции $y = |x| - 2$ в прямоугольной системе координат $xOy$, построим сначала график функции $y = |x|$ (рис. 52, *а*). Если $A$ — произвольная точка графика функции $y = |x|$, а $B$ — точка графика функции $y = |x| - 2$, имеющая ту же абсциссу, то ордината точки $B$ на 2 единицы меньше ординаты точки $A$. Это означает, что график функции $y = |x| - 2$ можно получить из графика функции $y = |x|$ сдвигом всех его точек на 2 единицы вниз (рис. 52, *б*).

**Пример 2.** Построим график функции $y = |x| + 3$.

Рассуждая, как в предыдущем примере, график этой функции можно получить сдвигом графика функции $y = |x|$ на 3 единицы вверх (рис. 53).

**Пример 3.** Построим график функции $y = |x - 2|$.

Чтобы построить график функции $y = |x - 2|$ в прямоугольной системе координат $xOy$, построим сначала график функции $y = |x|$ (рис. 54, *а*).

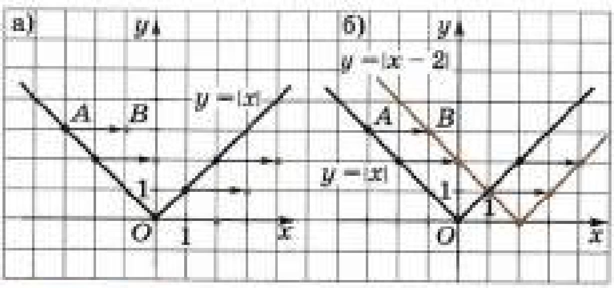
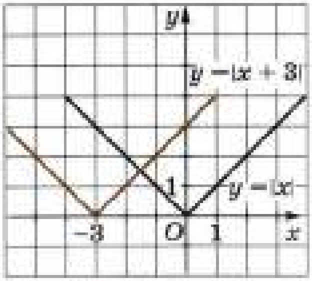
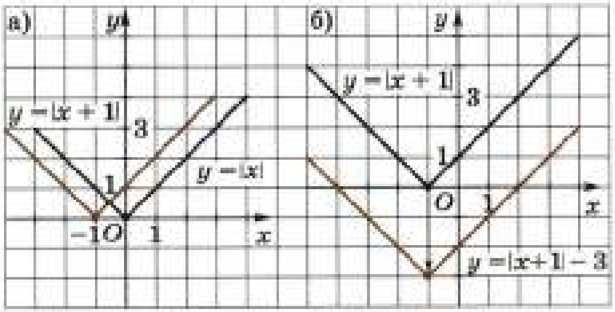



Рис. 54




■ Рис. 55




■ Рис. 56

Если $A$ — произвольная точка графика функции $y = |x|$, а $B$ — точка графика функции $y = |x - 2|$, имеющая ту же ординату, то абсцисса точки $B$ на 2 единицы больше абсциссы точки $A$. Это означает, что график функции $y = |x - 2|$ можно получить из графика функции $y = |x|$ сдвигом всех его точек на 2 единицы вправо (рис. 54, *б*).

**Пример 4.** Построим график функции $y = |x + 3|$.

Рассуждая, как в примере 3, график функции $y = |x + 3|$ можно получить сдвигом графика функции $y = |x|$ на 3 единицы влево (рис. 55).

**Пример 5.** Построим график функции $y = |x + 1| - 3$.

1) Сначала построим график функции $y = |x|$, перенесём его на 1 единицу влево, получим график функции $y = |x + 1|$ (рис. 56, *а*).

2) Потом перенесём график функции $y = |x + 1|$ на 3 единицы вниз, получим график функции $y = |x + 1| - 3$ (рис. 56, *б*). ●

**413.** Объясните, как вы понимаете запись:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

**414.** Упростите выражение $|x|$ при условии:
а) $x \geqslant 0$; б) $x > 0$; в) $x \leqslant 0$; г) $x < 0$; д) $x = 0$.

**415.** Постройте график функции $y = |x|$ и сформулируйте свойства этой функции.

**416.** Используя график функции $y = |x|$, постройте график функции:
а) $y = |x| - 5$; б) $y = |x| + 4$; в) $y = |x - 4|$;
г) $y = |x + 1|$; д) $y = |x - 2| + 3$; е) $y = |x + 2| - 3$;
ж) $y = |x + 3| + 2$; з) $y = |x - 3| - 2$; и) $y = |x + 4| + 1$.

## 6.6*. Функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$

**Целой частью числа** $x$ называют наибольшее целое число, не превосходящее $x$. Целую часть числа $x$ обозначают $[x]$.

Например:

$[3] = 3$; $[-15] = -15$; $[0] = 0$;
$[3{,}17] = 3$; $[-3{,}17] = -4$.

**Дробной частью числа** $x$ называют разность числа $x$ и его целой части $[x]$. Дробную часть числа $x$ обозначают $\{x\}$. Таким образом, $\{x\} = x - [x]$.

Например:

$\{2\} = 2 - 2 = 0$; $\{-5\} = -5 - (-5) = 0$;
$\{3{,}2\} = 3{,}2 - 3 = 0{,}2$; $\{-3{,}2\} = -3{,}2 - (-4) = 0{,}8$.

Рассмотрим функцию $y = [x]$. Её область определения — множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. На каждом полуинтервале $[n;\ n + 1)$, где $n$ — целое число, значение функции $y = [x]$ постоянно и равно $n$. Это означает, что множество значений функции — множество всех целых чисел $\boldsymbol{Z}$.

График функции $y = [x]$ состоит из бесконечного множества отрезков, параллельных оси $Ox$ и не имеющих правых концов (на рисунке 57 изображена только часть графика).

Рассмотрим функцию $y = \{x\}$. Её область определения — множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. На каждом полуинтервале $[n;\ n + 1)$, где $n$ — целое число, значение функции $y = \{x\}$ вычисляется по формуле $y = x - [x]$. Это означает, что функция принимает значения из полуинтервала $[0;\ 1)$, т. е. множество значений функции — полуинтервал $[0;\ 1)$.

График функции $y = \{x\}$ состоит из бесконечного множества отрезков, параллельных прямой $y = x$ и не имеющих правых концов (на рисунке 58 изображена только часть графика).

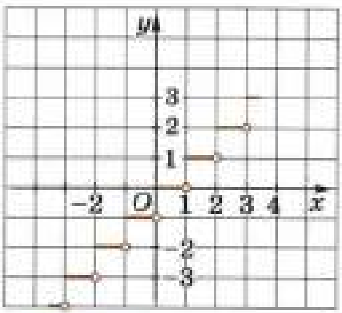



Рис. 57

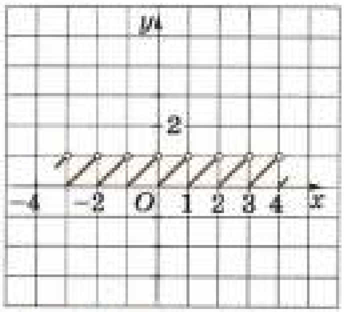



Рис. 58

**417.** Найдите целую часть числа:
а) 7; б) −12; в) 7,41; г) −7,41; д) −3,2; е) 8,39; ж) 13,27.

**418.** Найдите дробную часть числа:
а) 3; б) −5; в) 8,2; г) −8,2; д) 5,7; е) −5,7; ж) 31,12.

**419.** Каковы область определения и область значений функции:
а) $y = [x]$; б) $y = \{x\}$?

**420.** Постройте график функции:
а) $y = 2[x]$; б) $y = -3[x]$; в) $y = \frac{1}{2}[x]$;
г) $y = \left[\frac{x}{2}\right]$; д) $y = -[x]$; е) $y = -\{x\}$;
ж) $y = -3\{x\}$; з) $y = 2\{x\}$; и) $y = \frac{1}{2}\{x\}$;
к) $y = \left\{\frac{x}{2}\right\}$; л) $y = [x - 2]$; м) $y = \{x\} + 2$;
н) $y = [x] + \{x\}$; о) $y = [x] - \{x\}$; п) $y = \{x\}^2$.

**421.** Решите уравнение:
а) $x = [x] + \{x\}$; б) $x = [x] - \{x\}$; в) $[x]^2 - \{x\}^2 = 3{,}75$.

**422.** Решите систему уравнений:
а) $\begin{cases} [x] + \{y\} = -2{,}13, \\ [y] + \{x\} = 3{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + [y] = 6{,}1, \\ y + \{x\} = -5{,}6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} [x] + \{y\} + z = -0{,}8, \\ [y] + \{z\} + x = 4{,}95, \\ [z] + \{x\} + y = 0{,}75. \end{cases}$

**423.** Некто измерил стороны прямоугольника. Он умножил целую часть длины на целую часть ширины и получил 48; умножил целую часть длины на дробную часть ширины и получил 3,2; умножил дробную часть длины на целую часть ширины и получил 1,5. Определите площадь прямоугольника.

# §7. Квадратичная функция

## 7.1. Функция $y = ax^2$ $(a > 0)$

В этом пункте будем рассматривать функцию

$$y = ax^2, \tag{1}$$

где $a$ — данное положительное число. Эта функция определена для любых действительных значений $x$, т. е. область определения функции $y = ax^2$ $(a > 0)$ есть множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Её свойства очень похожи на уже известные нам свойства функции $y = x^2$ и доказываются аналогично.

Перечислим эти свойства.

1. Если $x = 0$, то $y = 0$.

2. Если $x \neq 0$, то $y > 0$.

3. Для неотрицательных значений $x$ функция (1) возрастает, а для неположительных значений $x$ убывает.

4. Если положительное $x$ неограниченно возрастает, то $y$ неограниченно возрастает, а если отрицательное $x$ таково, что его абсолютная величина неограниченно возрастает, то $y$ неограниченно возрастает. Иными словами,

$$y \to +\infty \text{ при } x \to +\infty \text{ и при } x \to -\infty.$$

5. Функция (1) чётная, поэтому её график симметричен относительно оси $y$.

6. Функция (1) непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$, её график является непрерывной линией, т. е. он может быть изображён одним непрерывным движением карандаша без отрыва его от бумаги.

Рассмотрим две функции

$$y = x^2 \text{ и } y = 2x^2.$$

Обе они определены для любых действительных значений $x$.

Зададим декартову систему координат $xOy$ и число $x_0$. Точка $A\,(x_0; x_0^2)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, а точка $A_1\,(x_0; 2x_0^2)$, имеющая ту же абсциссу, принадлежит графику функции $y = 2x^2$ (рис. 59). Ординаты точек $A_1$ и $A$ находятся в отношении $2 : 1$, т. е. отрезок $A_0A_1$ получается *растяжением* отрезка $A_0A$ в 2 раза. Это рассуждение можно провести для любых точек графиков функций $y = x^2$ и $y = 2x^2$, имеющих одну и ту же абсциссу $x$. Поэтому говорят, что график функции $y = 2x^2$ получается из графика функции $y = x^2$ *растяжением* последнего в 2 раза вдоль оси $Oy$.

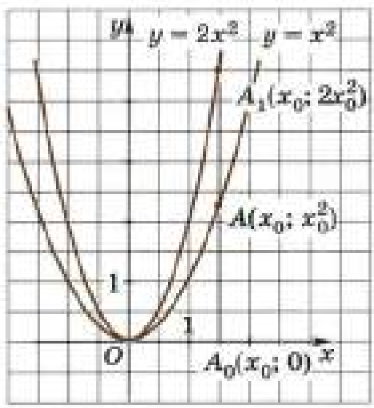


Рис. 59

Рассуждая аналогично, можно показать, что график функции $y = ax^2$, если $a > 1$, получается из графика функции $y = x^2$ *растяжением* последнего в $a$ раз вдоль оси $y$; если же $0 < a < 1$, то *сжатием* последнего в $\frac{1}{a}$ раза вдоль оси $y$.

График функции $y = ax^2$ $(a > 0)$ похож на график функции $y = x^2$, его также называют **параболой**.

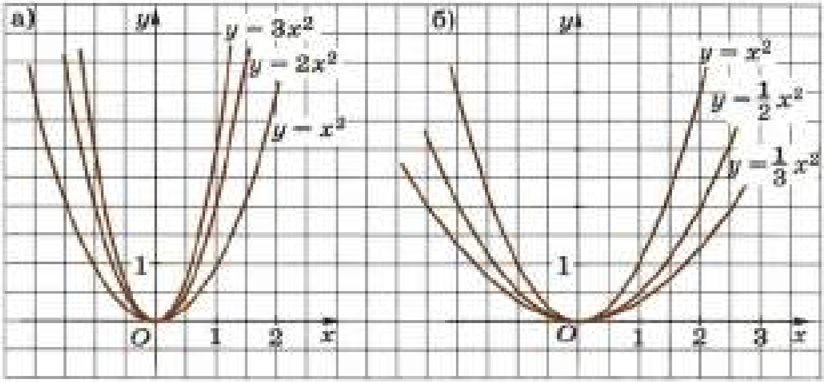



Рис. 60

На рисунке 60, *а* изображены в одной и той же декартовой системе координат $xOy$ параболы $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, а на рисунке 60, *б* — параболы $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$.

**424.** Как называют график функции $y = ax^2$ $(a > 0)$?

**425.** Как получить график функции $y = ax^2$ $(a > 0)$ из графика функции $y = x^2$?

**426.** Какими свойствами обладает функция $y = ax^2$ $(a > 0)$?

**427.** а) Функция задана формулой $y = 5x^2$. Назовите зависимую и независимую переменные. Вычислите $y(-3)$, $y(-2)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$. Решение оформите в виде таблицы.

**Например:**

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | $0$ | $5$ | | |

б) Функция задана формулой $y = 0{,}25x^2$. Вычислите $y(-10)$, $y(-4)$, $y(-2)$, $y(0)$, $y(2)$, $y(4)$, $y(10)$. Решение оформите в виде таблицы.

**428.** Функция задана формулой $y = \frac{3}{5}x^2$. Верно ли равенство:

а) $y(5) = 15$; б) $y(-10) = 80$; в) $y(3) = 5{,}6$; г) $y(-2) = 2{,}4$?

**429.** а) Вычислите значения функции $y = 2x^2$ для значений $x$ от $-3$ до 3 через 1. Решение оформите в виде таблицы.

б) Вычислите значения функции $y = \frac{1}{2}x^2$ для значений $x$ от $-4$ до 4 через 1. Решение оформите в виде таблицы.

**430.** а) Дана функция $y = 5x^2$. При каких $x$ значение функции равно: 5; 0,2; −2; 0?

б) Дана функция $y = \frac{1}{7}x^2$. При каких $x$ значение функции равно: −7; 7; 0; 1?

**431.** а) Может ли функция $y = ax^2$ $(a > 0)$ принимать отрицательные значения?

б) Какова область значений функции $y = ax^2$, где $a > 0$?

**432.** Задана функция $y = 3x^2$.

а) Какова область определения этой функции?

б) Какова область значений этой функции?

в) Вычислите значение функции при $x$, равном −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3. Решение оформите в виде таблицы.

г) В каких четвертях расположен график данной функции?

д) Является ли данная функция чётной? Если да, то укажите ось симметрии её графика.

е) На каком промежутке эта функция возрастает? убывает?

ж) Постройте график функции $y = 3x^2$, учитывая её непрерывность.

**433.** С помощью графика функции $y = 3x^2$ (№ 432) определите:

а) $y(1{,}5)$, $y\left(-2\frac{1}{3}\right)$, $y(-0{,}5)$;

б) при каких значениях $x$ верно равенство: $y = 1$; $y = 4$; $y = 5$;

в) при каких значениях $x$ верно неравенство: $y > 0$; $y < 0$;

г) при каких значениях $x$ верно неравенство: $y > 1$; $y < 2$.

**434.** Постройте график функции $y = 0{,}1x^2$.

а) При каких значениях $x$ функция принимает положительные значения?

б) При каких значениях $x$ значение функции равно 2?

в) На каком промежутке функция возрастает? убывает?

**435.** Укажите абсциссы пяти точек, для которых проще всего вычислить их ординаты:

а) $y = 4x^2$; б) $y = \frac{1}{4}x^2$; в) $y = \frac{1}{3}x^2$;

г) $y = 1{,}5x^2$; д) $y = 0{,}1x^2$; е) $y = 5x^2$;

ж) $y = 10x^2$; з) $y = \frac{3}{5}x^2$; и) $y = 2{,}5x^2$.

Постройте графики функций, выбрав удобные единичные отрезки на координатных осях (436—437):

**436.** а) $y = 4x^2$; б) $y = 0{,}25x^2$; в) $y = \frac{1}{3}x^2$;

г) $y = 1{,}5x^2$; д) $y = \frac{1}{10}x^2$; е) $y = 5x^2$.

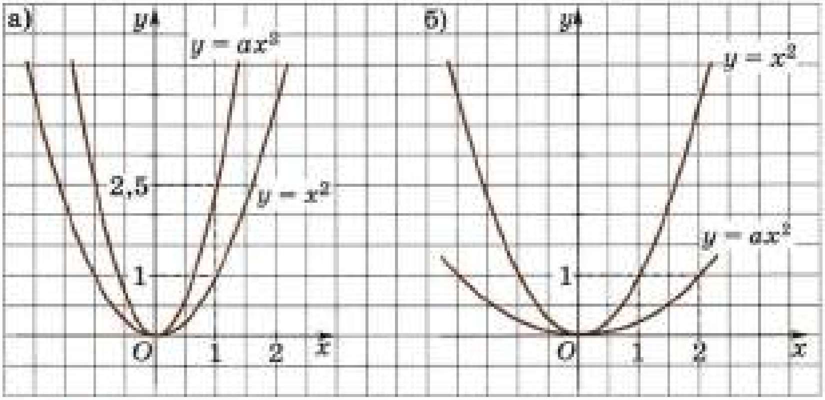



Рис. 61

**437.** а) $y = 20x^2$; б) $y = 400x^2$;
в) $y = 1000x^2$; г) $y = 0{,}01x^2$;
д) $y = 0{,}001x^2$; е) $y = 0{,}0001x^2$.

**438.** Принадлежат ли графику функции:
а) $y = 8x^2$ точки $A(2;\ 32)$, $B(-3;\ 72)$, $C(2{,}5;\ 18)$;
б) $y = 0{,}05x^2$ точки $A(5;\ 1{,}8)$, $B(-10;\ 5)$, $C(-8;\ 3{,}2)$?

**439.** а) Задана функция $y = 3x^2$. Точка $(-2;\ a)$ принадлежит графику этой функции. Найдите $a$.
б) Задана функция $y = 3x^2$. Точка $(b;\ 12)$ принадлежит графику этой функции. Найдите $b$.
в) Точка $(1;\ 8)$ принадлежит графику функции $y = ax^2$. Определите $a$.

**440.** На рисунке 61 представлены графики функций $y = x^2$ и $y = ax^2$. Определите $a$.

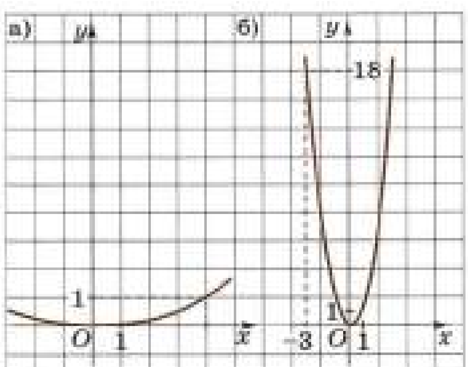



Рис. 62

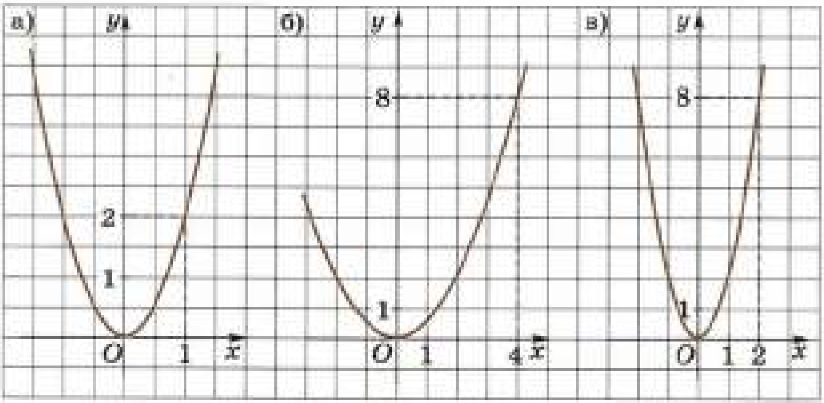



Рис. 63

**441.** На рисунке 62 изображён график функции $y = ax^2$. Используя приведённые на рисунке данные, определите $a$.

**442.** На рисунке 63 изображён график функции $y = ax^2$. Определите $a$.

## 7.2. Функция $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

В этом пункте будем рассматривать функцию

$$y = ax^2,$$

где $a$ — данное отличное от нуля число. Область определения этой функции есть множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Рассмотрим функции $y = x^2$ и $y = -x^2$.

Ординаты их точек, имеющих одну и ту же абсциссу $x_0$, $x_0 \neq 0$, одинаковы по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки, поэтому их графики симметричны относительно оси $Ox$. Первый из них расположен выше, а второй — ниже оси $Ox$, если исключить точку $O(0; 0)$. На рисунке 64 изображены графики функций $y = x^2$, $y = -x^2$.

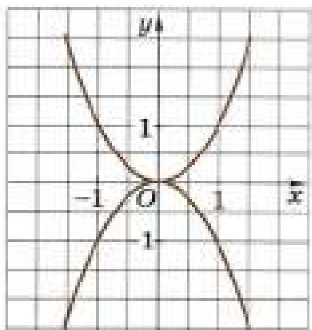



Рис. 64

Точно так же графики функций $y = ax^2$ и $y = -ax^2$, где $a$ — данное отличное от нуля число, симметричны относительно оси $Ox$. При $a > 0$ первый из них расположен выше, а второй — ниже оси $Ox$, если исключить точку $O(0; 0)$. Графиком функции $y = ax^2$ при $a < 0$, так же как и при $a > 0$, является парабола.

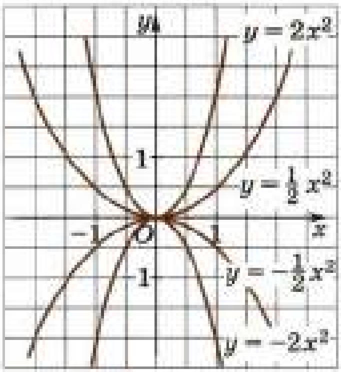



Рис. 65

На рисунке 65 в одной и той же декартовой системе координат $xOy$ изображены параболы $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$.

При любом данном значении $a$ ($a \neq 0$) функция $y = ax^2$ чётная, потому что для любого $x$ выполняется равенство $a(-x)^2 = ax^2$. Это означает, что ось $Oy$ служит осью симметрии параболы $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Точку, в которой парабола $y = ax^2$ пересекается со своей осью симметрии, называют **вершиной параболы**, а ось симметрии параболы называют **осью параболы**.

Функция $y = ax^2$ ($a \neq 0$) при $x = 0$ принимает для $a > 0$ своё наименьшее значение, для $a < 0$ — своё наибольшее значение, равное нулю.

**443.** а) Как называют график функции $y = ax^2$ ($a \neq 0$)?
б) Какая прямая является осью симметрии параболы $y = ax^2$? Почему?
в) Что называют вершиной, осью параболы $y = ax^2$ ($a \neq 0$)?

**444.** Напишите уравнение параболы, симметричной параболе $y = ax^2$ ($a \neq 0$) относительно оси $Ox$.

**445.** а) Какова область определения функции $y = ax^2$ ($a \neq 0$)?
б) Докажите, что функция $y = ax^2$ ($a \neq 0$) чётная. Укажите ось симметрии графика функции.
в) Существуют ли точки, принадлежащие всем параболам вида $y = ax^2$ ($a \neq 0$)?
г) Принимает ли функция $y = ax^2$ ($a \neq 0$) свои наибольшее и наименьшее значения?
д) В каких четвертях расположен график функции:
1) $y = 10x^2$; 2) $y = -5x^2$;
3) $y = -0{,}5x^2$; 4) $y = 0{,}5x^2$?

**446.** На каком промежутке возрастает функция:
а) $y = 10x^2$; б) $y = -5x^2$;
в) $y = -0{,}5x^2$; г) $y = 0{,}5x^2$?

**447.** а) Вычислите значения функции $y = -2x^2$ для значений $x$ от $-2$ до 2 через 1. Решение оформите в виде таблицы.
б) Вычислите значения функции $y = -0{,}5x^2$ для значений $x$ от $-3$ до 3 через 1. Решение оформите в виде таблицы.

**448.** Постройте график функции, выбрав удобные единичные отрезки:

а) $y=-3x^2$; б) $y=-0{,}5x^2$; в) $y=-0{,}1x^2$;
г) $y=-2\frac{1}{2}x^2$; д) $y=-200x^2$; е) $y=-400x^2$;
ж) $y=-1000x^2$; з) $y=-4200x^2$.

**449.** Дана функция $y=-x^2$. Постройте график этой функции. Определите с помощью графика, при каких $x$ выполняется неравенство:
а) $y>0$; б) $y\leqslant 0$; в) $y<-1$; г) $y\leqslant -4$.

**450.** Какой формулой задана функция, график которой симметричен относительно оси $Ox$ графику функции:

а) $y=3x^2$; б) $y=-\frac{1}{3}x^2$; в) $y=100x^2$; г) $y=-0{,}2x^2$?

**451.** Принадлежат ли графику функции:
а) $y=-10x^2$ точки $A(3;\ 90)$, $B(-4;\ -160)$, $C(0{,}2;\ 0{,}4)$;
б) $y=-0{,}1x^2$ точки $A(-2;\ 0{,}4)$, $B(-5;\ -8{,}5)$, $C(4;\ -1{,}6)$?

**452.** а) Дана функция $y=-3x^2$. Точка $(t;\ -3)$ принадлежит графику этой функции. Определите $t$.
б) Дана функция $y=-0{,}2x^2$. Точка $(-0{,}2;\ t)$ принадлежит графику этой функции. Определите $t$.

**453.** а) Прямая $y=8$ пересекает параболу $y=ax^2$ в двух точках, расстояние между которыми равно 6. Найдите число $a$.
б) Прямая $y=-8$ пересекает параболу $y=ax^2$ в двух точках, расстояние между которыми равно 4. Найдите число $a$.

## 7.3. График функции $y=a(x-x_0)^2+y_0$

Область определения функции $y=a(x-x_0)^2+y_0$, где $a$, $x_0$, $y_0$ — данные числа ($a\neq 0$), есть множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Покажем, как можно построить её график.

Пусть дана парабола $y=2x^2$ (рис. 66, *а*). Чтобы построить график функции $y=2x^2-2$, надо параболу $y=2x^2$ сдвинуть на 2 единицы вниз. График функции $y=2x^2-2$ — парабола, имеющая вершину $(0;\ -2)$ и ось $x=0$ (рис. 66, *б*).

В самом деле, если $A$ — произвольная точка графика функции $y=2x^2$, а $B$ — точка графика функции $y=2x^2-2$, имеющая ту же абсциссу, то ордината точки $B$ на 2 единицы меньше ординаты точки $A$.

Например, при $x=0$ функция $y=2x^2$ принимает значение 0, а функция $y=2x^2-2$ принимает значение $-2$. При $x=1$ и при $x=-1$ функция $y=2x^2$ принимает значение 2, а функция $y=2x^2-2$ принимает значение 0 и т. д.

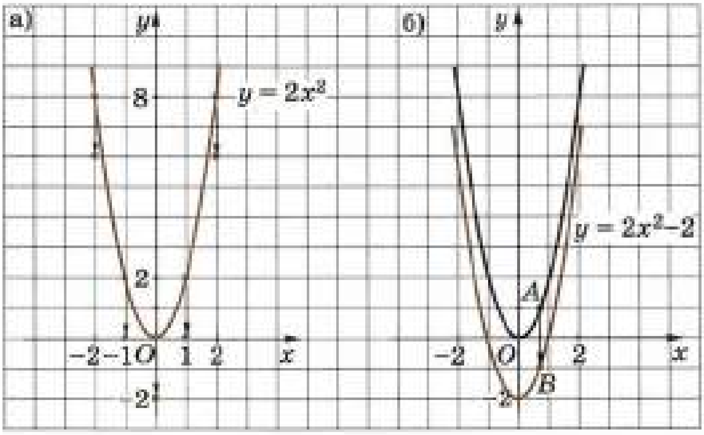



Рис. 66

**Чтобы построить параболу $y = ax^2 + y_0$, надо параболу $y = ax^2$ сдвинуть на $|y_0|$ единиц вверх, если $y_0 > 0$, и вниз, если $y_0 < 0$.**

Пусть дана парабола $y = 2x^2$ (рис. 67, *а*). Чтобы построить график функции $y = 2(x - 2)^2$, надо параболу $y = 2x^2$ сдвинуть на 2 единицы вправо. График функции $y = 2(x - 2)^2$ — парабола, имеющая вершину (2; 0) и ось $x = 2$ (рис. 67, *б*).

В самом деле, если $A$ — произвольная точка графика функции $y = 2x^2$, а $B$ — точка графика функции $y = 2(x - 2)^2$, имеющая ту же ординату, то абсцисса точки $B$ на 2 единицы больше абсциссы точки $A$.

Например, функция $y = 2x^2$ принимает значение 0 при $x = 0$, а функция $y = 2(x - 2)^2$ — при $x = 2$, функция $y = 2x^2$ принимает значение 2 при $x = 1$ и при $x = -1$, а функция $y = 2(x - 2)^2$ — при $x = 3$ и при $x = 1$ и т. д.

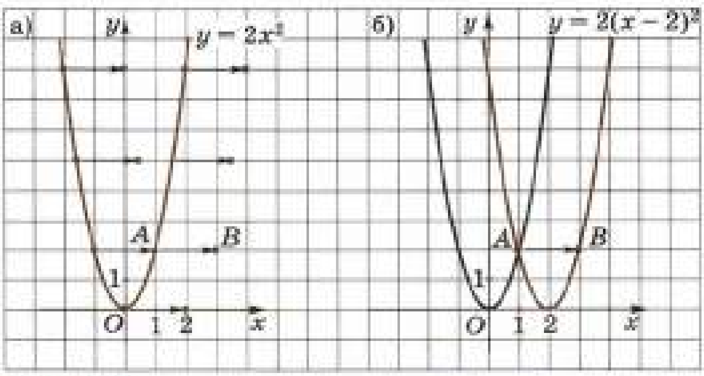



Рис. 67

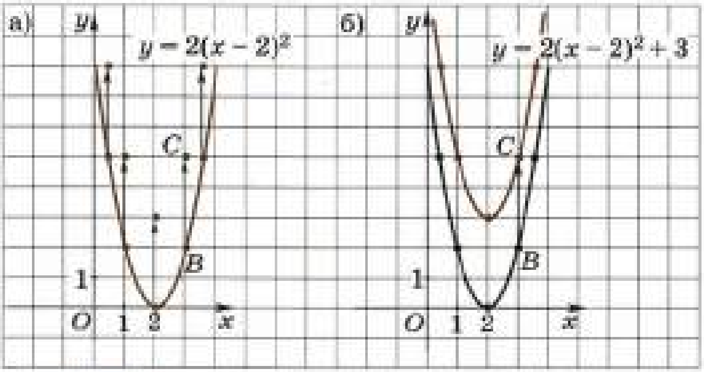



Рис. 68

**Чтобы построить параболу $y = a(x - x_0)^2$, надо параболу $y = ax^2$ сдвинуть на $|x_0|$ единиц вправо, если $x_0 > 0$, и влево, если $x_0 < 0$.**

Пусть дана парабола $y = 2x^2$ (см. рис. 67, *а*). Чтобы построить график функции $y = 2(x-2)^2 + 3$, надо параболу $y = 2x^2$ сначала сдвинуть на 2 единицы вправо (см. рис. 67, *б*). Затем параболу $y = 2(x-2)^2$ (рис. 68, *а*) надо сдвинуть на 3 единицы вверх. График функции $y = 2(x-2)^2 + 3$ — парабола, вершина которой (2; 3), а ось — прямая $x = 2$ (рис. 68, *б*).

В самом деле, если $B$ — произвольная точка параболы $y = 2(x-2)^2$, а $C$ — точка параболы $y = 2(x-2)^2 + 3$, имеющая ту же абсциссу, то ордината точки $C$ на 3 единицы больше ординаты точки $B$.

Например, при $x = 2$ функция $y = 2(x-2)^2$ принимает значение 0, а функция $y = 2(x-2)^2 + 3$ принимает значение $0 + 3 = 3$, при $x = 1$ функция $y = 2(x-2)^2$ принимает значение 2, а функция $y = 2(x-2)^2 + 3$ принимает значение $2 + 3 = 5$ и т. д.

**Чтобы построить параболу $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, надо параболу $y = ax^2$ сдвинуть на $|x_0|$ единиц вправо, если $x_0 > 0$, и влево, если $x_0 < 0$; затем полученную параболу сдвинуть на $|y_0|$ единиц вверх, если $y_0 > 0$, и вниз, если $y_0 < 0$.**

Вершина параболы $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ имеет координаты $(x_0; y_0)$, прямая $x = x_0$ — её ось.

Функция $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ $(a \neq 0)$ при $x = x_0$ принимает для $a > 0$ своё наименьшее значение, а для $a < 0$ наибольшее значение, равное $y_0$.

**Пример 1.** Построим график функции $y = (x-3)^2 - 2$.

Чтобы построить график функции $y = (x-3)^2 - 2$, надо параболу $y = x^2$ сдвинуть на 3 единицы вправо (рис. 69, *а*). Потом параболу $y = (x-3)^2$ сдвинуть на 2 единицы вниз (рис. 69, *б*).

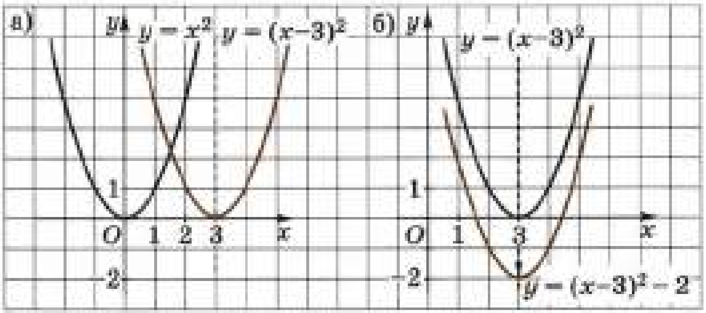



**Рис. 69**

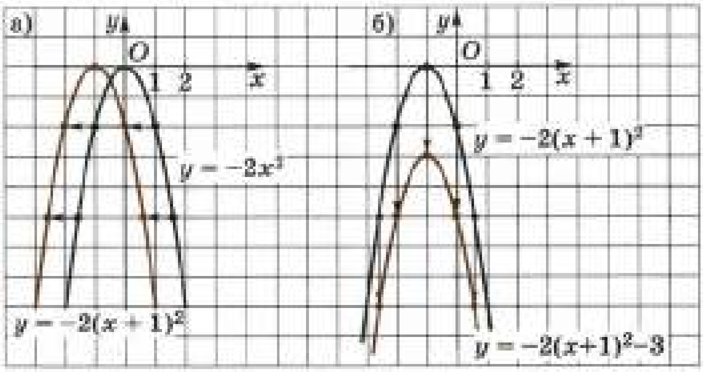



**Рис. 70**

**Пример 2.** Построим график функции $y = -2(x + 1)^2 - 3$.

Чтобы построить график функции $y = -2(x + 1)^2 - 3$, надо параболу $y = -2x^2$ сдвинуть на 1 единицу влево (рис. 70, *а*). Потом параболу $y = -2(x + 1)^2$ сдвинуть на 3 единицы вниз (рис. 70, *б*).

**454.** Как, используя график функции $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, построить график функции:
а) $y = a(x - x_0)^2$; б) $y = ax^2 + y_0$; в) $y = a(x - x_0)^2 + y_0$?
Как называют эти графики? Какие точки являются их вершинами? Каковы уравнения их осей?

**455.** Пусть $a > 0$. Каким должно быть число $y_0$, чтобы парабола $y = a(x - x_0)^2 + y_0$:
а) пересекала ось $Ox$ в двух точках;
б) пересекала ось $Ox$ в одной точке;
в) не пересекала ось $Ox$?

**456.** При каких значениях $x$ равно нулю значение функции:
а) $y = (x - 5)^2$; б) $y = -(x + 8)^2$; в) $y = 2(x - 3)^2$?

**457.** Какие координаты имеет вершина параболы:
а) $y=(x+1)^2$; б) $y=3(x+9)^2$;
в) $y=-2(x-5)^2$; г) $y=-4(x-9)^2$?

**458.** Запишите уравнение оси симметрии параболы:
а) $y=(x-12)^2$; б) $y=-(x+7)^2$;
в) $y=3(x+2)^2$; г) $y=-8(x-10)^2$.

**459.** Объясните, как с помощью графика функции $y=x^2$ можно получить график функции:
а) $y=(x+5)^2$; б) $y=-(x+5)^2$;
в) $y=2(x-1)^2$; г) $y=-2(x-1)^2$.

**460.** Дана парабола $y=(x-2)^2$.
а) Определите координаты вершины параболы.
б) Запишите уравнение оси симметрии параболы.
в) Какова область определения функции?
г) Какова область значений функции?
д) Постройте график функции.
е) Как изменяется $y$, если аргумент $x$ изменяется от $-\infty$ до 2? от 2 до $+\infty$?
ж) При каком $x$ функция принимает наименьшее значение? Принимает ли функция наибольшее значение?
з) В каких точках график функции пересекает ось $Ox$? ось $Oy$?

**461.** Постройте график функции:
а) $y=(x-1)^2$; б) $y=(x+1)^2$; в) $y=(x-3)^2$;
г) $y=(x+4)^2$; д) $y=-(x-1)^2$; е) $y=-(x+2)^2$;
ж) $y=-(x-0{,}5)^2$; з) $y=-(x+0{,}5)^2$; и) $y=2(x-1)^2$;
к) $y=-3(x+1)^2$; л) $y=0{,}5(x+2)^2$; м) $y=-0{,}1(x-3)^2$;
н) $y=-0{,}5(x-2)^2$; о) $y=0{,}1(x+3)^2$.

**462.** Дана функция $y=2(x-3)^2$.
а) Постройте график функции.
б) Какова область определения функции?
в) При каком $x$ функция принимает наименьшее значение? Принимает ли функция наибольшее значение при каком-либо $x$?
г) В каких точках график функции пересекает оси координат?
д) Как изменяются значения $y$, если значения $x$ изменяются от 0 до 1; от 3 до $+\infty$; от $-\infty$ до $-1$?
е) При каких значениях $x$ выполняется неравенство: $y>0$, $y\leqslant 0$, $y>-1$?

**463.** Какой формулой задана функция, график которой получен из параболы $y=x^2$ с помощью:
а) сжатия по оси $Oy$ в 2 раза и переноса вершины в точку $(5;\ 0)$;
б) растяжения по оси $Oy$ в 5 раз и переноса вершины в точку $(-4;\ 0)$?

**464.** а) Напишите уравнение функции, график которой симметричен графику функции $y = 2(x - 8)^2$ относительно оси $Oy$.
б) Напишите уравнение какой-либо параболы, осью симметрии которой является прямая $x = 3$.

**465.** Принадлежат ли графику функции:
а) $y = 5(x - 4)^2$ точки $A(7; 45)$, $B(-2; 170)$, $C(1; 45)$;
б) $y = -0{,}2(x - 2)^2$ точки $A(7; 1)$, $B(-8; -2)$, $C(-3; -5)$?

**466.** а) Дана функция $y = -5(x + 9)^2$. Точка $(3; k)$ принадлежит графику этой функции. Определите $k$.
б) Дана функция $y = 10(x - 6)^2$. Точка $(m; 10)$ принадлежит графику этой функции. Определите $m$.
в) Точка $(5; -8)$ принадлежит графику функции $y = a(x - 3)^2$. Определите $a$.

**467.** Даны функции $y = x^2$ и $y = x^2 + 1$.
а) Какова область определения каждой из этих функций?
б) Сравните значения функций при одинаковых значениях аргумента $x$.
в) Как можно получить график функции $y = x^2 + 1$ из графика функции $y = x^2$?
г) Укажите координаты вершин заданных парабол.
д) При каких значениях аргумента значение каждой из функций равно нулю?
е) При каких значениях $y$ графики функций пересекают ось $Oy$?
ж) Постройте графики данных функций.

**468.** Постройте график функции, предварительно указав координаты вершины параболы и точек пересечения графика с осями координат, если они существуют:
а) $y = x^2 - 4$; б) $y = x^2 + 3$; в) $y = -x^2 + 2$; г) $y = -x^2 - 1$.

**469.** Какой формулой задана функция, график которой получен из параболы $y = x^2$ в результате:
а) переноса вершины в точку $(0; 5)$;
б) переноса вершины в точку $(0; -3)$;
в) сжатия по оси $Oy$ в 2 раза и переноса вершины в точку $(0; 3)$;
г) растяжения по оси $Oy$ в 2 раза и переноса вершины в точку $(0; -2)$?

**470.** Постройте параболу:
а) $y = (x - 1)^2 + 1$; б) $y = -(x + 1)^2 + 2$;
в) $y = -2(x - 2)^2 + 2$; г) $y = 2(x + 1)^2 - 1$.

**471.** Определите координаты вершины параболы и постройте параболу:
а) $y = (x - 2)^2 + 10$; б) $y = (x + 8)^2 - 5$;
в) $y = 2(x - 7)^2 - 11$; г) $y = -2{,}5(x - 0{,}5)^2 + 1$;
д) $y = -0{,}5(x - 0{,}5)^2 - 3$; е) $y = 0{,}5(x - 4)^2 + 6$.

**472.** Какой формулой задана функция, график которой получен параллельным переносом параболы $y = 2x^2$ так, что её вершина есть точка:
а) $(5; -1)$; б) $(-2; 5)$?

**473.** Парабола $y = a(x-3)^2 + 2$ пересекает ось $Oy$ в точке $(0; -16)$. В каких точках эта парабола пересекает ось $Ox$?

**474.** Выбрав удобный масштаб, постройте график функции:
а) $y = 300(x - 0{,}2)^2 - 400$; б) $y = -1000(x-5)^2 + 2000$.

## 7.4. Квадратичная функция и её график

Рассмотрим функцию

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (1)$$

где $a$, $b$ и $c$ — данные числа ($a \neq 0$).

Её называют **квадратичной функцией**. Область определения квадратичной функции есть множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

**Теорема**

Графиком квадратичной функции (1) является парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, полученная параллельным переносом параболы $y = ax^2$, где

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = -\frac{D}{4a},\ D = b^2 - 4ac. \qquad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0\ (a \neq 0), \qquad (3)$$

где числа $x_0$ и $y_0$ определяются по формулам (2). В п. 4.1 показано, что для любого действительного $x$ справедливо равенство

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Это означает, что функции (1) и (3) имеют один и тот же график.

Но, как было показано в п. 7.3, график функции (3), а следовательно, и функции (1) есть парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, полученная параллельным переносом параболы $y = ax^2$. Теорема доказана.

**Пример 1.** Построим график функции

$$y = x^2 - 2x - 3. \qquad (4)$$

Выделяя полный квадрат из трёхчлена

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4,$$

получим, что функция (4) может быть записана следующим образом: $y = (x-1)^2 - 4$.

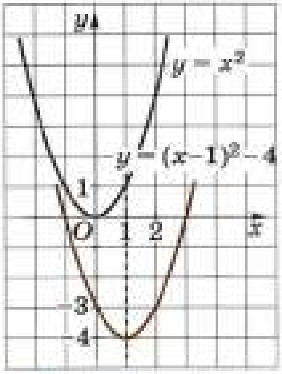



Рис. 71

Но тогда график функции (4) есть парабола, полученная параллельным переносом параболы $y = x^2$ так, что её вершина есть точка (1; −4) (рис. 71).

Тот же график можно было построить, вычислив координаты вершины параболы и нескольких её точек:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1,$$
$$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4.$$

| $x$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | −3 | −4 | −3 | 0 |

Из графика видно, что вершина параболы расположена ниже оси $Ox$ и парабола пересекает ось $Ox$ в двух точках, поэтому если положить в равенстве (4) $y = 0$, то полученное квадратное уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ должно иметь два действительных корня.

Это заключение можно проверить, вычислив корни уравнения.

Имеем $D = b^2 - 4ac = 16$, $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

**Пример 2.** Построим параболу

$$y = 3x^2 + 12x + 15. \tag{5}$$

Вынесем за скобки коэффициент 3 и выделим из полученного трёхчлена полный квадрат:

$$3(x^2 + 4x + 5) = 3(x^2 + 2 \cdot 2x + 4 + 1) =$$
$$= 3(x + 2)^2 + 3.$$

Таким образом, функцию (5) можно записать в виде

$$y = 3(x + 2)^2 + 3,$$

поэтому график функции (5) есть парабола, полученная параллельным переносом параболы $y = 3x^2$ так, что её вершина есть точка (−2; 3) (рис. 72). Из графика видно, что уравнение

$$3x^2 + 12x + 15 = 0 \tag{6}$$

не имеет действительных корней, и, следовательно, дискриминант квадратного уравнения (6) должен быть отрицательным.

Действительно,

$$D = b^2 - 4ac = 144 - 180 = -36 < 0.$$

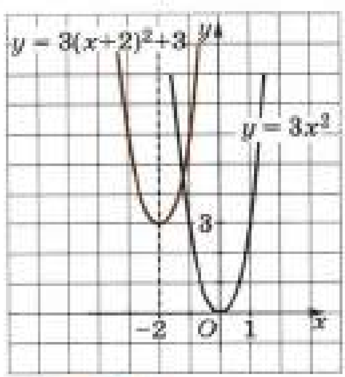



Рис. 72

**Пример 3.** Построим параболу

$$y = -6x^2 - 12x - 8. \qquad (7)$$

Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \cdot (-6)} = -1,$$

$$y_0 = -6 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) - 8 = -2.$$

Вычислим координаты нескольких точек параболы, симметричных относительно её оси $x = -1$.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-26$ | $-8$ | $-2$ | $-8$ | $-26$ |

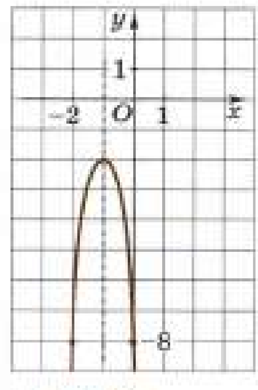



Рис. 73

Изобразим полученные точки в системе координат $xOy$ и, соединив их непрерывной линией, получим искомый график (рис. 73).

Парабола не пересекает ось $Ox$, и поэтому уравнение

$$-6x^2 - 12x - 8 = 0$$

не имеет действительных корней; для любого действительного $x$ выполняется неравенство $-6x^2 - 12x - 8 < 0$.

Таким образом, для построения параболы (1) можно выполнить параллельный перенос параболы $y = ax^2$, при котором вершиной параболы станет точка $(x_0; y_0)$, координаты которой определяются по формулам (2).

Параболу можно построить также по точкам, определив координаты вершины и координаты нескольких её точек, желательно симметричных относительно оси параболы — прямой $x = x_0$.

Парабола (1) пересекает ось $Ox$ в двух точках, если дискриминант $D$ квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ больше нуля; касается оси $Ox$ в одной точке, если $D = 0$; не пересекает ось $Ox$, если $D < 0$. Вершина параболы лежит на прямой $y = y_0$ при любом знаке $a$, остальные её точки расположены над прямой $y = y_0$ при $a > 0$ и под прямой $y = y_0$ при $a < 0$. Для упрощения иногда говорят, что при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

**Пример 4.** Докажем, что функция $y = x^2 - 4x + 11$:

а) возрастает на промежутке $[2; +\infty)$;

б) убывает на промежутке $(-\infty; 2]$;

в) не является ни возрастающей, ни убывающей функцией на промежутке $[-1; 4]$.

**Доказательство.** а) Пусть $x_1$ и $x_2$ — любые числа из промежутка $[2; +\infty)$, такие, что $2 \leqslant x_1 < x_2$. Докажем, что $y_1 < y_2$.

Так как $y_1 - y_2 = x_1^2 - 4x_1 + 11 - (x_2^2 - 4x_2 + 11) = x_1^2 - x_2^2 - 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)$, $x_1 < x_2$ и $x_1 + x_2 > 4$, то $y_1 - y_2 < 0$, следовательно, справедливо неравенство $y_1 < y_2$. По определению возрастающей функции это означает, что функция $y = x^2 - 4x + 11$ возрастает на промежутке $[2; +\infty)$.

б) Пусть $x_1$ и $x_2$ — любые числа из промежутка $(-\infty; 2]$, такие, что $x_1 < x_2 \leqslant 2$. Докажем, что $y_1 > y_2$.

Так как $y_1 - y_2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)$, $x_1 < x_2$ и $x_1 + x_2 < 4$, то $y_1 - y_2 > 0$, следовательно, справедливо неравенство $y_1 > y_2$. По определению убывающей функции это означает, что функция $y = x^2 - 4x + 11$ убывает на промежутке $(-\infty; 2]$.

в) Функция $y = x^2 - 4x + 11$ не является возрастающей на промежутке $[-1; 4]$, так как для чисел $-1$ и $3$ из этого промежутка неравенство $-1 < 3$ верно, а неравенство $(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 11 < 3^2 - 4 \cdot 3 + 11$ неверно. Эта функция не является убывающей на промежутке $[-1; 4]$, так как для чисел $1$ и $4$ из этого промежутка неравенство $1 < 4$ верно, а неравенство $1^2 - 4 \cdot 1 + 11 > 4^2 - 4 \cdot 4 + 11$ неверно. ●

**475.** а) Как построить график функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, используя график функции $y = ax^2$?

б) Как называют график функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$?

в) Как расположен относительно оси $Ox$ график функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ (при $a < 0$), если:

1) $D > 0$; 2) $D = 0$; 3) $D < 0$?

**476.** Дана квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$. Для её графика — параболы — укажите:

а) координаты вершины;

б) уравнение оси симметрии;

в) координаты точки пересечения с осью $Oy$;

г) координаты точек пересечения с осью $Ox$ и условия, от которых зависит число таких точек.

**477.** Укажите координаты вершины, уравнение оси симметрии параболы, координаты точек пересечения параболы с осями координат, если парабола — график функции:

а) $y = x^2 - 3x + 5$; б) $y = x^2 + 7x - 8$;

в) $y = 2x^2 - x + 1$; г) $y = 5x^2 + 4x - 2$;

д) $y = -3x^2 + 5x - 10$; е) $y = -10x^2 - x + 3$.

Постройте график функции **(478—479)**:

**478.** а) $y = x^2 - 4x + 3$; б) $y = x^2 + 2x - 3$;

в) $y = 4x^2 - 4x - 1$; г) $y = 9x^2 - 12x + 3$;

д) $y = x^2 - 6x + 5$; е) $y = x^2 + 4x - 5$;

ж) $y = -x^2 - 6x - 5$; з) $y = -x^2 + 4x + 5$;

и) $y = x^2 - 4x + 7$; к) $y = -x^2 + 4x - 6$.

**479.** а) $y = x^2 + 3$; б) $y = -x^2 + 9$;
в) $y = 0{,}2x^2 - x + 0{,}8$; г) $y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 5$;
д) $y = -1{,}2x^2 - 1{,}2x - 0{,}5$; е) $y = -8x^2 - 16x - 6$;
ж) $y = 2x^2 + 8x - 10$; з) $y = -3x^2 + 6x - 3$.

**480.** Найдите наименьшее значение функции:
а) $y = x^2 - 10x + 1$; б) $y = 2x^2 + 8x - 5$;
в) $y = 3x^2 + 6x + 7$; г) $y = 4x^2 + 12x + 9$.

**481.** Найдите наибольшее значение функции:
а) $y = -x^2 - 4x + 8$; б) $y = -2x^2 + 12x - 7$;
в) $y = -3x^2 + 6x + 10$; г) $y = -4x^2 - 12x + 1$.

**482.** **Доказываем.** Докажите, что функция:
а) $y = x^2 - 2x - 3$ возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 1]$;
б) $y = 3x^2 + 12x + 13$ возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; -2]$;
в) $y = -x^2 + 8x - 5$ убывает на промежутке $[4; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; 4]$;
г) $y = -2x^2 - 8x + 1$ убывает на промежутке $[-2; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; -2]$.

# § 8. Дробно-линейная функция

## 8.1. Обратная пропорциональность

Функцию

$$y = \frac{k}{x}, \qquad (1)$$

где $k$ — данное не равное нулю число, называют **обратной пропорциональной зависимостью** или коротко — **обратной пропорциональностью**. Эта функция определена для всех действительных чисел $x$, кроме $x = 0$.

Название «обратная пропорциональность» связано с тем, что для положительных чисел $x$, $y$ и $k$, для которых верно равенство (1), с увеличением $x$ уменьшается $y$. А для любых двух отличных от нуля чисел $x_1$ и $x_2$ соответствующие значения $y_1 = \frac{k}{x_1}$ и $y_2 = \frac{k}{x_2}$ им обратно пропорциональны.

Действительно, так как $x_1 \cdot y_1 = k$ и $x_2 \cdot y_2 = k$, то $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$. Разделив последнее равенство на отличное от нуля произведение $y_1 \cdot x_2$, получим $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

Если функция задана формулой (1), то говорят ещё, что переменная $y$ обратно пропорциональна переменной $x$ с **коэффициентом пропорциональности** $k$.

Например, при равномерном движении тела на участке длины 12 км время движения $x$ (ч) обратно пропорционально скорости движения $y$ (км/ч) с коэффициентом пропорциональности $k = 12$.

**483.** Какую функцию называют обратной пропорциональностью?

**484.** Является ли функция:

а) $y = \frac{x}{2}$; б) $y = \frac{2}{x}$;

в) $y = -\frac{2}{x}$; г) $y = \frac{3}{5x}$;

д) $y = -\frac{5}{2x}$; е) $y = \frac{2}{x} + 1$

обратной пропорциональностью? Если да, то назовите коэффициент пропорциональности.

**485.** Функция задана формулой $y = \frac{2}{x}$.

а) Заполните таблицу значений функции:

| $x$ | $-4$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ |

б) Найдите значения $y$ при $x$ равном $-5$; $-3$; 3; 5.

в) Найдите значения $x$ при $y$ равном $-8$; $-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{4}$; 6.

**486.** Функция задана формулой $y = -\frac{3}{x}$.

а) Найдите значения функции $y_1$ и $y_2$, соответствующие значениям аргумента $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$.

б) Найдите значения аргумента $x_1$ и $x_2$, соответствующие значениям функции $y_1 = -1$ и $y_2 = 3$.

**487.** Определите коэффициент пропорциональности $k$ для функции $y = \frac{k}{x}$, если значению аргумента $x$ соответствует значение функции $y$:

а) $x = 3$, $y = 2$; б) $x = 6$, $y = -2$;

в) $x = -4$, $y = 6$; г) $x = -1$, $y = -4$.

**488.** Определите коэффициент пропорциональности $k$ для функции $y = \frac{k}{x}$ и заполните таблицу её значений:

а)

| $x$ | $-4$ | $-2$ | $1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | $4$ | $2$ | $4$ |

б)

| $x$ | $-6$ | $-3$ | $2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | $-3$ | $3$ | $6$ |

в)

| $x$ | $-8$ | $-4$ | $-2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | $4$ | $2$ | $4$ |

г)

| $x$ | $-6$ | $-3$ | $-2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | $-3$ | $1$ | $2$ |

**489.** Определите, одинаковые или разные знаки имеют $x$ $(x \neq 0)$ и соответствующее ему $y$, если функция задана формулой:

а) $y = \frac{5}{x}$; б) $y = \frac{8}{x}$; в) $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$;

г) $y = -\frac{3}{x}$; д) $y = -\frac{6}{x}$; е) $y = \frac{k}{x}$, $k < 0$.

## 8.2. Функция $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$

В этом пункте будем рассматривать функцию

$$y = \frac{k}{x}, \tag{1}$$

где $k$ — данное положительное число. Область её определения есть множество всех действительных чисел, кроме нуля.

Графиком функции $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ является множество точек координатной плоскости $xOy$ с координатами $\left(x; \frac{k}{x}\right)$, где $x$ — любое действительное не равное нулю число.

График функции $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ называют **гиперболой** и вместо «график функции $y = \frac{k}{x}$» часто говорят «гипербола $y = \frac{k}{x}$».

Так как $k \neq 0$ и $x \neq 0$, то $y = \frac{k}{x} \neq 0$, поэтому гипербола не пересекает ни одну из осей $Ox$ и $Oy$.

Свойства функции (1) похожи на свойства функции $y = \frac{1}{x}$ (см. § 2) и доказываются аналогично. Перечислим их.

**1. Если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$.**

**2. На промежутке $(-\infty; 0)$ функция убывает, на промежутке $(0; +\infty)$ функция также убывает.**

**3. Если положительное $x$ стремится к 0, то $y = \frac{k}{x}$ стремится к $+\infty$; если $x$ стремится к $+\infty$, то $y = \frac{k}{x}$ стремится к 0. Если отрицательное $x$ стремится к 0, то $y = \frac{k}{x}$ стремится к $-\infty$; если $x$ стремится к $-\infty$, то $y = \frac{k}{x}$ стремится к 0.**

**4. Функция $y = \frac{k}{x}$ — нечётная функция.** Поэтому её график симметричен относительно начала координат.

**5. Функция непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.**

Рассмотрим две функции $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{4}{x}$. Обе эти функции определены на множестве всех действительных чисел, кроме нуля.

Зададим декартову систему координат $xOy$ и число $x_0 \neq 0$. Точка $A_1\left(x_0; \frac{1}{x_0}\right)$ принадлежит графику функции $y = \frac{1}{x}$, а точка $A_2\left(x_0; \frac{4}{x_0}\right)$, имеющая ту же абсциссу, принадлежит графику функции $y = \frac{4}{x}$.

Ординаты точек $A_1$ и $A_2$ удовлетворяют условию $y_2 : y_1 = 4 : 1$, т. е. отрезок $A_0A_2$ получается растяжением отрезка $A_0A_1$ в 4 раза (рис. 74, *а*).

Это рассуждение можно провести для любых точек графиков функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{4}{x}$, имеющих одну и ту же абсциссу $x$. Поэтому говорят, что график функции $y = \frac{4}{x}$ получается из графика функции $y = \frac{1}{x}$ растяжением его в 4 раза вдоль оси $Oy$ (рис. 74, *б*).

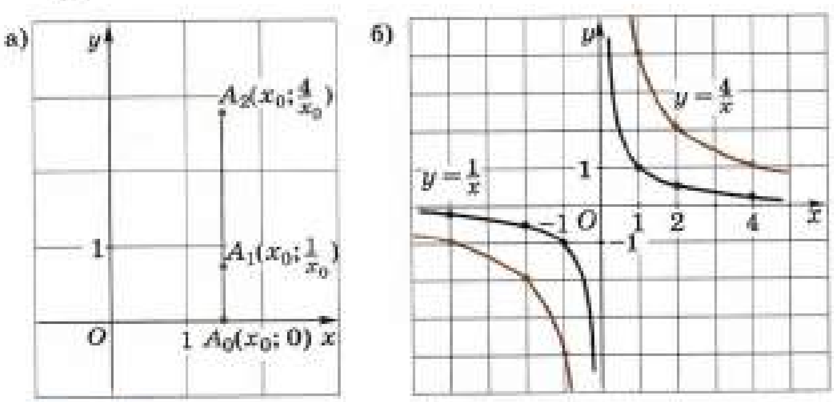



**Рис. 74**

Рассуждая аналогично, можно показать, что график функции $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ можно получить из графика функции $y = \frac{1}{x}$ *растяжением* его в $k$ раз вдоль оси $Oy$, если $k > 1$, и *сжатием* его в $k$ раз вдоль оси $Oy$, если $0 < k < 1$.

На рисунке 75 в одной и той же декартовой системе координат $xOy$ изображены графики функций:

$$1)\ y = \frac{1}{x};\ 2)\ y = \frac{2}{x}\ \text{и}\ 3)\ y = \frac{1}{3x}.$$

Отметим, что часто график функции $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ строят по точкам, учитывая перечисленные выше свойства этой функции.

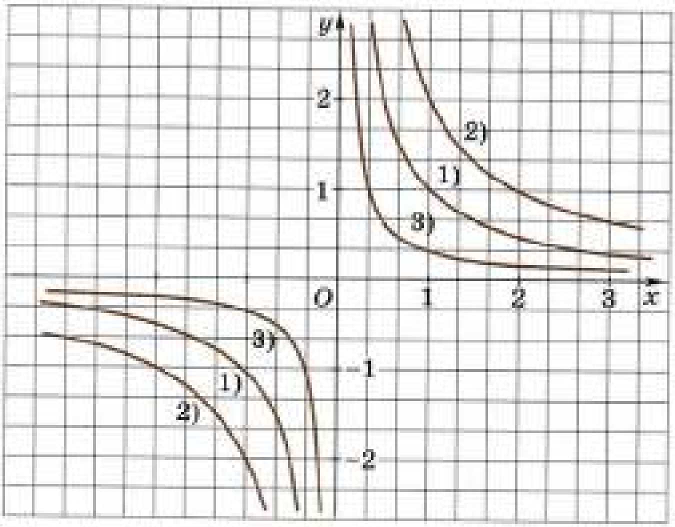



**Рис. 75**

**490.** а) Что является графиком функции $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$? Как называют этот график?

б) Как получить график функции $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ из графика функции $y = \frac{1}{x}$?

в) Какими свойствами обладает функция $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$?

**491.** Задана функция $y = \frac{6}{x}$.

а) Для каких значений $x$ определена данная функция?

б) Является ли эта функция чётной (нечётной)? На каких промежутках она возрастает (убывает)?

в) Вычислите значения $y$, соответствующие значениям $x$:

| $x$ | $-6$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | |

г) В каких четвертях располагается график данной функции?

д) Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$ в системе координат $xOy$.

е) С помощью графика определите $y(4)$, $y(-4)$, $y(5)$, $y(-5)$. Проверьте полученные результаты вычислением с помощью формулы.

ж) При каких значениях $x$ верно неравенство: $y > 0$; $y < 0$?

**492.** Постройте график функции:

а) $y = \frac{20}{x}$;   б) $y = \frac{30}{x}$;   в) $y = \frac{0{,}1}{x}$.

**Указание.** Выберите удобные для построения единичные отрезки.

**493.** Определите $k$ для гиперболы $y = \frac{k}{x}$, проходящей через точку:

а) $A(1;\ 1)$;   б) $B(1;\ 2)$;
в) $C(8;\ 0{,}5)$;   г) $D(-3;\ -5)$;
д) $E(-4;\ -4)$;   е) $K(-5;\ -1{,}2)$?

**494.** Принадлежит ли гиперболе $y = \frac{10}{x}$ точка:

а) $A(5;\ 2)$;   б) $B(2;\ 10)$;
в) $C(1;\ 10)$;   г) $D(10;\ 1)$;
д) $E(-1;\ 10)$;   е) $K(10;\ -1)$?

**495.** Принадлежат ли точки $A$ и $B$ одной и той же гиперболе $y = \frac{k}{x}$, если:

а) $A(4;\ 3)$, $B(6;\ 2)$;   б) $A(12;\ 2)$, $B(-4;\ -6)$;
в) $A(2;\ 10)$, $B(-20;\ -1)$;   г) $A(3;\ 5)$, $B(-5;\ -3)$;
д) $A(0{,}5;\ 10)$, $B(2;\ 5)$;   е) $A(24;\ 3)$, $B(3;\ -24)$?

**496.** а) Площадь прямоугольника 60 см$^2$. Выразите формулой зависимость его длины $a$ (см) от его ширины $b$ (см). Постройте график этой зависимости.

б) Материальная точка движется по прямой от точки $A$ до точки $B$ с постоянной скоростью $v$ (м/с). Выразите формулой зависимость времени движения $t$ (с) от скорости $v$, если расстояние $AB$ равно 12 м. Постройте график этой зависимости. Какие значения могут принимать $t$ и $v$?

в) Выразите формулой зависимость количества тетрадей $n$ от цены $m$ р. одной тетради и стоимости $s$ р. всех тетрадей. Какие значения может принимать $n$, если $s = 120$, а $m$ — целое число?

## 8.3. Функция $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$

В этом пункте будем рассматривать функцию

$$y = \frac{k}{x}, \qquad (1)$$

где $k$ — данное отличное от нуля число. Область её определения есть множество всех действительных чисел, кроме нуля.

Графиком функции $y = \frac{k}{x}$ является множество точек координатной плоскости $xOy$ с координатами $\left(x; \frac{k}{x}\right)$, где $x$ — любое действительное не равное нулю число.

Рассмотрим две функции $y = \frac{1}{x}$ и $y = -\frac{1}{x}$. Ординаты точек их графиков, имеющих одну и ту же абсциссу $x_0 \neq 0$, являются противоположными числами: $\frac{1}{x_0}$ и $-\frac{1}{x_0}$, поэтому точки графиков этих функций симметричны относительно оси $Ox$. График функции $y = \frac{1}{x}$ расположен в I и III четвертях, а график функции $y = -\frac{1}{x}$ — во II и IV четвертях (рис. 76).

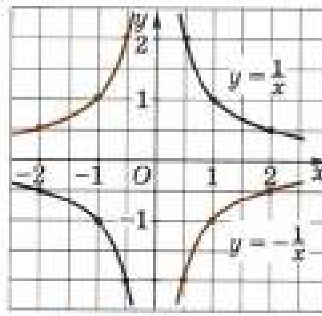



Рис. 76

Точно так же и графики функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = -\frac{k}{x}$, где $k$ — данное отличное от нуля число, симметричны относительно оси $Ox$. График функции $y = \frac{k}{x}$ расположен в I и III четвертях при $k > 0$ и во II и IV четвертях при $k < 0$.

На рисунке 77, *а* изображены графики функций $y = \frac{4}{x}$ и $y = -\frac{4}{x}$.

На рисунке 77, *б* изображены графики функций $y = \frac{1}{4x}$ и $y = -\frac{1}{4x}$.

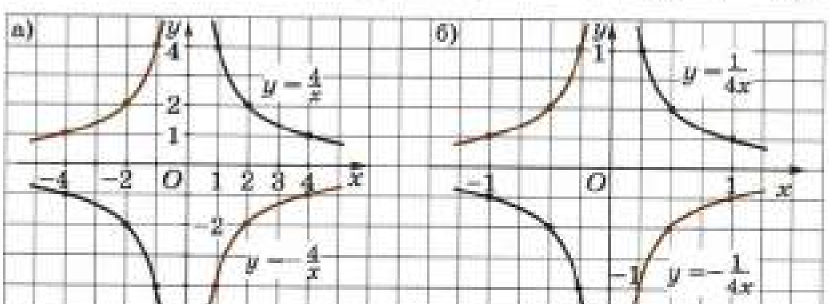



Рис. 77

Функция $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ обладает следующими свойствами: на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ она убывает, если $k > 0$, и возрастает, если $k < 0$; эта функция нечётная; она непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Так как $k \neq 0$ и $x \neq 0$, то $y \neq 0$, поэтому гипербола не пересекает ни одну из осей $Ox$ и $Oy$.

Так как функция $y = \frac{k}{x}$ нечётная, то её график симметричен относительно начала координат.

График функции $y = \frac{k}{x}$ при $k \neq 0$ также называют **гиперболой**.

При $k > 0$ точки гиперболы $y = \frac{k}{x}$ находятся в I и III четвертях, а при $k < 0$ — во II и IV четвертях. Говорят, что при $k > 0$ ветви гиперболы находятся в I и III четвертях, а при $k < 0$ — во II и IV четвертях.

**497.** а) В каких четвертях расположен график функции: $y = \frac{24}{x}$; $y = -\frac{25}{x}$; $y = \frac{0{,}5}{x}$?

б) В каких четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, при $k > 0$? при $k < 0$?

в) Относительно чего — начала координат или оси $Oy$ — симметричен график функции $y = \frac{k}{x}$?

**498.** Постройте график функции:

а) $y = -\frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{4}{x}$; в) $y = -\frac{12}{x}$.

**499.** Постройте график функции:

а) $y = -\frac{200}{x}$; б) $y = -\frac{300}{x}$; в) $y = -\frac{0{,}1}{x}$.

**Указание.** Выберите удобные для построения единичные отрезки.

**500.** Определите $k$ для гиперболы $y = \frac{k}{x}$, проходящей через точку:

а) $A(-1; 2)$; б) $B\left(8; \frac{1}{4}\right)$;

в) $C(1; -1)$; г) $D(-3; 5)$;

д) $E(-6; -4)$; е) $K(-10; 1{,}2)$.

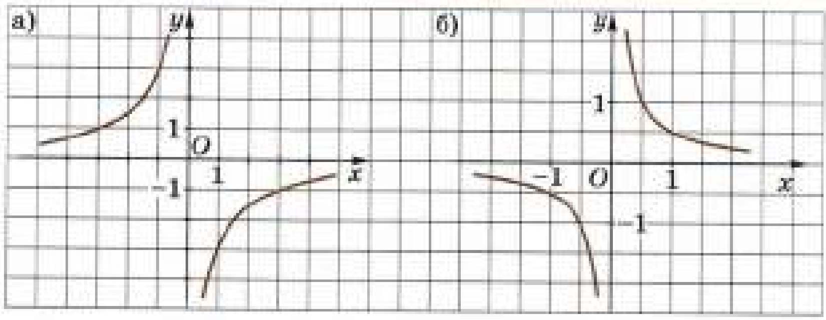



Рис. 78

**501.** Принадлежит ли гиперболе $y = -\frac{30}{x}$ точка:
а) $A(5; 6)$; б) $B(-5; 6)$; в) $C(-3; 10)$; г) $D(-10; -3)$?

**502.** Принадлежат ли точки $A$ и $B$ одной и той же гиперболе $y = \frac{k}{x}$, если:
а) $A(12; 1)$, $B(-6; -2)$; б) $A(2; -2)$, $B(-4; -1)$;
в) $A(2; -5)$, $B(-10; 1)$; г) $A(-3; 5)$, $B(-5; 3)$?

**503.** а) Задана функция $y = -\frac{30}{x}$. Точка $(6; a)$ принадлежит графику этой функции. Найдите $a$.

б) Задана функция $y = \frac{20}{x}$. Точка $(b; -4)$ принадлежит графику этой функции. Найдите $b$.

в) Точка $(6; 7)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$. Найдите $k$.

**504.** На рисунке 78 изображён график функции $y = \frac{k}{x}$. Найдите $k$.

**505.** **Доказываем.** Докажите, что функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, является нечётной.

## 8.4. Дробно-линейная функция и её график

Рассмотрим примеры построения графика функции
$$y = \frac{k}{x - x_0} + y_0,$$
где $k$, $x_0$, $y_0$ — данные числа, $k \neq 0$.

**Пример 1.** Построим график функции $y = \frac{4}{x} - 2$.

Сначала построим график функции $y = \frac{4}{x}$, затем сдвинем его на 2 единицы вниз (рис. 79).

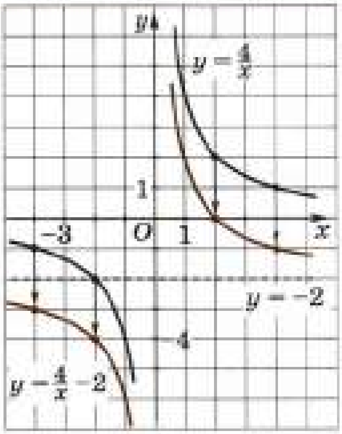



Рис. 79

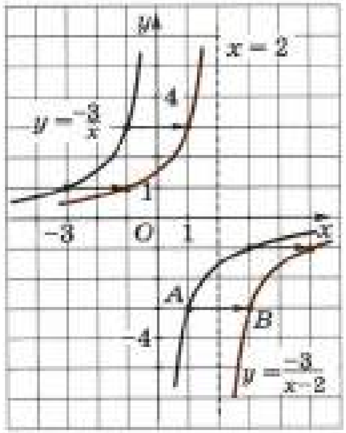



Рис. 80

В самом деле, если $A$ — произвольная точка графика функции $y = \frac{4}{x}$, а $B$ — точка графика функции $y = \frac{4}{x} - 2$, имеющая ту же абсциссу, то ордината точки $B$ на 2 меньше ординаты точки $A$.

**Пример 2.** Построим график функции $y = \frac{-3}{x-2}$.

Сначала построим график функции $y = \frac{-3}{x}$, затем сдвинем его на 2 единицы вправо (рис. 80).

В самом деле, если $A$ — произвольная точка графика функции $y = \frac{-3}{x}$, а $B$ — точка графика функции $y = \frac{-3}{x-2}$ с той же ординатой, то абсцисса точки $B$ на 2 больше абсциссы точки $A$.

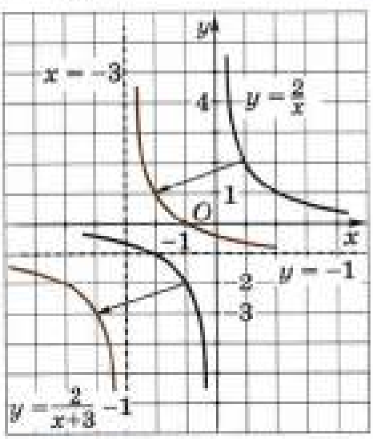



Рис. 81

**Пример 3.** Построим график функции $y = \frac{2}{x+3} - 1$.

Сначала построим график функции $y = \frac{2}{x}$, затем сдвинем его на 3 единицы влево и на 1 единицу вниз (рис. 81).

**Чтобы построить график функции $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$ ($k \neq 0$), надо построить график функции $y = \frac{k}{x}$, затем сначала сдвинуть построенный график на $|x_0|$**

единиц вправо, если $x_0 > 0$, **и влево, если $x_0 < 0$, потом на $|y_0|$ единиц вверх, если $y_0 > 0$, и вниз, если $y_0 < 0$.**

Отметим, что формулу $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$ можно привести к виду $y = \frac{ax - b}{x - x_0}$.

Функцию $y = \frac{ax - b}{x - c}$, где $b \neq ac$, называют **дробно-линейной.**

Ограничение $b \neq ac$ необходимо для того, чтобы исключить случай, когда $y = a$ для всех $x$, кроме $x = c$, а для функции $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$, чтобы исключить случай, когда $k = 0$.

**Пример 4.** Построим график функции $y = \frac{2x - 5}{x - 1}$.

Преобразуем дробь:

$$\frac{2x - 5}{x - 1} = \frac{-3}{x - 1} + 2.$$

Заданную функцию можно записать в виде $y = \frac{-3}{x - 1} + 2$.

Сначала построим график функции $y = -\frac{3}{x}$.

Чтобы построить график функции $y = \frac{-3}{x - 1} + 2$, надо сдвинуть построенный график на 1 единицу вправо и на 2 единицы вверх (рис. 82).

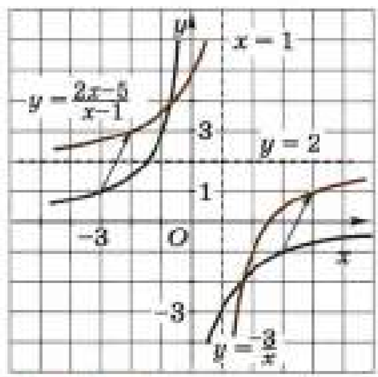



Рис. 82

Постройте график функции (506—508):

**506.** а) $y = \frac{6}{x} + 2$; б) $y = \frac{-6}{x} - 2$; в) $y = \frac{-8}{x} - 3$;

г) $y = \frac{8}{x} + 3$; д) $y = \frac{4}{x - 3}$; е) $y = \frac{-4}{x + 3}$;

ж) $y = \frac{6}{x - 2}$; з) $y = \frac{-6}{x + 2}$.

**507.** а) $y = \frac{2}{x + 1} - 3$; б) $y = \frac{-2}{x - 2} + 1$;

в) $y = \frac{3}{x + 2} + 2$; г) $y = \frac{-3}{x - 1} - 2$.

**508.** а) $y = \dfrac{-2x+4}{x+1}$; б) $y = \dfrac{-x+1}{x-3}$;

в) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$; г) $y = \dfrac{3x+2}{x+2}$.

**509.** Является ли дробно-линейной функция:

а) $y = \dfrac{x-1}{x-2}$; б) $y = \dfrac{-3x+1}{2x+2}$; в) $y = \dfrac{2x-4}{x-2}$?

Постройте график каждой из этих функций.

# Дополнения к главе 3

## 1. Построение графиков функций, содержащих модули

В п. 6.5 приведены примеры построения графиков функций, содержащих модули. Рассмотрим ещё несколько примеров.

**Пример 1.** Построим график функции $y = \dfrac{|x|}{x}$.

Эта функция определена для каждого $x \neq 0$. При $x > 0$ имеем $|x| = x$ и $\dfrac{|x|}{x} = 1$. При $x < 0$ имеем $|x| = -x$ и $\dfrac{|x|}{x} = -1$.

В точке $x = 0$ функция не определена, поэтому нет точки графика с абсциссой 0.

Следовательно, функцию можно записать и так:

$$y = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

График функции $y = \dfrac{|x|}{x}$ изображён на рисунке 83. Точки, не принадлежащие графику, изображены незакрашенными кружками.

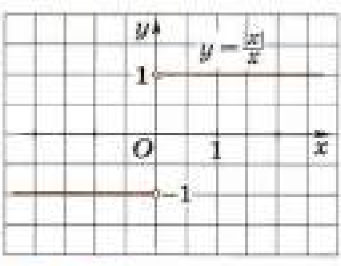



Рис. 83

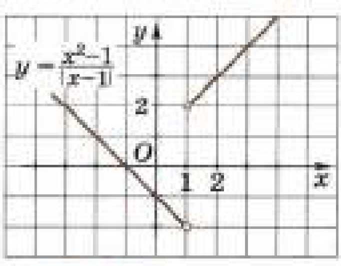



Рис. 84

**Пример 2.** Построим график функции $y = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

Функция $y = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ определена для каждого $x \neq 1$.

При $x > 1$ имеем $|x - 1| = x - 1$ и $\frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = x + 1$.

При $x < 1$ имеем $|x - 1| = -x + 1$ и $\frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = -x - 1$.

В точке $x = 1$ функция не определена, поэтому нет точки графика с абсциссой 1.

Следовательно, функцию можно записать и так:

$$y = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x > 1, \\ -x - 1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$$

График функции $y = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ изображён на рисунке 84.

**Пример 3.** Построим в одной системе координат графики функций:

а) $y = |x|$; $y = 2|x|$; $y = \frac{1}{2}|x|$; б) $y = -|x|$; $y = -2|x|$; $y = -\frac{1}{2}|x|$.

а) Каждая из трёх функций определена для всех действительных чисел. При $x \geqslant 0$ эти функции задаются формулами $y = x$, $y = 2x$ и $y = \frac{1}{2}x$ соответственно; при $x < 0$ эти функции задаются формулами $y = -x$, $y = -2x$ и $y = -\frac{1}{2}x$ соответственно. Графики этих функций изображены на рисунке 85, *а*.

б) Каждая из трёх функций определена для всех действительных чисел. При $x \geqslant 0$ эти функции задаются формулами $y = -x$, $y = -2x$ и $y = -\frac{1}{2}x$ соответственно; при $x < 0$ эти функции задаются формулами $y = x$, $y = 2x$ и $y = \frac{1}{2}x$ соответственно. Графики этих функций изображены на рисунке 85, *б*.

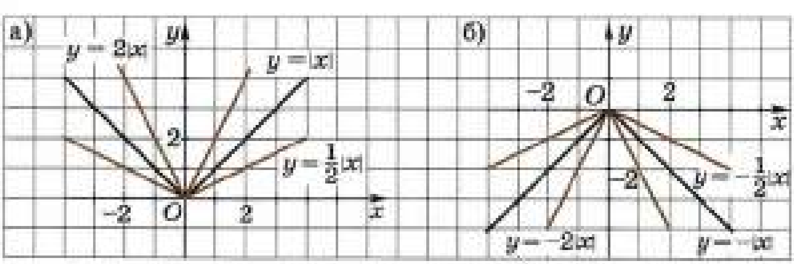



Рис. 85

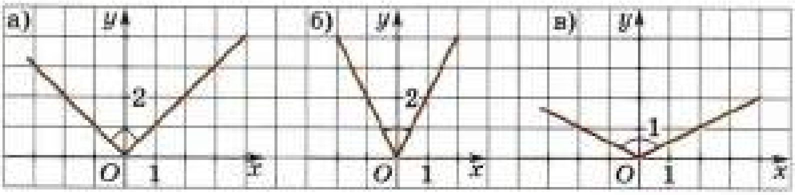


Рис. 86

Отметим следующее очевидное утверждение.

Лучи, составляющие график функции $y = k|x|$, образуют:

1) при $k = 1$ — прямой угол (рис. 86, *а*);

2) при $k > 1$ — острый угол (рис. 86, *б*);

3) при $0 < k < 1$ — тупой угол (рис. 86, *в*).

С помощью параллельных переносов можно построить график функции $y = k|x - x_0| + y_0$, где $k \neq 0$.

**Пример 4.** Построим график функции $y = 2|x + 2| - 2$.

1) Сначала построим график функции $y = 2|x|$, перенесём его на 2 единицы влево, получим график функции $y = 2|x + 2|$ (рис. 87, *а*).

2) Потом перенесём график функции $y = 2|x + 2|$ на 2 единицы вниз, получим график функции $y = 2|x + 2| - 2$ (рис. 87, *б*).

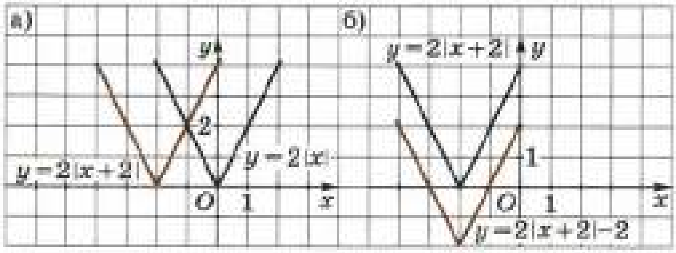


Рис. 87

**Пример 5.** Построим график функции $y = |x - 1| + |x + 1|$.

Выражения $x - 1$ и $x + 1$, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль в точках 1 и $-1$ соответственно. Рассмотрим данную функцию на числовых промежутках $(-\infty; -1)$, $[-1; 1]$ и $(1; +\infty)$.

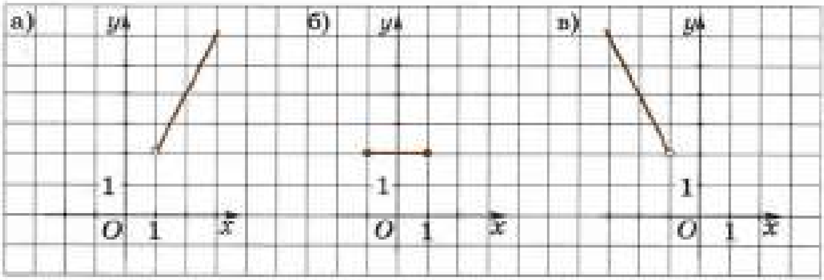


Рис. 88

При $x > 1$ имеем

$$|x-1|+|x+1| = x-1+x+1 = 2x.$$

График функции $y = 2x$ при $x > 1$ изображён на рисунке 88, *а*.

При $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеем

$$|x-1|+|x+1| = -x+1+x+1 = 2.$$

График функции $y = 2$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ изображён на рисунке 88, *б*.

При $x < -1$ имеем

$$|x-1|+|x+1| = -x+1-x-1 = -2x.$$

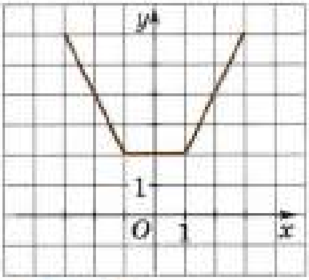



Рис. 89

График функции $y = -2x$ при $x < -1$ изображён на рисунке 88, *в*.

График функции $y = |x-1|+|x+1|$ на всей оси $Ox$ изображён на рисунке 89.

**Пример 6.** Построим график функции $y = ||x|-2|$.

Сначала построим график функции $y = |x|-2$ (рис. 90, *а*). При $x \geqslant 2$ и $x \leqslant -2$ имеем $|x|-2 \geqslant 0$, поэтому $||x|-2| = |x|-2$.

Это означает, что при $x \geqslant 2$ и $x \leqslant -2$ график функции $y = ||x|-2|$ совпадает с графиком функции $y = |x|-2$.

При $-2 < x < 2$ значения функции $y = |x|-2$ отрицательны, а функция $y = ||x|-2|$ принимает противоположные им положительные значения. Поэтому часть графика, расположенную на рисунке 90, *а* ниже оси $Ox$, надо симметрично отразить относительно оси $Ox$.

График функции $y = ||x|-2|$ изображён на рисунке 90, *б*.

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо учесть, что

$$f(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) > 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0, \\ 0, \text{ если } f(x) = 0. \end{cases}$$

Поэтому при построении графика функции $y = |f(x)|$ надо сохранить точки графика функции $y = f(x)$, которые лежат выше оси $Ox$ или на ней, а точки графика функции $y = f(x)$, которые

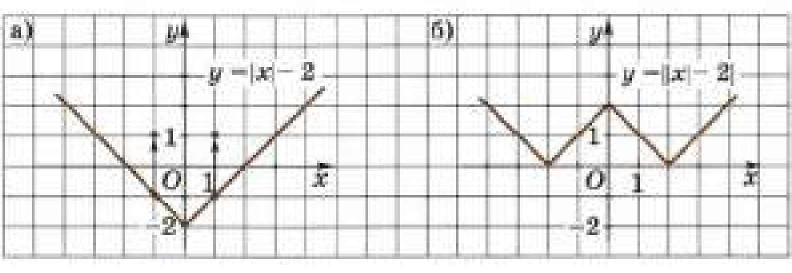



Рис. 90

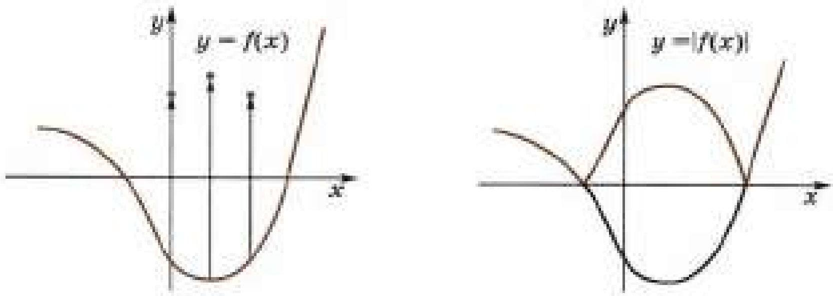



Рис. 91

лежат ниже оси $Ox$, симметрично отразить относительно оси $Ox$ (рис. 91).

**Пример 7.** Построим график функции $y = \left|\frac{2}{x} - 1\right|$.

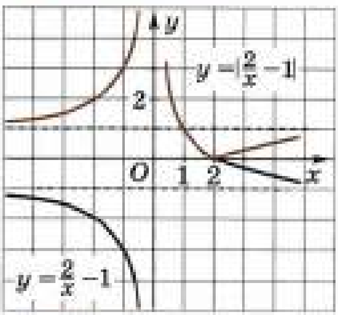



Рис. 92

Сначала построим график функции $y = \frac{2}{x}$. Затем перенесём его на 1 единицу вниз. Получим график функции $y = \frac{2}{x} - 1$ (чёрная линия на рисунке 92). Сохраним те точки полученного графика, которые лежат выше оси $Ox$ или на оси $Ox$, а точки графика, которые лежат ниже оси $Ox$, отразим симметрично относительно оси $Ox$. Получим график функции $y = \left|\frac{2}{x} - 1\right|$ (цветная линия на рисунке 92).

**Пример 8.** Построим график функции $y = x^2 - 2|x|$.

Заметим, что при изменении знака аргумента $x$ на противоположный функция не изменяет значения, так как

$$(-x)^2 - 2|-x| = x^2 - 2|x|.$$

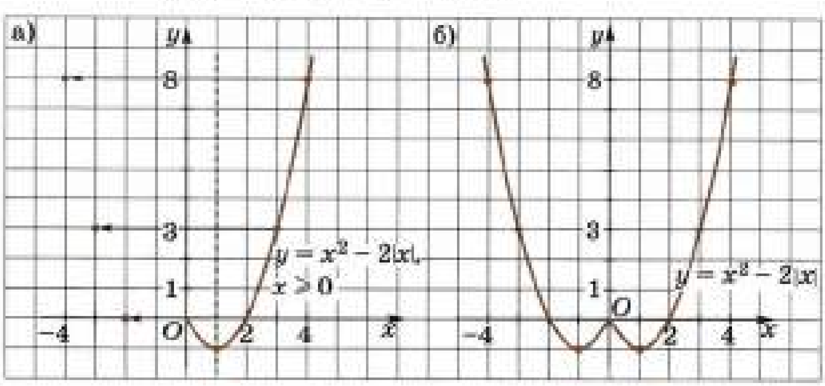



Рис. 93

Это означает, что функция $y = x^2 - 2|x|$ является чётной, её график симметричен относительно оси $Oy$.

Сначала построим график функции $y = x^2 - 2|x|$ для $x \geqslant 0$. В этом случае функцию $y = x^2 - 2|x|$ можно записать в виде $y = x^2 - 2x$. Вершина параболы $y = x^2 - 2x$ имеет абсциссу $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$, ветви параболы направлены вверх, так как $a = 1 > 0$. Ось симметрии параболы — прямая $x = 1$. Определим координаты нескольких точек графика.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | –1 | 0 | 3 | 8 |

График функции $y = x^2 - 2|x|$ для $x \geqslant 0$ изображён на рисунке 93, *а*. Теперь отразим полученный график относительно оси $Oy$ и получим искомый график (рис. 93, *б*).

Постройте график функции (510—514):

**510.** а) $y = 2|x|$; б) $y = 3|x|$; в) $y = -2|x|$;
г) $y = -3|x|$; д) $y = \frac{1}{2}|x|$; е) $y = -\frac{1}{2}|x|$.

**511.** а) $y = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 2, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

**512.** а) $y = |x| + x$; б) $y = |x| - x$;
в) $y = x \cdot |x|$; г) $y = |x - 2| + |x + 2|$;
д) $y = ||x| - 3|$; е) $y = |||x| - 2| - 1|$;
ж) $y = x^2 - 6|x|$; з) $y = x^2 - 4|x|$;
и) $y = x^2 - 2|x| - 1$; к) $y = x^2 + 2|x| - 1$;
л) $y = |x^2 - 4x + 3|$; м) $y = |x^2 - 2|x||$;
н) $y = |x^2 - 4|x||$; о) $y = |x^2 - 2|x| - 1|$;
п) $y = |x^2 + 2|x| - 1|$.

**513.** а) $y = \frac{4}{x} - 2$; б) $y = \left|\frac{4}{x} - 2\right|$; в) $y = \frac{4}{|x|} - 2$;
г) $y = \left|\frac{4}{|x|} - 2\right|$; д) $y = \frac{-6}{x - 2}$; е) $y = \left|\frac{-6}{x - 2}\right|$;

ж) $y = \dfrac{-6}{|x| - 2}$; з) $y = \left|\dfrac{-6}{|x| - 2}\right|$; и) $y = \dfrac{2}{x - 1} - 2$;

к) $y = \left|\dfrac{2}{x - 1} - 2\right|$; л) $y = \dfrac{2}{|x| - 1} - 2$; м) $y = \left|\dfrac{2}{|x| - 1} - 2\right|$.

**514.** а) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$; б) $y = \left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right|$; в) $y = \dfrac{|x| - 1}{|x| + 1}$;

г) $y = \left|\dfrac{|x| - 1}{|x| + 1}\right|$; д) $y = \dfrac{x - 1}{|x - 1|}$; е) $y = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$;

ж) $y = \dfrac{x^2 - 4}{|x + 2|}$; з) $y = \dfrac{|x + 3|}{x^2 - 9}$; и) $y = \dfrac{4 - x^2}{|x - 2|}$;

к) $y = \dfrac{|x + 1|}{x^2 - 1}$; л) $y = \left|\{x\} - \dfrac{1}{2}\right|$.

## 2. Уравнение прямой, уравнение окружности

Рассмотрим функцию $y = 2x$ и докажем, что её график есть прямая $l$, проходящая через начало координат и точку $B(1; 2)$.

1) На рисунке 94, *а* отмечена точка $A(x; y)$ прямой $l$, имеющая положительную абсциссу $x$.

Проведём через точки $A$ и $B$ прямые, параллельные оси $Oy$, они пересекут ось $Ox$ в точках $A_1$ и $B_1$. Имеем $OB_1 = 1$, $BB_1 = 2$, $OA_1 = x$, $AA_1 = y$.

Треугольники $OBB_1$ и $OAA_1$ прямоугольные, они имеют общий угол $BOB_1$, т. е. подобны по двум углам; их соответствующие катеты пропорциональны:

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{OA_1}{OB_1}, \text{ т. е. } \frac{y}{2} = \frac{x}{1},$$

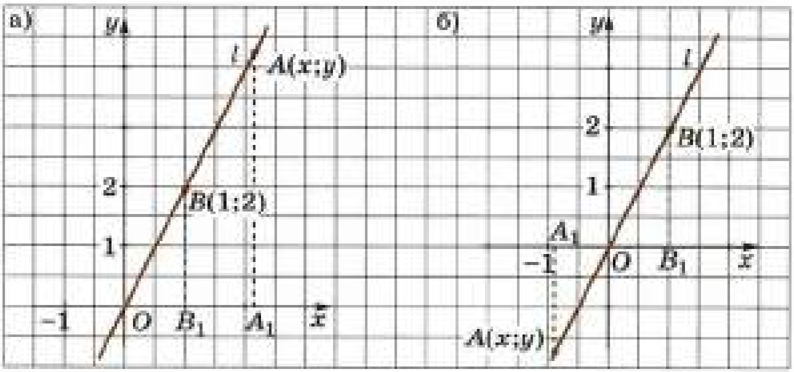



**Рис. 94**

откуда $y = 2x$. Следовательно, точка $A$ есть точка графика функции $y = 2x$.

2) На рисунке 94, *б* на прямой $l$ отмечена точка $A(x;\ y)$, у которой $x < 0$. Но тогда у неё и $y < 0$, и поэтому

$$OB_1 = 1,\ BB_1 = 2,\ OA_1 = -x,\ AA_1 = -y.$$

Треугольники $OBB_1$ и $OAA_1$ прямоугольные, они имеют равные углы $BOB_1$ и $AOA_1$ (вертикальные). Эти треугольники подобны по двум углам, их соответствующие катеты пропорциональны:

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{OA_1}{OB_1}, \text{ т. е. } \frac{-y}{2} = \frac{-x}{1},$$

откуда $y = 2x$.

Следовательно, точка $A$ является точкой графика функции $y = 2x$.

3) Если у точки $A(x;\ y)$ абсцисса $x = 0$, то точка $A$ есть начало координат и её ордината $y = 0$. Но тогда $y = 2x$, потому что $0 = 2 \cdot 0$.

Итак, показано, что если точка $A(x;\ y)$ лежит на прямой $l$, то её ордината $y$ равна $2x$.

Обратно: при любом заданном $x$ точка $A(x;\ 2x)$ лежит на прямой $l$. Это очевидно, потому что на прямой $l$ есть единственная точка $A(x,\ y)$ с заданной абсциссой $x$. У этой точки, как было доказано выше, $y = 2x$.

Итак, $l$ есть график функции $y = 2x$.

Аналогично можно показать, что графиком функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат и точку $B(1;\ k)$.

На координатной плоскости $xOy$ рассмотрим прямую $l$, параллельную оси $Oy$ и проходящую через точку $A(a;\ 0)$, где $a$ — данное число (рис. 95).

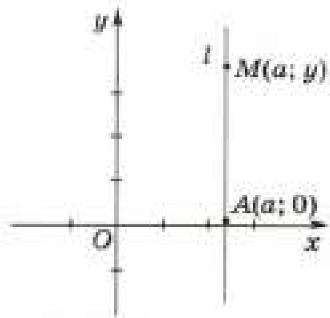



**Рис. 95**

Любая точка $M$ прямой $l$ имеет абсциссу $a$, т. е. удовлетворяет уравнению $x = a$.

Обратно, любая точка $M$, удовлетворяющая уравнению $x = a$, имеет абсциссу $a$, т. е. принадлежит прямой $l$.

Следовательно, прямая $l$ задаётся уравнением $x = a$.

Докажем теперь, что уравнение

$$ax + by + c = 0, \qquad (1)$$

где $a$ и $b$ не равны нулю одновременно ($a^2 + b^2 \neq 0$), задаёт на координатной плоскости $xOy$ некоторую прямую.

В самом деле, если $b \neq 0$, то уравнение (1) можно переписать в виде

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}. \qquad (2)$$

Как было показано в п. 6.3, графиком функции, заданной уравнением (2), является прямая $\left(\text{угловой коэффициент которой } -\frac{a}{b},\right.$ $\left.\text{она пересекает ось } Oy \text{ в точке с ординатой } -\frac{c}{b}\right)$.

Если же $b = 0$, то уравнение (1) можно записать в виде

$$ax + c = 0.$$

Так как $a^2 + b^2 \neq 0$, то из условия $b = 0$ следует, что $a \neq 0$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$x = -\frac{c}{a}.$$

Это уравнение задаёт прямую, параллельную оси $Oy$ и пересекающую ось $Ox$ в точке с абсциссой $-\frac{c}{a}$.

Таким образом, показано, что любое уравнение вида

$$ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

задаёт на координатной плоскости $xOy$ некоторую прямую.

Можно доказать обратное, что любая прямая, расположенная на координатной плоскости $xOy$, задаётся уравнением вида

$$ax + by + c = 0.$$

Покажем теперь, что окружность радиуса $R$ с центром $A(a;\, b)$ на координатной плоскости $xOy$ задаётся уравнением

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (3)$$

Пусть дана окружность радиуса $R$ с центром $A(a;\, b)$. Возьмём на окружности точку $M(x;\, y)$.

Из курса геометрии известно, что расстояние между точками $A$ и $M$ вычисляется по формуле

$$AM = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Квадрат этого расстояния равен квадрату радиуса окружности:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Так как $M$ — произвольная точка окружности, то равенство (3) выполняется для любой точки окружности.

Можно доказать обратное: любое уравнение вида (3) на координатной плоскости $xOy$ задаёт окружность радиуса $R$ с центром $A(a;\, b)$.

Вышеизложенное можно сформулировать иными словами.

На координатной плоскости $xOy$:

1. Множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), совпадает с множеством всех точек некоторой прямой.

2. Множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (3), совпадает с множеством всех точек окружности радиуса $R$ с центром $A(a; b)$.

Поэтому говорят:

**уравнение $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) есть уравнение прямой;**

**уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ ($R > 0$) есть уравнение окружности.**

**515.** Напишите уравнение прямой, проходящей через точки:
а) $A(2; 3)$ и $B(4; 5)$;
б) $D(5; 0)$ и $B(0; 10)$;
в) $A(3; 0)$ и $B(3; 5)$.

**516.** Напишите уравнение прямой, все точки которой одинаково удалены от точек:
а) $A(2; 3)$ и $B(4; 5)$; б) $A(6; 0)$ и $B(0; 3)$.

**517.** **Доказываем.** а) Докажите, что графиком функции $y = kx$ на координатной плоскости $xOy$ является прямая, проходящая через точки $O(0; 0)$ и $B(1; k)$.
б) Докажите, что любая прямая на координатной плоскости $xOy$ задаётся уравнением $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

**518.** Напишите уравнение окружности радиуса $R$ с центром $A$:
а) $A(3; 5)$, $R = 4$; б) $A(0; 6)$, $R = 5$; в) $A(3; 4)$, $R = 5$.
Проходит ли эта окружность через начало координат?

**519.** Постройте график функции:
а) $y = \sqrt{4 - x^2}$; б) $y = \sqrt{3 - x^2 - 2x}$;
в) $y = \sqrt{4 - x^2} + 1$; г) $y = \sqrt{3 - x^2 - 2x} - 1$;
д) $y = \sqrt{9 - x^2}$; е) $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

**520.** **Исследуем.** Напишите уравнение прямой, проходящей через две различные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

**521.** **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, найдите геометрические изображения множества решений следующих уравнений второй степени с двумя неизвестными:
а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; в) $x^2 + y^2 = 0$;
г) $x^2 - y^2 = 1$; д) $x^2 - y^2 = 0$; е) $x - y^2 = 0$;
ж) $(x - y)^2 = 1$; з) $(x - y)^2 = 0$; и) $(x - y)^2 = -1$.

## 3. Исторические сведения

Архимед

Свойства параболы, которые мы изучали в этой главе, знал ещё Архимед (287—212 гг. до н. э.) — величайший математик и механик Древней Греции. Он применял параболу при решении ряда практических задач в судоходстве и военном деле.

Архимеду, например, понадобилось вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой и некоторой её хордой (рис. 96, *а*). Метод, который он применял при этом, впоследствии через 2 тыс. лет дал основание для развития важной математической науки — дифференциального и интегрального исчисления.

Архимед знал, что на оси параболы имеется замечательная точка, называемая *фокусом параболы*, которая обладает тем свойством, что если в неё поместить источник света, то лучи его, падающие на параболу, которую будем считать зеркалом, после отражения от него образуют пучок прямых, уходящих в бесконечность параллельно оси параболы. Если же считать, что пучок лучей, параллельных оси параболы, например идущих от солнца, падает на неё, то окажется, что все отражённые лучи пересекутся в фокусе (рис. 96, *б*). Этим можно воспользоваться на практике для того, чтобы создать в фокусе высокую температуру. Существует легенда о том, что Архимед сжёг неприятельский флот при помощи зажигательных зеркал.

На таком же эффекте основан принцип действия «гиперболоида инженера Гарина» в одноимённом романе А. Н. Толстого. Следует только заметить, что на самом деле прибор этот должен называться параболоидом, так как только парабола обладает указанным свойством, а у гиперболы такого свойства нет.

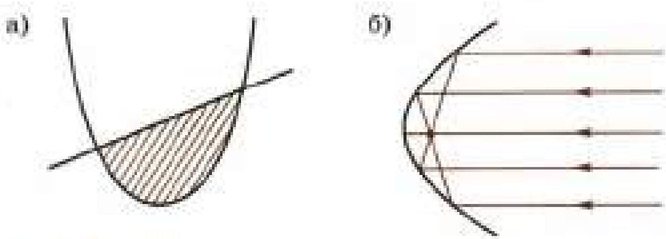



**Рис. 96**

Г. Галилей

Итальянский учёный Г. Галилей (1564—1642), изучая свободное падение тел, пришёл к выводу, что справедлив следующий физический закон. Падающая на землю материальная точка[1] движется по закону

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (t \geqslant 0,\ g \approx 9{,}81), \qquad (1)$$

где $s$ — путь (м), пройденный точкой за время падения $t$ (с), $g$ — ускорение свободного падения (м/с$^2$).

Функция (1) есть частный случай функции $s = at^2$ при $a = \frac{g}{2}$, рассматриваемой на множестве неотрицательных $t$. Её график изображён на рисунке 97.

Пользуясь формулой (1), можно вычислить путь $s$, пройденный точкой за данное время $t$.

Также можно по данному $s \geqslant 0$ определить $t$ по формуле $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$.

Пользуясь графиком (см. рис. 97), можно определить $s$ по $t$ и $t$ по $s$ без вычислений.

Если точка падала с высоты $H$ и достигла земли за время $T$, то

$$H = \frac{1}{2}gT^2 \quad \text{и} \quad T = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

**Замечание.** При пользовании графиком, изображённым на рисунке 97, было бы ошибкой думать, что точка движется по графику. Надо считать, что точка движется по оси $Os$. График помогает узнать, где на оси $Os$ она находится в каждый данный момент времени $t$.

Закон Галилея позволил физикам решать и другие задачи на движение тел в поле земного притяжения. Приведём пример.

Пусть в точке $O$ поверхности земли произошёл выстрел из винтовки вверх. Пуля вылетела из дула винтовки в момент времени $t = 0$ со скоростью 800 м/с. Будем считать, что пуля движется в безвоздушном пространстве, а ускорение свободного падения приближённо равно 10 м/с$^2$. Направим из точки $O$ координатную ось $Os$ вверх. Тогда закон движения пули выражается функцией

$$s = 800t - 5t^2, \qquad (2)$$

где $s$ — координата пули (м), $t$ — время (с).

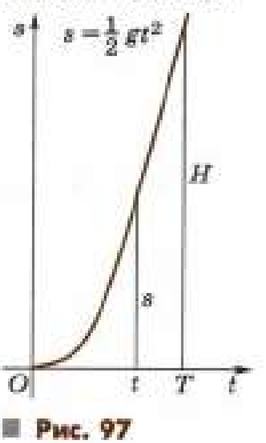



Рис. 97

[1] Предполагается, что тело падает в безвоздушном пространстве. Для реального падающего тела надо ещё учитывать сопротивление воздуха.

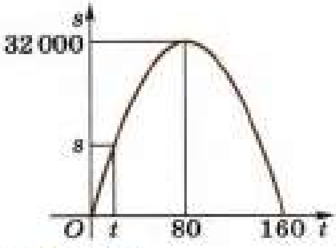



Рис. 98

Действительно, если бы силы земного притяжения не было, то пуля летела бы вверх равномерно с сообщённой ей скоростью и закон её движения был бы $s = 800t$. Но благодаря земному притяжению, действующему вниз, в правой части равенства (2) появляется второй член $\frac{gt^2}{2} \approx 5t^2$, взятый со знаком «минус». В реальной обстановке надо было бы учитывать ещё сопротивление воздуха.

Так как

$$800t - 5t^2 = -5(t^2 - 160t) = -5(t^2 - 2 \cdot 80t + 80^2) + 32\,000 =$$
$$= -5(t - 80)^2 + 32\,000,$$

то функцию (2) можно записать в виде

$$s = -5(t - 80)^2 + 32\,000.$$

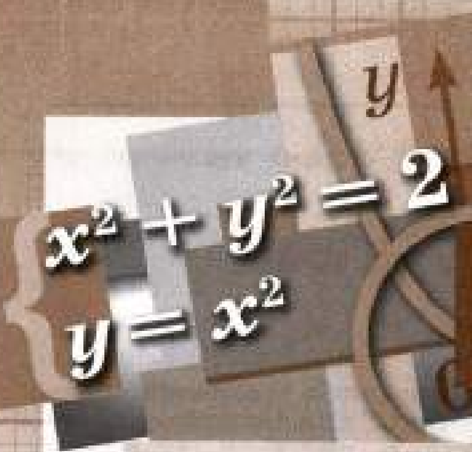
Введём прямоугольную систему координат $tOs$ (рис. 98).

В ней графиком движения пули является часть параболы, полученной параллельным переносом параболы $y = -5t^2$, при котором её вершина есть точка (80; 32 000).

Из приведённого на рисунке 98 графика видно, что при возрастании $t$ от 0 до 80 расстояние $s$ пули до поверхности земли увеличивается от 0 до 32 000 м (32 км), затем на отрезке времени [80; 160] расстояние пули до земли уменьшается, и в момент времени $t = 160$ пуля снова достигает земли.

**522.** **Исследуем.** а) Выясните, с какой скоростью должна вылететь пуля из винтовки вверх, чтобы упасть на землю приблизительно через 2 мин.
б) Стрела, выпущенная из лука вертикально вверх, поднялась на 35 м. Через какое время она достигнет наибольшей высоты подъёма? Через какое время стрела упадёт на землю? Определите начальную скорость стрелы.

**523.** **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о вкладе в науку Архимеда.




# ГЛАВА 4

# СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При изучении главы 4 вам предстоит освоить способы решения систем рациональных уравнений, научиться применять их к решению текстовых задач, освоить графический способ решения систем и уравнений. Умение решать системы уравнений потребуется вам и в старших классах.

## § 9. Системы рациональных уравнений

### 9.1. Понятие системы рациональных уравнений

Уравнение, обе части которого есть рациональные выражения относительно $x$ и $y$, называют **рациональным уравнением с двумя неизвестными $x$ и $y$**.

Вот примеры рациональных уравнений с двумя неизвестными $x$ и $y$:

$$2x + y - 4 = 0, \tag{1}$$

$$2x^2 - 3x + y - x + 1 = 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{x} = 3 - \frac{4}{y}. \tag{3}$$

Пару чисел $(x_0; y_0)$ называют **решением уравнения с двумя неизвестными $x$ и $y$**, если эти числа удовлетворяют этому уравнению, т. е. если при подстановке $x_0$ вместо $x$ и $y_0$ вместо $y$ это уравнение превращается в верное числовое равенство.

Например, пара чисел (2; 0) есть решение уравнения (1), пара чисел (0; −1) есть решение уравнения (2), пара чисел (−1; 1) есть решение уравнения (3).

Уравнение, обе части которого есть рациональные выражения относительно $x$, $y$ и $z$, называют **рациональным уравнением с тремя неизвестными $x$, $y$ и $z$**.

Вот примеры рациональных уравнений с тремя неизвестными $x$, $y$ и $z$:

$$3x - 6y + z - 6 = 0, \tag{4}$$

$$7x^2 + 5xy - z^2 + yz - x + z + y - 3 = 0, \tag{5}$$

$$\frac{x - y}{x - z} + \frac{x + y}{x + z} = x + y + z. \tag{6}$$

Тройку чисел $(x_0; y_0; z_0)$ называют **решением уравнения с тремя неизвестными $x$, $y$ и $z$**, если эти числа удовлетворяют этому уравнению, т. е. если при подстановке $x_0$ вместо $x$, $y_0$ вместо $y$, $z_0$ вместо $z$ это уравнение превращается в верное числовое равенство.

Например, тройка чисел (2; –1; –6) есть решение уравнения (4), тройка чисел (0; 3; 0) есть решение уравнения (5), тройка чисел (0; 1; 1) есть решение уравнения (6).

Аналогично определяется рациональное уравнение с $n$ неизвестными и его решение.

Все слагаемые рациональных выражений, находящиеся в обеих частях уравнения, называют **членами** этого **уравнения**.

Рациональное уравнение, левая часть которого есть многочлен первой степени, а правая — нуль, называют ещё **уравнением первой степени**.

Например, уравнение (1) есть уравнение первой степени с двумя неизвестными $x$ и $y$, уравнение (4) есть уравнение первой степени с тремя неизвестными $x$, $y$ и $z$.

Рациональное уравнение, левая часть которого есть многочлен второй степени, а правая — нуль, называют **уравнением второй степени.**

Например, уравнение (2) есть уравнение второй степени с двумя неизвестными $x$ и $y$, уравнение (5) есть уравнение второй степени с тремя неизвестными $x$, $y$ и $z$.

Рациональное уравнение, левая часть которого есть многочлен степени $n$, а правая — нуль, называют ещё *уравнением степени $n$*.

Например, уравнение $x^2 - xy^2 + 7 = 0$ — степени 3, а уравнение $x^3y - x^{10} + 1 = 0$ — степени 10.

Пусть даны два рациональных уравнения с двумя неизвестными $x$ и $y$. Говорят, что надо **решить систему двух рациональных уравнений с двумя неизвестными $x$ и $y$**, если требуется найти все пары чисел $(x; y)$, являющиеся решениями одновременно и первого, и второго уравнений.

Вот примеры систем двух рациональных уравнений с двумя неизвестными $x$ и $y$:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x - 7y + 9 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 0, \\ x^2 + 2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ x^2 - 7xy + 3y^2 - x + 4y - 11 = 0. \end{cases}$$

**Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными $x$ и $y$** называют пару чисел $(x_0;\ y_0)$, являющуюся решением каждого уравнения этой системы.

Пусть даны три рациональных уравнения с тремя неизвестными $x$, $y$ и $z$. Говорят, что надо **решить систему трёх рациональных уравнений с тремя неизвестными $x$, $y$ и $z$**, если требуется найти все тройки чисел $(x;\ y;\ z)$, являющиеся решениями одновременно всех трёх этих уравнений.

Вот примеры систем трёх рациональных уравнений с тремя неизвестными $x$, $y$ и $z$:

$$\begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - z + 7 = 0, \\ 7x - 3y + z + 11 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y - 2z + 1 = 0, \\ x - y - 9z + 7 = 0, \\ 3x^2 - 2xy - y^2 - 7y + 11 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{z}{x + y} - 5 = 0, \\ \dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y} = 1, \\ 2x + 3y - z^2 = 0. \end{cases}$$

**Решением системы трёх уравнений с тремя неизвестными $x$, $y$ и $z$** называют тройку чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, являющуюся решением каждого уравнения этой системы.

Аналогично определяется система $n$ рациональных уравнений с $n$ неизвестными и её решение.

**Решить систему уравнений — значит найти все её решения или показать, что их нет.**

В 7 классе уже рассмотрено решение систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными. В этом параграфе будет показано на примерах, как можно решать системы рациональных уравнений. При этом будем пользоваться следующими утверждениями.

1. Если уравнения системы поменять местами, то получится система, равносильная исходной.

2. Если в одном из уравнений системы перенести члены уравнения (с противоположными знаками) из одной части уравнения в другую, то получится система, равносильная исходной.

3. Если обе части одного из уравнений системы умножить на неравное нулю число, то получится система, равносильная исходной.

4. Если одно из уравнений системы заменить суммой этого уравнения и какого-либо другого уравнения системы, то получится система, равносильная исходной.

5. Система, равносильная исходной системе, получается также, если в одном из уравнений:

а) привести подобные члены многочлена;

б) применить формулы сокращённого умножения многочленов.

**524.** а) Какое уравнение называют рациональным уравнением?
б) Какое уравнение называют уравнением первой степени? второй степени?
в) Что называют решением уравнения с двумя неизвестными $x$ и $y$?
г) Что называют решением уравнения с тремя неизвестными $x$, $y$ и $z$?
д) Когда говорят, что надо решить систему двух уравнений с двумя неизвестными?
е) Когда говорят, что надо решить систему трёх уравнений с тремя неизвестными?
ж) Что называют решением системы двух уравнений с двумя неизвестными?
з) Что называют решением системы трёх уравнений с тремя неизвестными?
и) Что значит решить систему уравнений?

**525.** Является ли пара чисел (1; 2) решением уравнения:
а) $x + y = 3$; б) $2x + y = 1$; в) $3x + 2y = 7$;
г) $x^2 + y^2 = 3$; д) $x^2 + y^2 = 5$; е) $xy - x = 1$?

**526.** Подберите какое-либо решение уравнения:
а) $x + y = 5$; б) $3x + y = 5$;
в) $2x - 3y = 1$; г) $x^2 + y^2 = 9$;
д) $x^2 + 2xy + y^2 = 25$; е) $x^2 - xy = 0$.

**527.** Является ли тройка чисел (0; 1; 2) решением уравнения:
а) $3x + 2y + z = 4$; б) $x - y + z = 1$;
в) $x + 2y + 3z = 2$; г) $xy + 2xz + yz = 2$;
д) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$; е) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$?

**528.** Подберите какое-либо решение уравнения:
а) $x + y + z = 10$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$;
в) $xy + yx + yz = 3$; г) $xy - yx + yz = 1$.

**529.** **Доказываем.** Докажите, что уравнение не имеет действительных решений:
а) $x^2 + y^2 + 1 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 + 0{,}1 = 0$.

**530.** Дано уравнение $xy + x = 8$.
а) Какова степень этого уравнения?
б) Выразите $x$ через $y$. Для любого ли $y$ можно найти $x$?
в) Выразите $y$ через $x$. Для любого ли $x$ можно найти $y$?

**531.** Определите степень уравнения:
а) $2x - 5y = 7$; б) $x + x^2 - xy - 5 = 0$;
в) $xy = 4$; г) $x^2 - xy^2 - 7x = 0$;
д) $xy^5 - x^3y + 3 = 0$; е) $x^6 - x^8 - x^{10} = 0$.

**532.** Является ли пара чисел (1; 1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 - xy + y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + x^2 = 2, \\ 2x + 3y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ x + 2xy = 3? \end{cases}$

**533.** Является ли тройка чисел (1; 1; 1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 3x - 2y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ xy + xz + yz = 3, \\ x^2 + x - y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 8, \\ xy - 3x^2 + z = -1, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ x + y + z = 3, \\ xy + yz = 2? \end{cases}$

**534.** Является ли решением системы уравнений $\begin{cases} x^2 + xy - 3 = 0, \\ x + 5 = y \end{cases}$ пара чисел:

а) (0; 3); б) (−3; 2); в) (2; −3); г) (0,5; 5,5)?

**535.** Является ли решением системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y - z = -2, \\ xy + z^2 = 2 \end{cases}$$

тройка чисел:

а) (1; −1; 1); б) (1; 1; 1); в) (1; 1; −1); г) (−1; 1; 1)?

**536.** **Исследуем.** При каком значении $a$ пара чисел (2; −1) является решением системы уравнений $\begin{cases} a^2x - ay = 21, \\ 5x - ay = a^2 + 4? \end{cases}$

## 9.2. Решение систем рациональных уравнений способом подстановки

В этом пункте на примерах будет показано, как можно решить системы рациональных уравнений, хотя бы одно из которых — уравнение первой степени. Для решения таких систем применим способ подстановки, суть которого будет ясна из примеров.

**Пример 1.** Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0, \\ x^2 + 2xy + y^2 + 3y - 4x - 31 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Первое уравнение этой системы — уравнение первой степени. Выразим из него $x$ через $y$:

$$x = 7 - 2y. \qquad (2)$$

Подставим выражение $(7 - 2y)$ вместо $x$ во второе уравнение системы:

$$(7 - 2y)^2 + 2(7 - 2y)y + y^2 + 3y - 4(7 - 2y) - 31 = 0,$$

перепишем это уравнение в виде

$$y^2 - 3y - 10 = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет два корня: $y_1 = -2$ и $y_2 = 5$. Подставив эти числа в равенство (2) вместо $y$, найдём, что

$$x_1 = 11 \text{ и } x_2 = -3.$$

Итак, система (1) имеет два решения:

$$x_1 = 11,\ y_1 = -2;\ x_2 = -3,\ y_2 = 5,$$

и других решений не имеет.

Подобным образом можно решить любую систему двух уравнений с неизвестными $x$ и $y$, в которой есть уравнение первой степени. Выражаем $x$ (или $y$) из уравнения первой степени и подставляем это выражение во второе уравнение. Получаем уравнение с неизвестным $y$ (или $x$). Если это уравнение имеет корни, то и система имеет решения; если нет, то система не имеет решений.

**Пример 2.** Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y + 9 = 0, \\ x^2 - y^2 + y - 5x - 32 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Первое уравнение системы (4) — уравнение первой степени, а второе — второй степени. Из первого уравнения выразим $y$ через $x$:

$$y = 3x + 9.$$

Подставим выражение $(3x + 9)$ вместо $y$ во второе уравнение системы (4):

$$x^2 - (3x + 9)^2 + (3x + 9) - 5x - 32 = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$-8x^2 - 56x - 104 = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на $(-8)$, получим равносильное ему квадратное уравнение

$$x^2 + 7x + 13 = 0, \qquad (5)$$

дискриминант которого $D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -3 < 0$. Следовательно, уравнение (5) не имеет решений. Значит, и система (4) не имеет решений.

**Пример 3.** Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ \dfrac{x-1}{y+2} + \dfrac{y-1}{x+2} = \dfrac{1}{4}. \end{cases} \tag{6}$$

Выразим $y$ через $x$ из первого уравнения системы (6):

$$y = 2 - x. \tag{7}$$

Подставим выражение $2 - x$ вместо $y$ во второе уравнение системы (6):

$$\frac{x-1}{4-x} + \frac{1-x}{x+2} = \frac{1}{4}. \tag{8}$$

Перенеся все члены уравнения (8) в левую часть и применяя правила сложения и вычитания алгебраических дробей, получим, что уравнение (8) равносильно уравнению

$$\frac{9x^2 - 18x}{4(4-x)(x+2)} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Подставив эти числа в равенство (7), найдём, что $y_1 = 2$ и $y_2 = 0$.

Итак, система (6) имеет два решения: (0; 2), (2; 0).

Аналогично решают системы рациональных уравнений с большим, чем два, числом неизвестных.

**Пример 4.** Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x - y - z + 3 = 0, \\ x^2 + 2xy + y^2 - xz + z^2 + x - 5 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Из первого уравнения системы (10) выразим $x$ через $y$ и $z$:

$$x = z - y - 1. \tag{11}$$

Подставив выражение $(z - y - 1)$ вместо $x$ во второе уравнение системы (10), получим

$$z - y - 1 - y - z + 3 = 0,$$

откуда $y = 1$.

Теперь, подставив выражение $(z - 2)$ вместо $x$ и 1 вместо $y$ в третье уравнение системы (10), получим

$$(z-2)^2 + 2(z-2) + 1 - (z-2)z + z^2 + z - 2 - 5 = 0. \tag{12}$$

Решив уравнение (12), найдём два его корня: $z_1 = -3$ и $z_2 = 2$.

Подставив эти числа в равенство (11) вместо $z$ и 1 вместо $y$, получим, что $x_1 = -5$ и $x_2 = 0$.

Следовательно, система (10) имеет два решения:

$$x_1 = -5,\ y_1 = 1,\ z_1 = -3; \quad x_2 = 0,\ y_2 = 1,\ z_2 = 2$$

и других решений не имеет.

**537.** Как можно решить систему уравнений, в которой хотя бы одно из уравнений первой степени?

Решите систему уравнений (538—547):

**538.** а) $\begin{cases} x^2 = y, \\ y - 2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 - 1 = x, \\ x - 13 = 11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 3 = 2, \\ y^2 - x = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - y - 4 = 0, \\ y - 4 = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x = 2 + y, \\ x^2 - y = 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 = y, \\ 5x - y = 6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x = y - 2, \\ xy = 3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} y = x - 8, \\ xy = -7; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + 2 = 3. \end{cases}$

**539.** а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -40; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -28; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = -8, \\ xy = 15; \end{cases}$ д) $\begin{cases} xy = -15, \\ x - y = -8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ x^2 + y = 16; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x + y^2 = 1; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x - y^2 = 17. \end{cases}$

**540.** а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ y - x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ y - x = -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x + y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y = -6, \\ y^2 - x^2 = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - y = -3, \\ y^2 - x^2 = -1. \end{cases}$

**541.** а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x + y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 0{,}2, \\ x^2 - y^2 = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - y = 0{,}6, \\ y^2 - x^2 = 12; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - y = 11, \\ xy = 12; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y - x = 4, \\ xy = 5; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} xy = 12, \\ x + y = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} xy = 15, \\ x + y = -5; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = -13; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 0; \end{cases}$ л) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 0; \end{cases}$ м) $\begin{cases} xy = 5, \\ x - y = 0. \end{cases}$

**542.** а) $\begin{cases} x + y - 7 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 43; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 6 = 0, \\ 2x^2 - y^2 = -23; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 - 4xy + 11 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 12, \\ 2xy = 9(x - y); \end{cases}$

д) $\begin{cases} 9x^2 - 12x + 4y^2 + 4y = 15, \\ 3x + 2y = 3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 9x^2 - 30x - 16y^2 - 24y = 0, \\ 3x - 4y = 6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + x + y - 2 = 0, \\ x - y = 2; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 - 2y^2 + xy - x - y + 3 = 0. \end{cases}$

**543.** а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 9x^2 - 3xy + y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ 2xy - x^2 + 9y^2 = 11 - 4x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x^2 = (y - 2)^2 - 2x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 4y = 10, \\ (x - 1)^2 = 7(x + y) + 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x - y = 3, \\ 14xy - 5y^2 - 7x + 9 = 8y; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x^2 - 5yx + 8y^2 - 3x + 4y = 15; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 - 2xy + 4y = 5; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + 3xy - y^2 + 4y = 1. \end{cases}$

**544.** а) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y + z = 3, \\ z = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + z = 2, \\ x = -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + z = 1, \\ x + y = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ y + z = 3, \\ x + y = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ x + 2y = -1, \\ x - y = 5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 2y + z = 4, \\ y - z = 5; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ x - y + z = 7, \\ x + y = -3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y - z = -3, \\ y + z = 4; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 6, \\ 2x - y + z = 2; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x + y + z = -3, \\ x - y + z = -1, \\ x + 2y - z = -2. \end{cases}$

**545.** а) $\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + 2z = -1, \\ 3x - 2y + z = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 3x - 2y + z = 2, \\ 4x + 4y + z = 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y - z = -2, \\ x + 2y + z = 3, \\ 2x + y - 3z = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 3y - z = 8, \\ 2x + 4y + z = 3, \\ x + 9y + 4z = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x - 3y + z - 10 = 0, \\ 3x - 4y - z + 2 = 0, \\ x + y + z = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1, \\ x - y - z = 2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

**546.** а) $\begin{cases} x - y = -1, \\ y + z = 5, \\ xz = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = -3, \\ y - z = 1, \\ x^2 + z^2 = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 35, \\ x + y = 2, \\ x - z = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3y + z = x, \\ x - z = y, \\ x^2 - 3x = 5 + z^2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 4x - 2y = 7z, \\ y + z = x, \\ y^2 - 4 = 8x - 3z^2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ x + y + z = 12, \\ xy = 12. \end{cases}$

**547.** а) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ x - y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6}, \\ x + y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{12}, \\ x - y = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{2}{y} - \frac{3}{x} = -8, \\ 3x + y = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -1\frac{5}{12}, \\ x - y = 1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{x + 2}{y - 3} + \frac{y + 2}{x - 3} = -8; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x + y = 5, \\ \frac{x - 3}{y + 4} + \frac{y - 3}{x + 4} = -\frac{1}{20}; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{y^2 + 4y + 4} + \frac{3x - 3}{y + 2} = 4, \\ x + y = 9; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 4}{y^2 - 6y + 9} + \frac{2x + 4}{y - 3} = 3, \\ 7x + y = 29. \end{cases}$

## 9.3. Решение систем рациональных уравнений другими способами

При решении систем рациональных уравнений применяют разные способы: подстановки, сложения уравнений, введения новых неизвестных и др. Рассмотрим на примерах некоторые из них.

Основным способом решения систем уравнений является **способ подстановки**. Этим способом уже решались системы в п. 9.2.

При решении системы часто помогает **способ сложения уравнений**.

**Пример 1.** Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 6y - 2x + 6 = 0, \\ y^2 - x^2 + 2x - 1 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Оставив без изменения первое уравнение системы (1) и заменив второе уравнение суммой двух уравнений системы (1), получим систему

$$\begin{cases} x^2 + 6y - 2x + 6 = 0, \\ y^2 + 6y + 5 = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

равносильную системе (1).

Второе уравнение системы (2) имеет корни: $y_1 = -1$, $y_2 = -5$.

Подставив $y_1$ в первое уравнение системы (2), найдём, что ему удовлетворяют два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Подставив $y_2$ в первое уравнение системы (2), найдём, что ему удовлетворяют два корня: $x_3 = -4$, $x_4 = 6$.

Следовательно, система (1) имеет четыре решения: (0; –1), (2; –1), (–4; –5), (6; –5).

Найти решения системы часто помогает **способ введения новых неизвестных**.

**Пример 2.** Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2x^2 - y} + \dfrac{3}{x^2 - 2y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x^2 - y} - \dfrac{1}{x^2 - 2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases} \qquad (3)$$

Введя новые неизвестные $u = \dfrac{1}{2x^2 - y}$, $v = \dfrac{1}{x^2 - 2y}$, перепишем систему (3) в виде

$$\begin{cases} 2u + 3v = \dfrac{1}{2}, \\ 2u - v = \dfrac{1}{18}. \end{cases} \qquad (4)$$

Система (4) имеет единственное решение: $u_1 = \frac{1}{12}$, $v_1 = \frac{1}{9}$. Следовательно, все решения системы (3) есть решения системы

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 12, \\ x^2 - 2y = 9. \end{cases} \qquad (5)$$

Система (5), а значит, и система (3) имеют два решения: $(\sqrt{5}; -2)$, $(-\sqrt{5}; -2)$.

Решению систем часто помогает разложение на множители левой части уравнения $f(x) = 0$.

**Пример 3.** Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 7xy + 12y^2 = 0, \\ x^2 - 15xy + 45y^2 = 9. \end{cases} \qquad (6)$$

Разложив на множители левую часть первого уравнения системы (6), перепишем её в виде

$$\begin{cases} (x - 3y)(x - 4y) = 0, \\ x^2 - 15xy + 45y^2 = 9. \end{cases} \qquad (7)$$

Теперь очевидно, что все решения системы (7), а значит, и равносильной ей системы (6) являются решениями хотя бы одной из двух систем:

$$1)\ \begin{cases} x - 3y = 0, \\ x^2 - 15xy + 45y^2 = 9 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2)\ \begin{cases} x - 4y = 0, \\ x^2 - 15xy + 45y^2 = 9. \end{cases}$$

Объединив все решения систем 1) и 2), найдём все решения системы (6): (3; 1), (−3; −1), (12; 3), (−12; −3).

Решению систем иногда помогает выделение полных квадратов.

**Пример 4.** Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 + 4y = -13, \\ 5x^2 - 7xy - 21y^2 = 3. \end{cases} \qquad (8)$$

Выделив в первом уравнении системы (8) два полных квадрата, перепишем её в виде

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 0, \\ 5x^2 - 7xy - 21y^2 = 3. \end{cases} \qquad (9)$$

Теперь очевидно, что первое уравнение системы (9) имеет единственное решение: (3; −2). Остаётся проверить, является ли эта пара решением второго уравнения системы (9). Так как $5 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 \cdot (-2) - 21 \cdot (-2)^2 = 3$, то пара чисел (3; −2) является также решением второго уравнения системы (9), следовательно, эта пара чисел является и решением системы (8). ●

Решите систему уравнений (548—551):

**548.** а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2\dfrac{1}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1. \end{cases}$

**549.** а) $\begin{cases} x^2 + 12y = -68, \\ y^2 - 4x = 28; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x^2 + 2y = -1, \\ y^2 + 4x = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y} + \dfrac{2}{2x+y} = \dfrac{7}{5}, \\ \dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{3}{2x+y} = \dfrac{19}{15}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{5}{3x-y} - \dfrac{2}{2x+y} = \dfrac{29}{21}, \\ \dfrac{2}{3x-y} + \dfrac{5}{2x+y} = \dfrac{29}{21}. \end{cases}$

**550.** а) $\begin{cases} x^2 - 4y + \dfrac{1}{x^2 - 4y} = 2, \\ y^2 - 6x = -14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{x+y} + \dfrac{3x+3y}{2x-3y} = 4, \\ x - y^2 = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x^2 + 4xy = 1, \\ 9xy + 4y^2 = -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 - 4xy = 20, \\ 3xy - 4y^2 = -10. \end{cases}$

**551.** а) $\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 2y + 10 = 0, \\ 15x - 44y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 4x + 4y^2 - 4y + 5 = 0, \\ 1005{,}5x + 4024y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 + 5xy + 7y^2 = 21; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 4xy - 5y^2 = 0, \\ x^2 - 2xy + 6y^2 = 21. \end{cases}$

## 9.4. Решение задач при помощи систем рациональных уравнений

**Задача 1.** Бригада рабочих начала рыть траншею. Через 3 дня к ней присоединилась вторая бригада, и им понадобилось ещё 8 дней совместной работы, чтобы выкопать траншею до конца. Если бы, наоборот, первые три дня работала только вторая бригада, то до окончания работы обеим бригадам вместе потребовалось бы ещё 9 дней. За какое время каждая из бригад в отдельности сделала бы всю работу?

Решение. Пусть первая бригада может сделать всю работу за $x$ дней, а вторая — за $y$ дней. Тогда за один день первая бригада делает $\dfrac{1}{x}$ часть, а вторая — $\dfrac{1}{y}$ часть всей работы.

В первом случае первая бригада за 11 дней сделала $11 \cdot \frac{1}{x}$ частей всей работы, а вторая бригада за 8 дней сделала $8 \cdot \frac{1}{y}$ частей всей работы. Поскольку вместе они выполнили всю работу, то

$$11 \cdot \frac{1}{x} + 8 \cdot \frac{1}{y} = 1. \tag{1}$$

Во втором случае первая бригада работала бы 9 дней и сделала $9 \cdot \frac{1}{x}$ частей всей работы, а вторая — 12 дней и сделала $12 \cdot \frac{1}{y}$ частей всей работы. Вместе они выполнили бы всю работу, т. е.

$$9 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{y} = 1. \tag{2}$$

Таким образом, искомые числа $x$ и $y$ удовлетворяют уравнениям (1) и (2), т. е. чтобы решить задачу, надо решить систему двух рациональных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 11 \cdot \frac{1}{x} + 8 \cdot \frac{1}{y} = 1, \\ 9 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{y} = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Введя новые неизвестные $u = \frac{1}{x}$ и $v = \frac{1}{y}$, перепишем систему (3) в виде

$$\begin{cases} 11u + 8v = 1, \\ 9u + 12v = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Решив систему (4), получим её единственное решение: $u = \frac{1}{15}$ и $v = \frac{1}{30}$. Решив уравнения $\frac{1}{x} = \frac{1}{15}$ и $\frac{1}{y} = \frac{1}{30}$, получим, что $x = 15$, $y = 30$.

**Ответ:** Первая бригада сделала бы всю работу за 15 дней, а вторая — за 30 дней.

**Задача 2.** По окружности движутся две точки в одном и том же направлении. Длина окружности равна 24 м. Первая точка обходит окружность на 9 мин раньше второй и обгоняет другую каждые 4 мин. Определите скорости этих точек.

**Решение.** Пусть скорость первой точки $x$ м/мин, скорость второй $y$ м/мин. Тогда первая точка проходит всю окружность за $\frac{24}{x}$ мин, а вторая — за $\frac{24}{y}$ мин. Так как первая точка проходит окружность на 9 мин раньше второй, то

$$\frac{24}{y} = \frac{24}{x} + 9. \tag{5}$$

Второе условие задачи означает, что за 4 мин первая точка проходит на 24 м больше второй. Но за 4 мин первая точка проходит $4x$ м, а вторая — $4y$ м, поэтому

$$4x = 4y + 24. \tag{6}$$

Следовательно, искомые значения $x$ и $y$ удовлетворяют одновременно уравнениям (5) и (6), т. е. чтобы решить задачу, надо решить систему двух рациональных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \dfrac{24}{y} = \dfrac{24}{x} + 9, \\ 4x = 4y + 24. \end{cases} \tag{7}$$

Из второго уравнения системы (7) выразим $x$ через $y$:

$$x = y + 6, \tag{8}$$

и подставим выражение $(y + 6)$ вместо $x$ в первое уравнение системы (7):

$$\frac{24}{y} = \frac{24}{y+6} + 9. \tag{9}$$

Перенесём в уравнении (9) все члены в левую часть, затем вычтем алгебраические дроби. Получим уравнение

$$\frac{-9y^2 - 54y + 144}{y(y+6)} = 0, \tag{10}$$

равносильное уравнению (9). Решим теперь уравнение

$$-9y^2 - 54y + 144 = 0$$

или равносильное ему уравнение

$$y^2 + 6y - 16 = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) имеет два корня: $y_1 = 2$ и $y_2 = -8$.

Так как числа $y_1$ и $y_2$ не обращают в нуль знаменатель левой части уравнения (10), то они являются его корнями. Подставив $y_1$ и $y_2$ в равенство (8), найдём $x_1 = 8$ и $x_2 = -2$.

Таким образом, система (7) имеет два решения:

$$x_1 = 8,\ y_1 = 2 \text{ и } x_2 = -2,\ y_2 = -8.$$

Скорости $x$ и $y$ — положительные числа, поэтому второе решение системы не удовлетворяет условию задачи.

**Ответ**: скорость первой точки 8 м/мин, второй — 2 м/мин.

**Задача 3.** Каждому из трёх рабочих для выполнения некоторой работы требуется определённое время, причём третий рабочий выполняет её на 1 ч быстрее первого. Работая вместе, они выполняют работу за 1 ч. Если же первый рабочий проработает 1 ч и прекратит работу, а затем второй рабочий проработает 4 ч, то они вместе выполнят всю работу. За сколько времени может выполнить всю работу каждый рабочий?

**Решение.** Пусть первый рабочий может выполнить всю работу за $x$ ч, второй — за $y$ ч, третий — за $z$ ч. Тогда за 1 ч первый выполнит $\frac{1}{x}$, второй — $\frac{1}{y}$ и третий — $\frac{1}{z}$ часть всей работы. Работая вместе, они выполняют за один час $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ часть всей работы. Но по условию задачи за 1 ч они выполняют всю работу, следовательно,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1. \tag{12}$$

Если первый рабочий проработает 1 ч, а затем второй — 4 ч, то они вместе сделают $\left(\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}\right)$ часть всей работы. На самом же деле по условию задачи они сделают всю работу, следовательно,

$$\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=1. \tag{13}$$

Так как третий рабочий выполняет всю работу на 1 ч быстрее первого, то

$$x=z+1. \tag{14}$$

Таким образом, искомые числа $x$, $y$, $z$ одновременно удовлетворяют уравнениям (12), (13) и (14). Следовательно, для решения задачи надо решить систему трёх рациональных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, \\ \frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=1, \\ x=z+1. \end{cases} \tag{15}$$

Из третьего уравнения системы (15) выражаем $z$ через $x$:

$$z=x-1. \tag{16}$$

Из второго уравнения системы (15) выражаем $\frac{1}{y}$ через $x$:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right). \tag{17}$$

Подставим $(x-1)$ вместо $z$ и $\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)$ вместо $\frac{1}{y}$ в первое уравнение системы (15):

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}=1. \tag{18}$$

Перенеся в уравнении (18) все его члены в левую часть и сложив алгебраические дроби, получим уравнение

$$\frac{3x^2 - 10x + 3}{4x(x-1)} = 0, \quad (19)$$

равносильное уравнению (18). Теперь решим уравнение

$$3x^2 - 10x + 3 = 0. \quad (20)$$

Оно имеет два корня: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Так как числа $x_1$ и $x_2$ не обращают в нуль знаменатель левой части уравнения (19), то $x_1$ и $x_2$ есть корни уравнения (19). Подставив $x_1$ и $x_2$ в равенства (16) и (17), найдём: $y_1 = 6$, $y_2 = -2$, $z_1 = 2$, $z_2 = -\frac{2}{3}$. Следовательно, система (15) имеет два решения: $x_1 = 3$, $y_1 = 6$, $z_1 = 2$ и $x_2 = \frac{1}{3}$, $y_2 = -2$, $z_2 = -\frac{2}{3}$.

Поскольку через $x$, $y$ и $z$ мы обозначили количество часов, необходимое для выполнения работы, то $x$, $y$ и $z$ не могут быть отрицательными числами. Поэтому условию задачи удовлетворяет лишь решение

$$x_1 = 3,\ y_1 = 6,\ z_1 = 2.$$

Ответ: первый рабочий может выполнить всю работу за 3 ч, второй — за 6 ч, третий — за 2 ч.

**552.** а) Разложите число 171 на два множителя, сумма которых была бы равна 28.
б) Разложите число 231 на два множителя, разность которых была бы равна 10.
в) Сумма двух чисел равна 3, а сумма их квадратов равна 65. Найдите эти числа.
г) Даны два числа, их разность и разность их квадратов равны 11. Найдите данные числа.

**553.** а) Периметр прямоугольника равен 25 м, а площадь — 34 м$^2$. Определите стороны прямоугольника.
б) Периметр прямоугольника равен 10,6 см, а площадь — 6,72 см$^2$. Определите стороны прямоугольника.
в) Одна из сторон прямоугольника на 4 дм больше другой, а сумма площадей четырёх квадратов, построенных на сторонах прямоугольника, равна 52 дм$^2$. Определите стороны прямоугольника.
г) Составьте задачу, аналогичную предыдущей задаче, и решите её.

**554.** а) Если к квадрату первого числа прибавить удвоенное второе число, то получится (–7), а если из первого числа вычесть второе, то получится 11. Найдите эти числа.
б) Найдите два числа, если отношение суммы этих чисел к их разности равно 8 : 1 и разность квадратов этих чисел равна 128. Сколько решений имеет задача?

**555.** а) Найдите двузначное число, если цифра десятков на 2 больше цифры единиц, а произведение числа на сумму его цифр равно 640.
б) Найдите двузначное число, если цифра единиц на 2 больше цифры десятков, а произведение числа на сумму его цифр равно 144.

**556.** а) Если разделить двузначное число на произведение его цифр, то получится в частном 2 и в остатке 5. Если переставить цифры этого числа и полученное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 3. Найдите это число.
б) Сумма цифр двузначного числа равна 9. Сумма квадратов этих же цифр равна 41. Если от искомого числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.
в) В двузначном числе сумма квадратов его цифр равна 25, а произведение их равно 12. Найдите это число.
г) Составьте задачи, аналогичные задачам а) — в), и решите их.

**557.** а) Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 8 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 12 ч быстрее, чем второй рабочий. За сколько часов каждый из них может выполнить отдельно эту работу?
б) Двое рабочих, работая вместе, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал в два раза быстрее, а второй — в два раза медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней выполнил бы эту работу первый рабочий?

**558.** а) Два каменщика, работая вместе, могут выполнить работу за 4,8 дня. Второй каменщик, работая отдельно, мог бы выполнить эту работу на 4 дня быстрее, чем первый. За сколько дней каждый каменщик, работая отдельно, мог бы выполнить эту работу?
б) На уборке урожая два комбайна работали вместе 3 дня. После этого, чтобы закончить работу, первому комбайну потребовалось ещё 4,5 дня. За сколько дней каждый комбайн в отдельности может убрать весь урожай, если первый, работая отдельно, мог бы провести уборку на 2 дня скорее, чем один второй?

**559.** а) На обработку одной детали первый рабочий затрачивает на 6 мин меньше, чем второй. Сколько деталей обработает каждый рабочий за 5 ч, если первый обработает за это время на 25 деталей больше, чем второй?
б) За два дня совместной работы двух тракторов различной мощности была вспахана одна треть поля. За сколько дней можно было бы вспахать всё поле каждым трактором отдельно, если первым трактором можно вспахать всё поле на 5 дней скорее, чем вторым?

**560.** а) Два трактора различной мощности могут совместно вспахать поле за 9 ч. Если бы первый трактор работал один 1,2 ч, а затем второй — 2 ч, то было бы вспахано только 20% поля. Сколько часов требуется каждому трактору на вспашку всего поля?
б) На выполнение работы двум штукатурам требуется 12 ч. Если бы сначала первый сделал половину работы, а затем другой — оставшуюся часть, то вся работа была бы выполнена за 25 ч. За какое время мог бы выполнить всю работу каждый штукатур в отдельности?

**561.** а) Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на 2 листа больше установленной нормы, то окончит работу раньше намеченного срока на 3 дня. Если же она будет печатать в день на 4 листа больше установленной нормы, то окончит работу на 5 дней раньше срока. Сколько листов требовалось напечатать машинистке и в какой срок?
б) Два маляра могут окрасить стены цеха за 60 ч. Найдите время, которое потребуется каждому из них для выполнения этой же работы отдельно, если известно, что одному из них потребуется на 22 ч больше, чем другому.

# § 10. Графический способ решения систем уравнений

В этом параграфе будет рассмотрен приём, который обычно называют графическим способом решения систем уравнений. Этот приём состоит в построении графиков соответствующих функций, в выяснении, пересекаются ли они, т. е. имеет ли система уравнений решения и сколько их. Вообще говоря, этим способом не всегда можно найти точные решения, но в отдельных случаях удаётся их найти.

Поэтому, чтобы проверить, что решения найдены точно, надо их подставить в каждое уравнение системы и убедиться, что получатся верные равенства.

В этом параграфе примеры подобраны так, чтобы решения систем или уравнений были почти очевидны из рисунков.

## 10.1. Графический способ решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

**Пример 1.** Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ x + 2y + 3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Выразим $y$ через $x$ в каждом из этих уравнений, получим систему

$$\begin{cases} y = 3x + 2, \\ y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}, \end{cases} \quad (2)$$

равносильную системе (1).

Введём в плоскости прямоугольную систему координат $xOy$. Уравнение $y = 3x + 2$ есть уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(1; 5)$ и $B_1(0; 2)$, а уравнение $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ есть уравнение прямой, проходящей через точки $A_2(1; -2)$ и $B_2\left(0; -\frac{3}{2}\right)$.

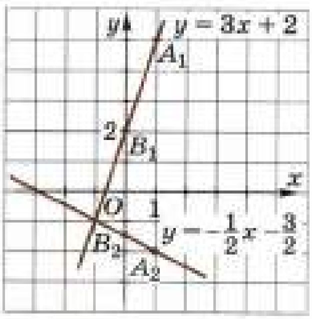



Рис. 99

Построим эти прямые в системе координат $xOy$ (рис. 99).

Как видно из рисунка 99, прямые пересекаются в точке $(-1; -1)$. Её координаты $x = -1$, $y = -1$ и являются единственным решением системы (2), но тогда и равносильной ей системы (1). Подставив найденные значения $x$ и $y$ в каждое уравнение системы (1), убедимся, что решение системы найдено точно.

Отметим, что по виду уравнений (2) заранее можно сказать, что рассматриваемые прямые пересекаются в одной точке. Ведь угловые коэффициенты этих прямых разные $\left(3 \neq -\frac{1}{2}\right)$, следовательно, прямые не параллельны.

**Пример 2.** Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Выразим $y$ через $x$ в каждом из уравнений системы (3), получим равносильную ей систему уравнений

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = x + 2. \end{cases} \quad (4)$$

Уравнения системы (4) есть уравнения параллельных прямых, так как они имеют равные угловые коэффициенты.

Эти прямые не совпадают, потому что они пересекают ось $y$ в разных точках: первая — в точке (0; 1), а вторая — в точке (0; 2) (рис. 100).

Таким образом, эти прямые не пересекаются, поэтому система (4), а тогда и система (3) не имеют решений.

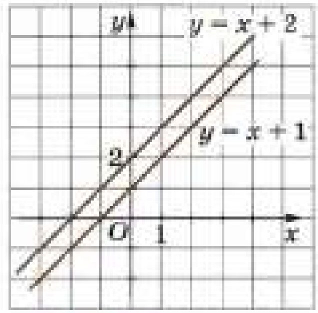



**Рис. 100**

**Пример 3.** Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0, \\ -4x - 4y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Выразим $y$ через $x$ в каждом из этих уравнений, получим равносильную системе (5) систему уравнений

$$\begin{cases} y = -x + 0{,}5, \\ y = -x + 0{,}5. \end{cases} \qquad (6)$$

Уравнения этой системы одинаковы и, следовательно, определяют одну и ту же прямую $y = -x + 0{,}5$ (рис. 101).

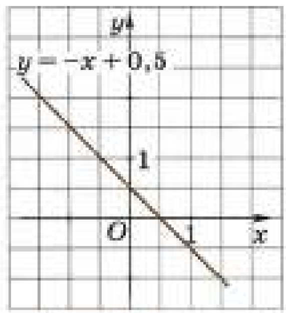



**Рис. 101**

Это показывает, что все решения системы (5) образуют совокупность пар координат $(x;\ y)$ точек прямой $y = -x + 0{,}5$. Система (5) имеет бесконечно много решений: $(x;\ -x + 0{,}5)$, где $x$ — любое число.

Таким образом, для решения системы линейных уравнений графическим способом надо:

1) разрешить каждое уравнение относительно $y$;

2) построить на координатной плоскости прямые, соответствующие полученным уравнениям.

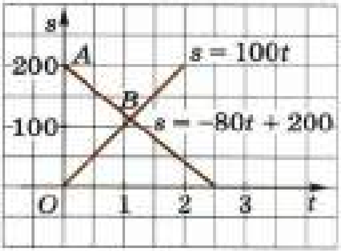
Если прямые пересекаются, то координаты точки их пересечения и будут решением системы.

Если прямые окажутся параллельными, то система не имеет решений.

Если прямые совпадут, то система имеет бесконечно много решений — множество пар координат точек этой прямой.

**Замечание.** Случаи, когда хотя бы в одном из уравнений системы не удаётся выразить $y$ через $x$, рассмотрены в следующем пункте.

**Задача.** Поезд, выйдя в момент $t_0 = 0$ со станции $O$, идёт со скоростью 100 км/ч. Навстречу ему со скоростью 80 км/ч идёт другой поезд, вышедший со станции $A$ в тот же момент $t_0 = 0$. Расстоя-




■ **Рис. 102**

ние от $O$ до $A$ равно 200 км. Построить графики движения этих поездов и по ним определить, когда и на каком расстоянии от станции $O$ поезда встретятся.

**Решение.** Зададим прямоугольную систему координат $tOs$ (рис. 102). Будем считать, что 1 см на оси $t$ соответствует 1 ч, а 1 см на оси $s$ соответствует 100 км.

Отметим на оси $s$ точку $A$, имеющую координату $s = 200$. Удобно считать, что первый поезд движется в положительном направлении оси $s$ от точки $O$, а второй — в отрицательном направлении оси $s$ от точки $A$. Тогда закон движения первого поезда выражается функцией

$$s = 100t, \tag{7}$$

а закон движения второго поезда выражается функцией

$$s = -80t + 200. \tag{8}$$

Скорость есть коэффициент при $t$. Для первого поезда она положительная, а для второго — отрицательная. Кроме того, при $t = 0$ первый поезд имеет на оси $s$ координату $s = 0$, а второй — координату $s = 200$, что согласуется с уравнениями (7) и (8).

На рисунке 102 изображены прямые — графики этих функций. Встреча поездов произойдёт в такой момент $t$, при котором ординаты точек графиков равны одному и тому же числу $s$. Но тогда эти числа $t$ и $s$ должны удовлетворять одновременно обоим уравнениям (7) и (8), т. е. быть координатами точки $B$ пересечения прямых.

Из рисунка видно, что координаты точки $B$ приблизительно равны:

$$t \approx 1{,}1,\ s \approx 110.$$

Для сравнения решим систему уравнений

$$\begin{cases} s = 100t, \\ s = -80t + 200 \end{cases}$$

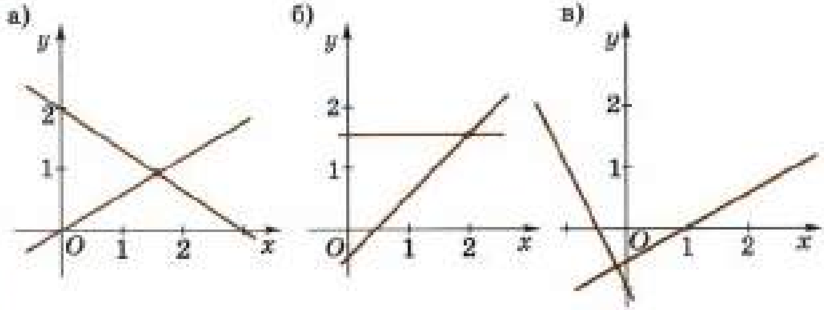
и получим $t = \dfrac{10}{9}$ ч $= 66{,}66\ldots$ мин $\approx 67$ мин,

$$s = 100 \cdot \frac{10}{9} \text{ км} = 111{,}11\ldots \text{ км} \approx 111 \text{ км}.$$

**Ответ:** поезда встретятся приблизительно через 1,1 ч на расстоянии приблизительно 110 км от станции $O$.

**562.** Как решить графическим способом систему линейных уравнений?

**563.** Определите на глаз координаты точек пересечения прямых, указанных на рисунке 103.




■ **Рис. 103**

**564.** Определите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:
а) $y = 2x - 7$; б) $y = -x - 2$; в) $y = \frac{1}{7} - 2x$; г) $y = -\frac{1}{3} - 0{,}2x$.

**565.** Определите координаты точек пересечения графиков функций:
а) $y = x + 4$ и $y = 3x$; б) $y = -2$ и $y = 7x + 1$;
в) $y = 2 - 3x$ и $y = 5x - 4$.

**566.** Решите графическим способом систему уравнений:
а) $\begin{cases} y = 5 - x, \\ y = x - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x - 2, \\ y = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 2x - 4, \\ y = 2 - x; \end{cases}$
г) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ y + x = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ 2x + 4y + 2 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x - y = 4; \end{cases}$
ж) $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + y = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 7x - y - 3 = 0, \\ 14x - 2y = -5; \end{cases}$ и) $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ 6x + 2y = 2. \end{cases}$

## 10.2*. Графический способ исследования системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Рассмотрим систему уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ — данные отличные от нуля числа.

Выразив $y$ через $x$ в каждом из уравнений системы (1), получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1}, \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x - \dfrac{c_2}{b_2}. \end{cases} \qquad (2)$$

В декартовой системе координат $xOy$ первое уравнение системы (2) есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $-\frac{a_1}{b_1}$, а второе уравнение системы (2) есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $-\frac{a_2}{b_2}$.

Возможны три случая.

**1-й случай.** Коэффициенты при $x$ и $y$ уравнений системы (1) не пропорциональны, т. е.

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Тогда угловые коэффициенты прямых различны:

$$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2},$$

и прямые пересекаются в единственной точке. Следовательно, система (1) имеет единственное решение.

**2-й случай.** Коэффициенты при $x$ и $y$ уравнений системы (1) пропорциональны, но они не пропорциональны свободным членам, т. е.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Тогда угловые коэффициенты прямых равны между собой:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}, \text{ но } -\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2}.$$

Поэтому прямые параллельны и не совпадают. Следовательно, система (1) не имеет решений.

**3-й случай.** Числа $a_1$, $b_1$, $c_1$ соответственно пропорциональны числам $a_2$, $b_2$, $c_2$, т. е.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Тогда

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}, \quad -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2},$$

и, следовательно, оба уравнения системы (2) определяют одну и ту же прямую, т. е. система имеет бесконечно много решений.

Координаты точек этой прямой и являются всевозможными решениями системы (1).

**Замечание 1.** Будем считать, что числа $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ отличны от нуля. При $c_1 = c_2 = 0$, если числа $a_1$, $b_1$ пропорциональны числам $a_2$, $b_2$, прямые, о которых идёт речь, совпадают. Если же эти числа не пропорциональны, то прямые пересекаются в точке (0; 0).

При $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, если числа $a_1$, $b_1$ пропорциональны числам $a_2$, $b_2$, то прямые различны и параллельны; если же числа $a_1$, $b_1$ не пропорциональны числам $a_2$, $b_2$, то прямые пересекаются.

**Замечание 2.** Если некоторые из коэффициентов системы уравнений первой степени равны нулю, то система (1) сводится к одной из следующих систем:

1) $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ y = b_0 \end{cases}$ $a \neq 0$ и $b \neq 0$ (рис. 104, *а*);

2) $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ x = a_0 \end{cases}$ $a \neq 0$ и $b \neq 0$ (рис. 104, *б*);

3) $\begin{cases} x = a_0, \\ y = b_0 \end{cases}$ (рис. 104, *в*);

4) $\begin{cases} y = b_1, \\ y = b_2 \end{cases}$ (рис. 104, *г*, *д*);

5) $\begin{cases} x = a_1, \\ x = a_2 \end{cases}$ (рис. 104, *е*, *ж*).

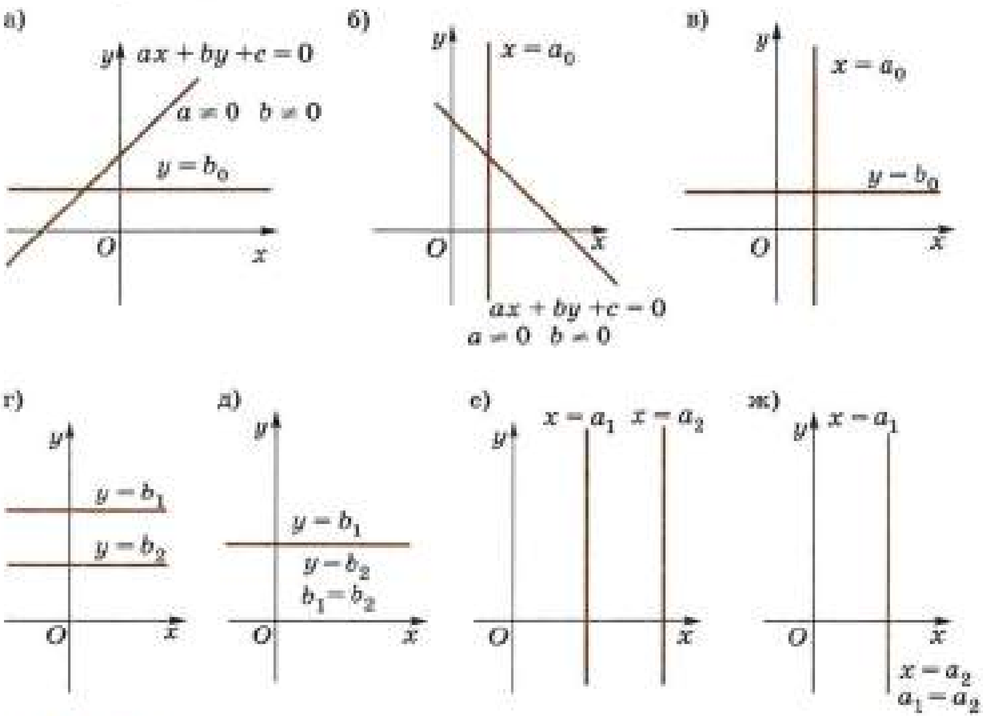



**Рис. 104**

В случаях 1, 2 и 3 прямые, соответствующие уравнениям системы, пересекаются в одной точке, т. е. система имеет единственное решение.

В случаях 4 ($b_1 \ne b_2$) и 5 ($a_1 \ne a_2$) указанные прямые параллельны и система не имеет решений.

Наконец, в случаях 4 ($b_1 = b_2$) и 5 ($a_1 = a_2$) указанные прямые сливаются в одну прямую и система имеет бесконечно много решений, соответствующих точкам этой прямой.

**Замечание 3.** Напомним, что уравнению $x = a$ удовлетворяют все точки координатной плоскости, имеющие абсциссу $a$ и ординату, равную любому числу. Все такие точки лежат на прямой, параллельной оси $Oy$ и проходящей через точку $A(a; 0)$.

**567.** Какому условию должны удовлетворять числа $k_1$, $k_2$, $b_1$ и $b_2$, чтобы прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:
а) пересекались; б) были параллельны; в) совпадали?

**568.** Сколько решений имеет система уравнений
$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2, \end{cases}$$
если:
а) $k_1 = k_2$, $b_1 \ne b_2$; б) $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$; в) $k_1 \ne k_2$?

**569.** Сколько решений имеет система уравнений
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$$
где $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$ — числа отличные от нуля, если:
а) $\frac{a_1}{a_2} \ne \frac{b_1}{b_2}$; б) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \ne \frac{c_1}{c_2}$; в) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$?

**570.** Какому условию должны удовлетворять отличные от нуля числа $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$, чтобы система уравнений
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0: \end{cases}$$
а) имела единственное решение;
б) имела бесконечно много решений;
в) не имела решений?

**571.** Пересекает ли обе оси координат прямая $ax + by + c = 0$, если оба числа $a$ и $b$ отличны от нуля?

**572.** Какое уравнение имеет прямая, параллельная:
а) оси $x$; б) оси $y$?

**573.** При каких значениях $a$, $b$ и $c$ прямая $ax + by + c = 0$:
а) пересекает оси координат;
б) параллельна оси $x$;
в) параллельна оси $y$?

**574.** Определите, сколько решений имеет система уравнений, и дайте геометрическое объяснение выводу.

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 4x - 0{,}3y = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x - 4y = 6, \\ x - 2y = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x + 4y = 1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 0{,}3x + 1\frac{1}{7}y = 5, \\ -0{,}15x - \frac{4}{7}y = -2\frac{1}{2}; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3\frac{1}{3}x - 2{,}2y = 0, \\ 10x - 6{,}6y = 1. \end{cases}$

**575.** Имеет ли решение система уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 2, \\ -x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - 4y = 1, \\ 20x - 16y = -4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ \frac{1}{2}x + y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}5x - 0{,}13y = 2, \\ \frac{x}{6} - \frac{13y}{30} = \frac{2}{7}? \end{cases}$

Проиллюстрируйте ответ с помощью графиков.

**576.** Определите $k$, если прямая $y = kx$ проходит через точку, координаты которой являются решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + 2y = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x + y = 3. \end{cases}$

**577.** **Доказываем.** Докажите, что система уравнений имеет бесконечно много решений:

а) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x + 2y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ 0{,}5x + 0{,}5y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}2y + 0{,}9 = 0, \\ -3x - 2y = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 3, \\ \frac{2x}{3} - 6 = -\frac{2y}{3}. \end{cases}$

**578.** При каких $a$ и $b$ прямые $x + y = -b$ и $x - ay = 2$:
а) пересекаются в точке (1; 4); б) параллельны; в) совпадают?

**579.** Составьте систему уравнений, решением которой является пара чисел:

а) (3; −1); б) (1; 3); в) (5; −2); г) (0; 3).

**580.** Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - y + 1 = 0, \\ y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ -2x + y = 5, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 5, \\ x + y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} - \frac{2}{3} = 0, \\ 2x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$

**Исследуем** (581—582).

**581.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (3 - 2a)x + (1 - a)y - a^2 = 0, \\ 7x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

**582.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2x - (2a + 1)y - (5a + 3) = 0, \\ 4x - 5y - 13 = 0 \end{cases}$$

не имеет решений.

## 10.3. Решение систем уравнений первой и второй степени графическим способом

Системы уравнений первой и второй степени, как и системы уравнений первой степени, можно решать графически.

**Пример 1.** Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0, \\ x^2 - 2x = y + 3. \end{cases} \quad (1)$$

Разрешив каждое уравнение системы (1) относительно $y$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x - 3, \\ y = x^2 - 2x - 3. \end{cases}$$

В одной системе координат $xOy$ построим прямую $y = x - 3$ и параболу $y = x^2 - 2x - 3$ (рис. 105). Для построения этих графиков составим таблицы значений функций ($x_0$ — абсцисса вершины параболы).

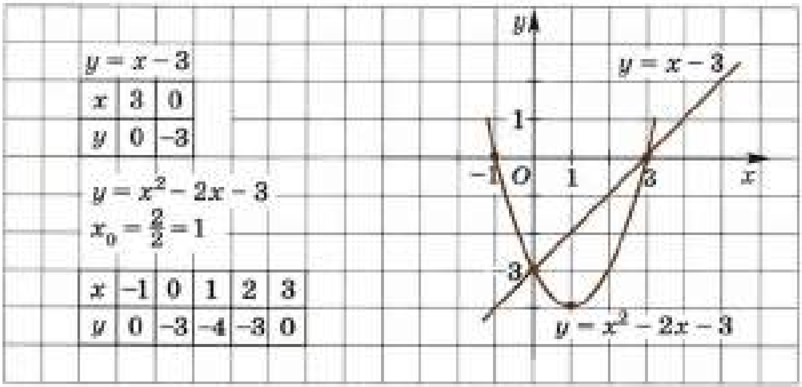



Рис. 105

Как видно из рисунка 105, прямая и парабола пересекаются в двух точках (0; −3) и (3; 0). Пары чисел (0; −3) и (3; 0) обращают каждое уравнение системы в верное равенство, следовательно, решениями системы являются пары чисел (3; 0) и (0; −3). Других решений система не имеет.

**Пример 2.** Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 8x + 7, \\ y = -x^2 - 2x + 4. \end{cases} \qquad (2)$$

В одной системе координат построим параболы $y = 2x^2 + 8x + 7$ и $y = -x^2 - 2x + 4$ (рис. 106). Для этого составим таблицы значений функций.

Параболы пересекаются в двух точках, поэтому система (2) имеет два решения. Легко убедиться подстановкой: первое решение (−3; 1) найдено точно, а второе (−0,3; 4,5) приближённо.

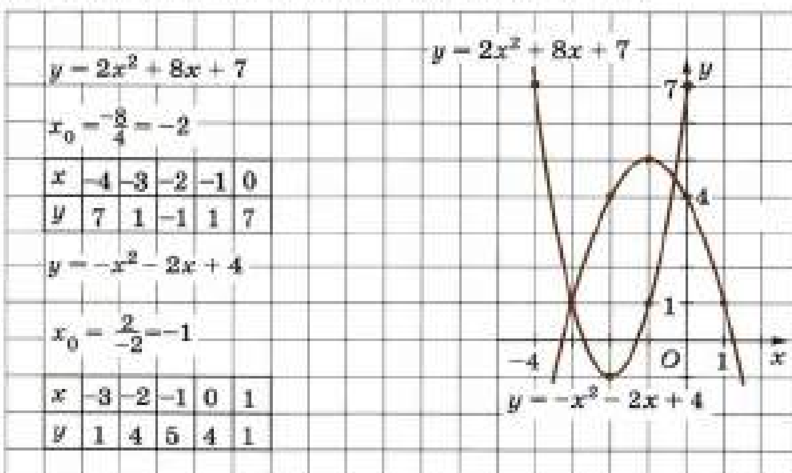



Рис. 106

**Замечание.** Если потребуется найти второе решение точно, то нужно будет решить уравнение $2x^2 + 8x + 7 = -x^2 - 2x + 4$, которое имеет корни $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, и найти значения $y$, соответствующие найденным корням: $y_1 = 1$, $y_2 = 4\frac{5}{9}$. Теперь второе решение найдено точно: $\left(-\frac{1}{3};\ 4\frac{5}{9}\right)$.

**Пример 3.** Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^2. \end{cases} \tag{3}$$

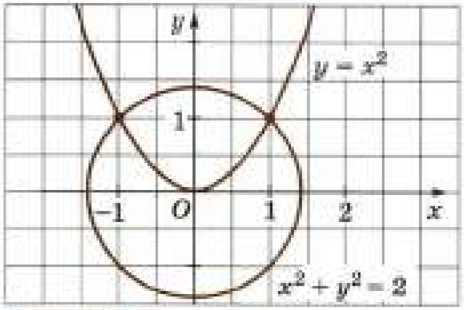
Первое уравнение системы (3) есть уравнение окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром $O(0;\ 0)$. Второе уравнение системы (3) есть уравнение параболы. Окружность и парабола пересекаются в двух точках $(1;\ 1)$ и $(-1;\ 1)$ (рис. 107, *а*). Система (3) имеет два решения: $(1;\ 1)$ и $(-1;\ 1)$. Как легко убедиться подстановкой, оба решения найдены точно.

Отметим, что графическим способом можно решать и некоторые другие системы.

**Пример 4.** Решим графическим способом систему уравнений

$$\begin{cases} y = |x| - 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Первое уравнение системы (4) задаёт функцию, график которой — прямой угол с вершиной $(0;\ -1)$. Его стороны проходят через точки $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 0)$. Второе уравнение системы (4) есть уравнение окружности с центром $(0;\ 0)$ и радиусом 1. Эти графики пересекаются в точках $(0;\ -1)$, $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 0)$ (рис. 107, *б*). Система (4) имеет три решения: $(0;\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$. Легко убедиться, что решения найдены точно.

а)


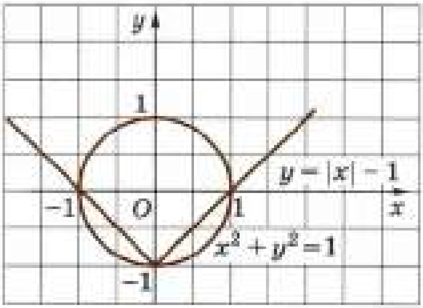

б)



**Рис. 107**

**583.** а) Как решить систему уравнений графическим способом?
б) Всегда ли графический способ решения систем уравнений даёт точные решения?
в) Как проверить, точное или приближённое решение получено?

**584.** Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = 3, \\ y + 6 = x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2, \\ x^2 = 3 + y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 2x - 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2, \\ y = x + 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = -x^2 + 4x + 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 1, \\ y = x^2 + 1. \end{cases}$

**585.** Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9, \\ y - x = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy = 1, \\ y = 0{,}5x + 0{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = 1, \\ y = -2x + 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 10, \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy = 8, \\ y + 1 = x^2? \end{cases}$

**Исследуем** (586—587).

**586.** Говорят, что **прямая** $y = kx + l$ **касается параболы** $y = ax^2 + bx + c$, если прямая и парабола имеют единственную общую точку. То есть если система уравнений $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c, \\ y = kx + l \end{cases}$ имеет единственное решение. Найдите все значения $k$, при каждом из которых:
а) прямая $y = kx$ касается параболы $y = 0{,}5x^2 - x + 4{,}5$;
б) прямая $y = kx - 4k - 2$ касается параболы $y = 0{,}5x^2 - 3x + 6{,}5$.

**587.** Говорят, что **прямая** $y = kx + b$ **касается окружности** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, если прямая и окружность имеют единственную общую точку. То есть если система уравнений

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \\ y = kx + b \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите все значения $k$, при каждом из которых:
а) прямая $y = kx + 3$ касается окружности $(x + 2)^2 + y^2 = 9$;
б) прямая $y = k(x - 5) + 5$ касается окружности $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

## 10.4. Примеры решения уравнений графическим способом

**Пример 1.** Решим графическим способом уравнение

$$x^2 = -2x + 3. \qquad (1)$$

Чтобы найти значения $x$, при которых выполняется равенство (1), построим графики двух функций $y = x^2$ и $y = -2x + 3$ в одной системе координат (рис. 108).

Парабола $y = x^2$ и прямая $y = -2x + 3$, изображённые на рисунке 108, пересекаются в точках (1; 1) и (–3; 9). При $x = 1$ и $x = -3$ эти функции имеют одинаковые значения, т. е. выполняется равенство

$$x^2 = -2x + 3.$$

Это означает, что числа 1 и –3 являются корнями уравнения (1).

Графический способ решения уравнений даёт лишь приближённые корни. Чтобы доказать, что какой-то из корней найден точно, надо подставить его в решаемое уравнение и проверить, получится ли верное равенство.

В примере 1 корни найдены точно, так как

$$1^2 = -2 \cdot 1 + 3,$$
$$(-3)^2 = -2 \cdot (-3) + 3.$$

Уравнение (1) можно было бы решить без графиков, переписав его в виде

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

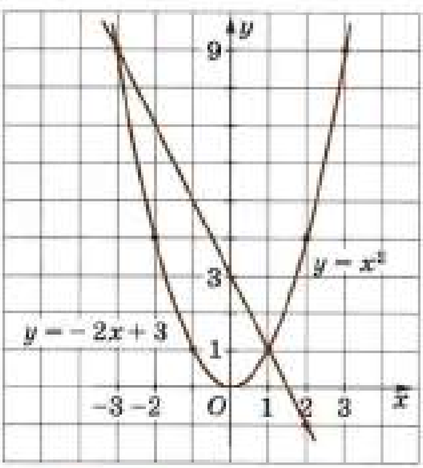



Рис. 108

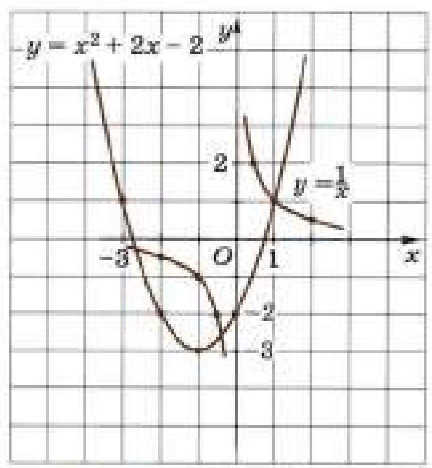



Рис. 109

**Пример 2.** Решим графическим способом уравнение

$$x^2 + 2x - 2 = \frac{1}{x}. \qquad (2)$$

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = x^2 + 2x - 2 \text{ и } y = \frac{1}{x}.$$

Парабола $y = x^2 + 2x - 2$ и гипербола $y = \frac{1}{x}$ (рис. 109) пересекаются в трёх точках (1; 1), (−0,4; −2,5) и (−2,6; −0,5), приближённые значения координат которых находятся из рисунка. Абсциссы этих точек — корни уравнения (2): $x_1 = 1$ — точный корень, так как

$$1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = \frac{1}{1},$$

а $x_2 = -0{,}4$ и $x_3 = -2{,}6$ — корни приближённые.

**588.** На рисунке 110 изображены графики функций

$$y = \frac{1}{x} \text{ и } y = 2x - 1.$$

а) Укажите несколько значений $x$, при которых эти функции принимают различные значения.

б) Укажите корни уравнения

$$\frac{1}{x} = 2x - 1.$$

Являются ли найденные корни точными или приближёнными?

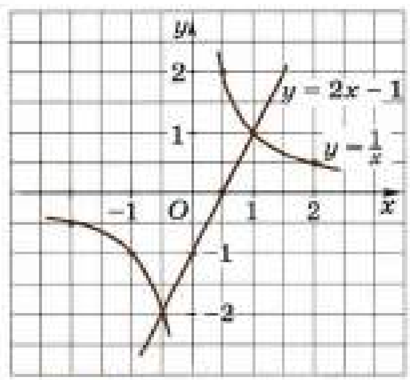



**Рис. 110**

Решите графическим способом уравнение (589—590):

**589.** а) $x^2 = x + 2$; б) $x^2 = 3x - 2$; в) $2x^2 = 3x + 2$;
г) $2x^2 = -x + 3$; д) $3x^2 = -x + 4$; е) $3x^2 = x + 2$.

**590.** а) $\frac{1}{x} = 2x + 1$; б) $\frac{1}{x} = -x + 2$.

**591.** Определите с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение:
а) $x^2 = x - 1$; б) $2x^2 = 3x + 5$;
в) $3x^2 = x + 7$; г) $\frac{1}{x} = -x + 1$.

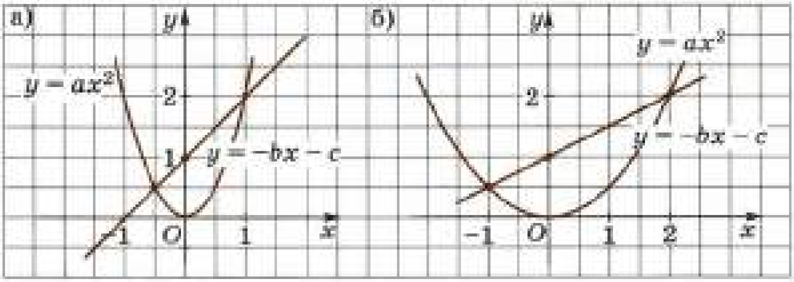



**Рис. 111**

**592.** Используя графики функций (рис. 111), решите уравнение $ax^2 = -bx - c$ и определите $a$, $b$ и $c$.

**Исследуем** (593—594).

**593.** Найдите все значения $a$, такие, что уравнение

$$|x + 3| - 1 = |2x - a|$$

имеет единственное решение.

**594.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $\sqrt{4 - x^2} = |x - a|$: а) имеет единственный корень; б) имеет два корня; в) не имеет корней.

# Дополнения к главе 4

## 1. Решение уравнений в целых числах

Пусть дано уравнение степени $n$ ($n \in N$) с двумя неизвестными, например: $2x + 3y = 6$, $xy - 2y + x = 3$, $x^2 - 4xy + 4y^2 = 1$.

Если поставлена задача найти все целые числа $x_0$ и $y_0$, такие, что пара чисел ($x_0$; $y_0$) является решением данного уравнения, то такое уравнение называют **диофантовым уравнением** и говорят, что уравнение требуется решить в целых числах. Так его называют в честь греческого математика Диофанта (III в.). Иногда по смыслу задачи диофантово уравнение решают в натуральных числах.

Рассмотрим общий способ решения диофантовых уравнений первой степени.

Пару целых чисел ($x_0$; $y_0$) называют **частным решением** линейного диофантового уравнения

$$ax + by = c \qquad (1)$$

(где $a$, $b$ и $c$ — целые числа и $a \neq 0$ и $b \neq 0$), если верно числовое равенство

$$ax_0 + by_0 = c. \qquad (2)$$

Например, пара чисел (3; –1) является частным решением уравнения

$$x + 2y = 1,$$

так как $3 + 2 \cdot (-1) = 1$.

Докажем, что если пара чисел $(x_0; y_0)$ является частным решением уравнения (1), то решением уравнения (1) является и пара целых чисел $x = x_0 + bn$; $y = y_0 - an$, где $n$ — любое целое число ($n \in \mathbf{Z}$).

**Доказательство.** Так как пара целых чисел $(x_0; y_0)$ является решением уравнения (1), то верно числовое равенство (2).

Подставив в уравнение (1) вместо $x$ и $y$ числа $x_0 + bn$ и $y_0 - an$ соответственно и воспользовавшись равенством (2), получим, что

$$ax + by = a(x_0 + bn) + b(y_0 - an) = ax_0 + abn + by_0 - abn = \\ = ax_0 + by_0 = c.$$

Итак, пара целых чисел $x = x_0 + bn$; $y = y_0 - an$, $n \in \mathbf{Z}$, является решением уравнения (1), что и требовалось доказать.

Можно показать, что, кроме этих решений, уравнение (1) не имеет других решений.

Множество всех пар целых чисел $x = x_0 + bn$; $y = y_0 - an$, $n \in \mathbf{Z}$, называют **общим решением** уравнения (1).

Если требуется найти общее решение уравнения (1), то говорят, что надо **решить уравнение** (1) **в целых числах**. Если требуется найти решения $(x; y)$ уравнения (1), где $x$ и $y$ натуральные числа, то говорят, что надо **решить уравнение** (1) **в натуральных числах**.

Например, частным решением диофантового уравнения

$$2011x + 2012y = 1$$

является пара целых чисел $x_0 = -1$, $y_0 = 1$, поэтому общим решением данного уравнения является множество всех пар целых чисел $x = -1 + 2012n$; $y = 1 - 2011n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Приведём примеры решения диофантовых уравнений второй степени.

Решению уравнений в целых числах часто помогает метод разложения многочлена на множители.

**Пример 1.** Решим уравнение в целых числах:

$$xy - 2y + x = 3. \quad (3)$$

Преобразуем уравнение (3):

$$xy + x - 2y - 2 = 1,$$
$$x(y + 1) - 2(y + 1) = 1,$$
$$(y + 1)(x - 2) = 1.$$

Так как $x$ и $y$ — целые числа, то произведение целых чисел $y + 1$ и $x - 2$ равно 1 лишь в двух случаях:

$$\begin{cases} y + 1 = 1, \\ x - 2 = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y + 1 = -1, \\ x - 2 = -1. \end{cases}$$

Первая система имеет решение (3; 0), вторая — (1; –2). Пары (3; 0) и (1; –2) являются целочисленными решениями уравнения (3), и других целочисленных решений уравнение (3) не имеет.

Кроме разложения многочленов на множители, при решении уравнений в целых (натуральных) числах используют и другие способы нахождения всех целых решений. Рассмотрим их на примерах.

**Пример 2.** Решим уравнение в натуральных числах:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = 25. \qquad (4)$$

Перепишем уравнение (4) в виде

$$(x - y)^2 + y^2 = 5^2. \qquad (5)$$

Так как разность $x - y$ натуральных чисел может быть или натуральным числом, или целым отрицательным числом, или нулём, то $y$ может принимать лишь значения 3, 4 или 5. Поэтому все решения уравнения (5) в натуральных числах содержатся среди решений систем

$$\begin{cases} y = 3, \\ x - y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3, \\ x - y = -4, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4, \\ x - y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4, \\ x - y = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Решив каждую из этих пяти систем, получим все 5 решений уравнения (5), для каждого из которых $y$ — натуральное число: (7; 3), (–1; 3), (7; 4), (1; 4), (5; 5). Лишь для четырёх из них $x$ также натуральное число. Эти четыре пары и дают все решения уравнения (4) в натуральных числах: (7; 3), (7; 4), (1; 4), (5; 5).

**Пример 3.** Решим уравнение в целых числах:

$$10x^2 - 2x - xy + y = 7. \qquad (6)$$

Перепишем уравнение (6) в виде

$$10x^2 - 2x - 7 = (x - 1)y. \qquad (7)$$

Так как никакая пара чисел $(x; y)$, где $x = 1$, $y$ — любое действительное число, не является решением уравнения (7), то можно выразить $y$ через $x$ из уравнения (7):

$$y = \frac{10x^2 - 2x - 7}{x - 1}. \qquad (8)$$

Перепишем уравнение (8) в виде

$$y = 10x + 8 + \frac{1}{x - 1}.$$

Теперь очевидно, что число $y$ является целым лишь в двух случаях: $x - 1 = 1$ и $x - 1 = -1$, т. е. при $x = 2$ и при $x = 0$. Поэтому уравнение (6) имеет две пары решений в целых числах: (2; 29) и (0; 7).

**Задача 1.** Мастер делает за 1 ч целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на 1 ч быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

**Решение.** Пусть мастер делает в час $x$ деталей ($x > 5$) и выполняет весь заказ за $t$ ч, тогда ученик делает в час $x - 2$ деталей и весь заказ состоит из $tx$ или $2(x - 2)(t - 1)$ деталей. Составим уравнение:

$$tx = 2(x - 2)(t - 1). \qquad (9)$$

Перепишем уравнение (9) в виде

$$t(x - 4) = 2x - 4. \qquad (10)$$

Учитывая, что никакая пара чисел $(x; y)$, где $x = 4$, $t$ — любое действительное число, не является решением уравнения (10), можно выразить $t$ через $x$ из уравнения (10):

$$t = 2 + \frac{4}{x - 4}.$$

Так как $x > 5$, то $t$ является натуральным числом лишь при $x = 6$ и при $x = 8$. В том и в другом случае число деталей $tx$ равно 24.

**Ответ**: 24 детали.

**595.** Решите уравнение в целых числах:
а) $3x + 5y = 20$; б) $2x - 5y = 25$; в) $2x - 3y = 5$;
г) $7x + 5y = 2$; д) $2x + 7y = 28$; е) $3x + 5y = 30$.

**596.** Объясните, почему уравнение:
а) $x + y = 5{,}5$; б) $3x - 2y = 1{,}1$
не имеет решений в целых числах.

**597.** Решите уравнение $x^2 - y^2 = 5$:
а) в целых числах; б) в натуральных числах.

**598.** Решите уравнение в целых числах:
а) $xy + 5x - 3y = 18$; б) $xy - 6x - y + 1 = 0$;
в) $xy - 2x - 2y + 3 = 0$; г) $xy - 3y + 2x - 7 = 0$.

**599.** **Доказываем.** а) Докажите, что уравнение $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 13 = 0$ имеет единственное целочисленное решение.
б) Докажите, что уравнение $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 14 = 0$ не имеет решений.

Решите уравнение в целых числах (600—601):

**600.** а) $x(x + y) = 3$; б) $x^2 + 3xy = 2$;
в) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$; г) $x^2 - 4y^2 = 5$;
д) $x^2 - 4xy + 3y^2 = -1$; е) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$;
ж) $3x^2 + 5xy - 2y^2 = 5$; з) $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 7$.

**601.** а) $x^2 + 2xy + 5y^2 = 25$; б) $x^2 + 2xy + 10y^2 = 25$;
в) $x^2 - 2xy + 2y^2 = 16$; г) $x^2 - 2xy + 5y^2 = 16$;
д) $9x^2 + 4x - xy + 3y = 88$; е) $5x^2 + 6x - xy + 2y = 35$.

**602.** Один рабочий на новом станке производит за 1 ч целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 ч быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма?

**603.** Пастух заметил, что произведение числа баранов на число его баранов, уменьшенное на единицу, ровно на 15 больше, чем произведение его собственного возраста на число его баранов, уменьшенное на 2. Сколько лет пастуху?

**604.** Иван Петрович приобрёл в начале года $k$ акций банка «Надежда», часть из которых — простые, а другая часть — привилегированные. За год доход по одной простой акции составил 16 условных денежных единиц, а доход по одной привилегированной акции — 21 условную денежную единицу. Сколько привилегированных акций купил Иван Петрович, если доход за год по купленным акциям составил 269 условных денежных единиц?

**605.** Купил Роман раков: вчера мелких — по цене 51 к. за штуку, а сегодня — по 99 к., но очень крупных. Всего на раков он истратил 25 р. 20 к., из них переплаты из-за отсутствия сдачи в сумме составили от 16 до 20 к. Определите, сколько раков купил Роман вчера и сколько сегодня.

**606.** **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о Диофанте.

## 2. Исторические сведения

Системы уравнений первой и второй степени встречаются ещё в древневавилонских текстах. Вот, например, одна такая задача.

**Задача.** Площади двух своих квадратов я сложил: $25\frac{5}{12}$. Сторона второго квадрата равна $\frac{2}{3}$ стороны первого и ещё 5. Найдите стороны.

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\dfrac{5}{12}, \\ y = \dfrac{2}{3}x + 5. \end{cases}$$

Рассмотрим пример решения системы уравнений из «Арифметики» Диофанта:

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 68. \end{cases}$$

И здесь Диофант умело избежал решения квадратного уравнения общего вида. Он разделил первое уравнение на 2:

$$\frac{x+y}{2}=5,$$

ввёл новое обозначение $d=\frac{x-y}{2}$, тогда $x=5+d$, $y=5-d$, второе уравнение системы записал в виде

$$(5+d)^2+(5-d)^2=68$$

и решил так:

$$50+2d^2=68,\ \ d^2=9.$$

Во времена Диофанта отрицательными числами ещё не пользовались, поэтому он указал только один корень этого уравнения: $d=3$. Затем нашёл $x=8$ и $y=2$.

Система имеет ещё одно решение при $d=-3$ — это пара (2; 8).

Диофант первым из математиков ввёл различные знаки для неизвестных величин, главным образом греческие буквы. Приведённое выше решение дано в современной записи.

Диофант Александрийский был одним из самых своеобразных древнегреческих математиков, труды которого имели большое значение для алгебры и теории чисел. До сих пор не выяснены ни год рождения, ни дата смерти Диофанта; полагают, что он жил в III в. н. э. В одном из древних рукописных сборников задач в стихах жизнь Диофанта описывается в виде следующей алгебраической загадки, представляющей надгробную надпись на его могиле:

Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей — и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребёнком,
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец;
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил,
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Задача-загадка сводится к составлению и решению уравнения

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x,$$

откуда $x=84$. Следовательно, Диофант жил 84 года.

Из работ Диофанта самой важной является «Арифметика», из 13 книг которой только 6 сохранились до наших дней.

В сохранившихся книгах Диофанта содержится 189 задач с решениями. В первой книге изложены задачи, приводящиеся к определённым уравнениям первой и второй степени. Остальные же пять книг содержат в основном неопределённые уравнения (теперь называемые диофантовыми уравнениями). В этих книгах ещё нет систематической теории неопределённых уравнений, методы решения меняются от случая к случаю. Диофант довольствуется каким-нибудь одним решением, целым или дробным, лишь бы оно было положительным.

Тем не менее методы решения неопределённых уравнений составляют основной вклад Диофанта в математику.

**607. Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о старинных способах решения диофантовых уравнений (задачи из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого, задачи Л. Эйлера, Л. Пизанского и др.).

Решите систему уравнений **(608—612)**:

**608.** *Из «Арифметики» Диофанта.*

а) $\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 + y^2 = 208; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 - y^2 = 80; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 3y, \\ x^2 + y^2 = 5(x + y); \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 3y, \\ x^2 + y^2 = 10(x - y); \end{cases}$

д) $\begin{cases} x = 3y, \\ x^2 - y^2 = 12(x - y); \end{cases}$ е) $\begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 6x; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 6(x - y); \end{cases}$ з) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = x - y + 20. \end{cases}$

**609.** *Из «Алгебры» аль-Хорезми (VII—VIII вв.).*

а) $\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 21; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 40; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 - y^2 = x - y + 54; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 = 4xy; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y = 10, \\ (x + y)^2 = 2\frac{7}{9}x^2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{1}{6}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + y = 10, \\ y^2 = 81x; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x + y = 10, \\ xy : |y - x| = 5\frac{1}{4}. \end{cases}$

**610.** *Из «Алгебры» аль-Караджи (XI в.).*

а) $\begin{cases} x = \frac{3}{4}y, \\ xy + x + y = 62; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 4x + 5. \end{cases}$

**611.** *Из «Книги абака» Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (XII—XIII вв.).*

а) $\begin{cases} xy - y = 42, \\ x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + y = 2, \\ x - y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \left(\frac{x}{y} + 10\right)\left(\frac{y}{x} + 10\right) = 122\frac{2}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \frac{x}{y}(x - y) = 24. \end{cases}$

**612.** *Из книги «Косс» К. Рудольфа (XVI в.).*

а) $\begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 539\,200, \\ (x - y)(x^2 - y^2) = 78\,400; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy + x + y = 573, \\ x^2 + y^2 - x - y = 1716. \end{cases}$

# Задания для повторения

## Числа

Вычислите (613—619):

**613.** а) $48 \cdot (0,6 \cdot 5 - 2,875) \cdot 0,25$;
б) $7 \cdot 4 + (0,22 : 11 + 0,58)$;
в) $0,09 \cdot 37 - 1,37 - 1,96$;
г) $0,44 \cdot 25 + 0,75 \cdot 3,2$;
д) $(64 \cdot 4 \cdot 0,125 - 7,8) \cdot 12$;
е) $(1,215 + 1,499 + 1,75) \cdot 99$;
ж) $4,25 \cdot 3 + 1,25 : 5$;
з) $8,48 : 4 - 0,3 \cdot 0,4$;
и) $2,25 : (10 - 1 : 0,2)$;
к) $(1,24 + 3,08) : 5$.

**614.** а) $4\frac{2}{21} \cdot 10 - 19\frac{20}{21}$;

б) $24\frac{8}{41} : 4 - 18\frac{5}{41} : 3$;

в) $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 1 : 1\frac{1}{9}$;

г) $7\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} - 12\frac{1}{4} : \frac{7}{2} + 3\frac{3}{8} + 2\frac{3}{4}$.

**615.** а) $2\frac{3}{4} : \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) : 3\frac{1}{6}$;

б) $\left(\frac{2}{15} + 1\frac{7}{12}\right) \cdot \frac{30}{103} - \left(2 : 2\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{9}{32}$;

в) $\left(\frac{1}{2} + 0,8 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(3 + 5\frac{8}{25} - 0,12\right)$;

г) $\left(2\frac{3}{4} + 0,15 - 1\frac{8}{25}\right) : \left(2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} + 0,04\right)$;

д) $\left(2,314 - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{50} + \left(1\frac{11}{16} + 0,7125\right) : 3$;

е) $1,456 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0,125 + 4\frac{1}{2} \cdot 0,8$;

ж) $3\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{5} + (2,55 + 2,7) : \left(0,1 - \frac{1}{80}\right)$;

з) $3,075 : 1,5 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{25} + 3,26\right)$;

и) $\left(1\frac{11}{24} + \frac{13}{36}\right) \cdot 1,44 - \frac{8}{15} \cdot 0,5625$;

к) $2,88 \cdot \frac{35}{72} + \left(1,0625 - \frac{5}{12}\right) \cdot 16$.

**616.** а) $\dfrac{\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}\right)}{\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)}$;

б) $\dfrac{0{,}4+8:\left(5{,}3-0{,}8\cdot\frac{3}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)}$;

в) $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$;

г) $\dfrac{(0{,}6+0{,}425-0{,}005):0{,}01}{10{,}5+5\frac{1}{4}+3\frac{1}{6}+15\frac{1}{12}}\cdot 60$.

**617.** а) $\frac{1}{3}:\dfrac{\left(\frac{3}{5}+0{,}425-\frac{1}{200}\right):0{,}01}{30{,}75+\frac{1}{12}+3\frac{1}{6}}:\frac{2}{3}$;

б) $\dfrac{\frac{3}{4}\cdot\left(4{,}4-3{,}75+8\frac{7}{15}+8\frac{7}{60}\right)}{\left(3\frac{1}{2}-2{,}75\right):0{,}2}$;

в) $\dfrac{\left(\frac{7}{2000}+0{,}0065\right):0{,}001}{\left(\frac{3}{3125}+0{,}00004\right)\cdot\frac{1}{0{,}0001}}$;

г) $\dfrac{3\frac{1}{3}-\left(6\frac{1}{7}-5\frac{3}{4}\right):\frac{5}{7}}{8+0{,}375:0{,}5625}+0{,}625:\frac{5}{6}$.

**618.** а) $\dfrac{0{,}72-0{,}104-0{,}112\cdot 0{,}5}{0{,}063:1{,}26\cdot 1{,}4}$; б) $\dfrac{28{,}4\cdot 2{,}5-1{,}34}{1{,}08:1{,}5+6{,}3:0{,}28}$;

в) $\dfrac{20{,}15-6\cdot 0{,}5+16{,}3}{(0{,}2+11{,}8)\cdot 0{,}5}$; г) $\dfrac{(7{,}63-5{,}13)\cdot 0{,}4}{3{,}17+6{,}83}$.

**619.** а) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+0{,}4+0{,}375\right)\cdot\dfrac{2}{5}}{\dfrac{2}{3}\cdot 75}$; б) $\dfrac{2{,}4\cdot 3\dfrac{3}{4}+2\dfrac{2}{11}\cdot 4{,}125}{5\dfrac{5}{6}\cdot 2\dfrac{4}{7}}$;

в) $\dfrac{3{,}5+4\dfrac{2}{3}+2\dfrac{2}{15}}{1\dfrac{1}{20}+4{,}1}$; г) $\dfrac{3\dfrac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\dfrac{1}{2}}{\dfrac{62}{75}-\dfrac{4}{25}}$.

**620.** Сравните:
а) $10^{20}$ и $90^{10}$; б) $0{,}1^{10}$ и $0{,}3^{20}$.

**621.** Вычислите:
а) $\dfrac{6^3\cdot 5^2}{3^3\cdot 2^4}$; б) $\dfrac{10^3\cdot 9^2}{6^3\cdot 5^2}$; в) $2{,}5^3:5^3$;

г) $1{,}5^4:3^3$; д) $\dfrac{\left(3\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot(0{,}1)^3}{3}$; е) $\dfrac{\left(1\dfrac{1}{2}\right)^4\cdot(0{,}2)^4}{0{,}15}$.

**622.** Сравните $\dfrac{3^{1997}+1}{3^{1998}+1}$ и $\dfrac{3^{1998}+1}{3^{1999}+1}$.

**623.** Выбрав удобный единичный отрезок, укажите на координатной оси числа:
а) 1; 0,1; 0,3; 0,5; 1,2; б) –2; –1,5; –0,5; –0,2; –0,05;
в) $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{8}$; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{3}{8}$; г) $-1\dfrac{1}{3}$; $-1\dfrac{1}{6}$; $-\dfrac{2}{3}$; $-\dfrac{5}{6}$; $-\dfrac{11}{12}$.

**624.** На координатной оси отмечено несколько точек. Сумма чисел, соответствующих этим точкам, равна –1,5. Каждую из указанных точек переместили по координатной оси на две единицы влево, после чего сумма чисел стала равной –15,5. Сколько было точек?

**625.** а) Представьте в виде произведения степеней простых чисел произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 13\cdot 14\cdot 15$.
б) Найдите наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель для чисел:
1) $5^2\cdot 7^4$ и $490\cdot 175$; 2) $2^5\cdot 3\cdot 7$, $3^4\cdot 5^4\cdot 7^2$ и 10 000.
в) На какую наибольшую степень числа 7 делится произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 99\cdot 100$?

**626.** а) Квадраты каких неравных чисел равны?
б) В каком случае $(a+b)^2$ не положительное число?
в) Между какими целыми числами заключены квадраты всех правильных положительных дробей?

**627.** Запишите приближение числа $\pi = 3,1415926535...$ с недостатком и с избытком с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001. Какому двойному неравенству в каждом случае удовлетворяет число $\pi$?

**628.** Какие из данных чисел являются рациональными и какие — иррациональными:
а) 0,3333;
б) 0,4 (5);
в) 0,232323...;
г) 0,57578888;
д) 0;
е) 1,211211121111211...;
ж) 2,718281828...;
з) 0,123456789101112131 4...?

**629.** Покажите примерное расположение чисел на координатной оси:

а) $2,7;\ 2,(71);\ 2,71;\ 2,7171;\ 2\frac{7}{9}$;

б) $-1,05;\ -1\frac{1}{20};\ -1,(05);\ -1,0505;\ -1,051$.

**630.** а) Найдите приближённо сумму чисел, округлив данные числа до сотых:
1) $1,342 + 3,463$;
2) $5,(6) + 2,781$;
3) $12,(45) + 0,3112$;
4) $1,(3) + 5,(7)$.

б) Найдите приближённо произведение чисел, округлив данные числа и результат до первой значащей цифры:
1) $15 \cdot 2,(1)$; 2) $0,3 \cdot 0,(4)$; 3) $1,(1) \cdot 2,(1)$; 4) $2,(5) \cdot 0,(2)$.

**631.** На координатной оси укажите одно рациональное и одно иррациональное число, расположенные между числами:
а) 0,5 и 0,(5);
б) 0,272999143... и 0,2730015... .

**632.** Каким числом — рациональным или иррациональным — является значение выражения:
а) $1 + \sqrt{3}$;
б) $1 - \sqrt{5}$;
в) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$;
г) $\sqrt{16} - \sqrt{23}$?

**633.** Укажите два иррациональных числа:
а) разность которых является рациональным числом;
б) произведение которых является рациональным числом;
в) сумма которых является рациональным числом.

**634.** Верно ли утверждение, что квадратный корень из рационального числа:
а) всегда является иррациональным числом;
б) может быть целым числом;
в) может быть конечной десятичной дробью;
г) может быть бесконечной периодической десятичной дробью?

**635.** Дана функция $y = x^2$. Какими числами — рациональными или иррациональными — являются абсциссы точек графика этой функции, если ординаты этих точек: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10? Найдите приближённые значения иррациональных абсцисс с недостатком с точностью до 0,01.

**636.** Найдите приближённо с недостатком значение выражения, ограничившись двумя знаками после запятой:
а) $1+\sqrt{3}$; б) $1+\sqrt{5}$; в) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; г) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$.

**637.** Сравните значения выражений (без вычисления корней):
а) $5\sqrt{12}$ и $3\sqrt{27}$; б) $\sqrt{27}$ и $3\sqrt{2}$;
в) $2\sqrt{50}$ и $3\sqrt{32}$; г) $3\sqrt{\frac{3}{8}}$ и $\sqrt{\frac{3}{2}}$;
д) $2\sqrt{\frac{4}{75}}$ и $3\sqrt{\frac{25}{243}}$; е) $5\sqrt{\frac{45}{72}}$ и $4\sqrt{\frac{45}{32}}$;
ж) $\sqrt{2006}+\sqrt{2008}$ и $2\sqrt{2007}$; з) $\sqrt{2007}+\sqrt{2009}$ и $2\sqrt{2008}$.

**638.** Упростите выражение:
а) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)^2}$; в) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}$; г) $\sqrt{\left(\sqrt{10}-4\right)^2}$.

**639.** Вынесите множитель из-под знака корня:
а) $\sqrt{3\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$; б) $\sqrt{18\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$;
в) $\sqrt{32\left(2-\sqrt{7}\right)^4}$; г) $\sqrt{48\left(\sqrt{5}-3\right)^4}$.

**640.** Верно ли равенство:
а) $\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$; б) $\sqrt{6\frac{6}{35}}=6\sqrt{\frac{6}{35}}$; в) $\sqrt{4\frac{1}{2}}=4\sqrt{\frac{1}{2}}$?

Вычислите **(641—642)**:

**641.** а) $\sqrt{\frac{1}{169}}$, $\sqrt{30,25}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{0,64}$; б) $\sqrt{6,25}$, $\sqrt{0,0121}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{0,0256}$.

**642.** а) $\sqrt{784}$; б) $\sqrt{28900}$; в) $\sqrt{1,21}$;
г) $\sqrt{0,1225}$; д) $\sqrt{46,24}$; е) $\sqrt{1,44}$;
ж) $\sqrt{0,7225}$; з) $\sqrt{9,4864}$.

**643.** *Задача Архимеда.* Справедливо ли неравенство
$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}?$$

Упростите выражение **(644—648)**:

**644.** а) $10\sqrt{\frac{2}{5}}-0,5\sqrt{160}+3\sqrt{1\frac{1}{9}}$; б) $15\sqrt{\frac{3}{5}}-0,5\sqrt{60}+2\sqrt{3\frac{3}{4}}$;
в) $2\sqrt{8\frac{1}{2}}-\sqrt{136}-5\sqrt{1\frac{9}{25}}$; г) $6\sqrt{2\frac{1}{3}}-\sqrt{84}+4\sqrt{1\frac{5}{16}}$.

**645.** а) $\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{8}}-2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$; б) $\left(3\sqrt{\frac{5}{6}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(3\sqrt{\frac{5}{6}}+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$;

в) $\left(\sqrt{13+5\sqrt{4{,}2}}+\sqrt{13-5\sqrt{4{,}2}}\right)^2$;

г) $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$.

**646.** а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$;

в) $\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; г) $\frac{\left(\sqrt{75}+\sqrt{50}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

**647.** а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;

г) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; д) $\sqrt{17-4\sqrt{13}}$; е) $\sqrt{17+4\sqrt{13}}$;

ж) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; з) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; и) $\sqrt{12-2\sqrt{35}}$.

**648.** а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$; г) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}+\sqrt{10+2\sqrt{21}}$.

**649.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$; г) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$;

д) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; е) $\frac{7}{3-\sqrt{2}}$; ж) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$; з) $\frac{6}{3+\sqrt{3}}$.

**Доказываем.** Докажите справедливость равенства (650—652):

**650.** а) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=1$;

б) $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=\sqrt{3}+1$.

**651.** а) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$;

б) $\frac{6}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{3\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2}$.

**652.** а) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=6$;

б) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

## Отношения, пропорции, проценты

**653.** Найдите отношение:
а) 18 к 36; б) 24 к 12; в) 42 к 56;
г) 36 к 24; д) 0,3 к 0,12; е) $\frac{3}{4}$ к $\frac{33}{44}$.

**654.** Найдите отношение:
а) 1 км к 1 м; б) 1 г к 1 кг;
в) 1 ч к 1 мин; г) 1 км$^2$ к 1 га.

**655.** Замените отношение дробных чисел равным ему отношением целых чисел:
а) $\frac{0,2}{0,5}$; б) $\frac{1,7}{0,5}$; в) $\frac{1,21}{0,05}$; г) $\frac{0,0001}{0,5}$;
д) $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$; е) $\frac{2}{5} : 0,5$; ж) $\frac{2}{3} : \frac{4}{7}$; з) $1,2 : \frac{4}{5}$.

**656.** Можно ли составить пропорцию из отношений:
а) 20 : 10 и 10 : 5; б) 1 : 3 и 15 : 5;
в) 11 : 2 и 1,1 : 0,2; г) $\frac{1}{2}$ : 3 и 2 : 12?

**657.** Верно ли равенство:
а) $\frac{9}{5} = \frac{18}{10}$; б) $4 : 13 = 2 : 6,5$;
в) $7 : 3 = \frac{21}{9}$; г) $\frac{0,02}{17} = \frac{4}{340}$?

**658.** Можно ли составить пропорцию из чисел:
а) 1, 2, 3, 6; б) 7, 6, 2, 21;
в) 2, 18, 6, 6; г) 3, 40, 20, 6?

**659.** К данной тройке чисел подберите такое четвёртое число, чтобы эти числа могли образовать пропорцию:
а) 2, 3, 5; б) 7, 2, 8; в) 10, 1000, 1; г) 7, 5, 3.
Сколько решений имеет задача?

**660.** Равенство произведений замените пропорцией:
а) $16 \cdot 3 = 2 \cdot 24$; б) $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$;
в) $250 \cdot 8 = 2 \cdot 1000$; г) $144 \cdot 3 = 16 \cdot 27$.

**661.** Найдите неизвестный член пропорции:
а) $x : 5 = 7 : 10$; б) $x : 9 = 5 : 3$; в) $x : 12 = \frac{1}{3}$;
г) $x : 2 = \frac{7}{5}$; д) $\frac{x}{4} = 2 : 3$; е) $\frac{x}{7} = 1 : 5$;
ж) $\frac{2}{x} = \frac{1}{5}$; з) $\frac{8}{x} = \frac{11}{3}$; и) $\frac{13}{9} = \frac{4}{x}$.

**662.** Решите уравнение:

а) $\frac{2x}{3} = 7 : 5$; б) $\frac{5}{4x} = 1 : 13$; в) $\frac{x}{3} : 4 = 9 : 1$;

г) $\frac{2,5}{7x} = 0,5 : 14$; д) $\frac{3x}{2} = \frac{7}{8}$; е) $\frac{4x}{3} = \frac{2}{3}$;

ж) $\frac{0,2}{7x} = \frac{5}{12}$; з) $\frac{1,6}{3} = \frac{2,4}{5x}$; и) $\frac{7,2}{5,1} = \frac{4,8}{1,7x}$.

**663.** Определите масштаб, если 1 см на чертеже соответствует 10 м на местности.

**664.** Определите длину отрезка, изображающего на географической карте шоссейную дорогу между двумя городами, если на местности длина этого шоссе равна 200 км, а масштаб карты:
а) 1 : 1 000 000; б) 1 : 5 000 000;
в) 1 : 200 000; г) 1 : 20 000 000.

**665.** Масштаб карты 1 : 50 000. Определите расстояние на местности, если на карте его изображает отрезок длиной:
а) 5 см; б) 2,2 см; в) 37 мм; г) 1,2 дм.

**666.** Изобразите горизонтальными отрезками длину улицы в 400 м, 350 м, 275 м, принимая 1 см за 50 м. В каком масштабе сделан чертёж?

**667.** Изобразите вертикальными отрезками высоту дома в 40 м, 60 м, 35 м, принимая 2 см за 10 м. В каком масштабе сделан чертёж?

**668.** Длина дома на плане, масштаб которого 1 : 250, равна 6 см. Найдите реальную длину дома.

**669.** Длина школьного здания 60 м. Найдите длину изображения этого здания на плане, 1 см которого соответствует 5 м.

**670.** Длина шоссейной дороги Москва — Санкт-Петербург 725 км. Найдите длину изображения этой дороги на карте с маштабом 1 : 5 000 000.

**671.** а) Масса 2 м стального троса 4,63 кг. Какова длина троса в мотке массой 50 кг?
б) Масса 2 м стального троса 6,4 кг. Какова длина троса, если его масса 1 ц?

**672.** Один погонный метр трубы диаметром 18 мм имеет массу 3,2 кг. Какова масса трубы такого же диаметра, длина которой 1,6 м?

**673.** Кокон шелкопряда имеет массу около 0,05 г и даёт в среднем 450 м шёлковой нити. Сколько метров шёлковой нити дадут коконы общей массой 100 г?

**674.** Рецепт для приготовления кекса на 4 человека: 120 г маргарина, 120 г сахара, 120 г сметаны, 120 г муки и 2 яйца.

Сколько нужно маргарина, сахара, сметаны, муки и яиц, чтобы приготовить кекс на:

а) 48 человек; б) 42 человека;
в) 60 человек; г) 57 человек?

**675.** а) Плотность железа равна 7800 кг/м$^3$. Каков объём тонны железа?
б) Плотность золота равна 19 300 кг/м$^3$. Найдите массу золотого бруска с размерами 3 см, 2 см, 12 см. Каков объём слитка золота в 100 кг?

**676.** а) Масса кубического метра алюминия 2700 кг. Какую массу имеет кубический сантиметр алюминия?
б) Кубический метр ртути имеет массу 13,6 т. Какую массу имел бы столб ртути высотой 760 мм, основание которого равно 1 мм$^2$?

**677.** Земля делает полный оборот (360°) вокруг своей оси за 24 ч. На какой угол она повернётся за 3 ч?

**678.** Определите:
а) 25 % от 100; б) 50 % от 1,2; в) 30 % от 200;
г) 20 % от 30; д) 6 % от 30; е) 3 % от 4,2.

**679.** а) Определите 2 % от 12.
б) Сколько процентов составляют 3 р. от 15 р.?
в) Найдите число, 8 % которого равны 32.
г) На сколько процентов 5 больше, чем 4?
д) На сколько процентов 8 меньше, чем 10?
е) Сколько процентов составляет 1 ц от 1 т?
ж) Сколько процентов составляет 3,75 от 7,5?
з) Найдите число $x$, если 12,5 % от $x$ равно 25.

**680.** Что больше: 5 % от 40 или 40 % от 5?

**681.** Определите число:
а) 10 % которого составляют 2;
б) 20 % которого составляют 7;
в) 15 % которого составляют 1,5;
г) 75 % которого составляют 330.

## Одночлены и многочлены

**682.** Упростите выражение:
а) $a^3 \cdot a^2$; б) $b \cdot b^2 \cdot b^3$; в) $y \cdot y^2 \cdot y^3 \cdot y^4$;
г) $ab \cdot ab^2$; д) $x^2y \cdot x^3y^2$; е) $2xy \cdot 4x^2y^3$;
ж) $\frac{2}{3}x^2y^3z \cdot 2\frac{1}{3}x^3yz$; з) $\frac{3}{4}a^3bc^2 \cdot 2\frac{1}{2}abc^2$.

**683.** Используя свойства степени, раскройте скобки:
а) $(a^2)^3$; б) $(a^3)^3$; в) $(x^4)^2$; г) $(x^2)^4$;
д) $(2a^2)^2$; е) $(3b^5)^2$; ж) $(xy^2)^3$; з) $(a^2bc^3)^2$;

и) $\left(\frac{1}{2}x^7\right)^4$; к) $\left(\frac{3}{4}y^5\right)^3$; л) $(0,5a)^2$; м) $(1,2z^4)^2$;
н) $(ab^2c^3)^4$; о) $(3ab)^2$; п) $(2ab^5)^6$; р) $(1,1a^2b^7c^{11})^4$.

Упростите выражение **(684—688)**:

**684.** а) $m^3 \cdot m^2 + m \cdot m^4$; б) $x^6 \cdot x \cdot x^2 + x^3 \cdot x^3 \cdot x^3$;
в) $2x \cdot xy - 3x^2 \cdot \frac{1}{2}y$; г) $\frac{1}{3}p^2q \cdot 6q^2 - 7pq^2 \cdot \frac{1}{5}pq$;
д) $(2mn^2)^3 - 3m^2n^6m$; е) $(5xy^3)^2 - (2xy^3)^2$;
ж) $(3x^2y^4)^3 + 7x^4y^3 \cdot \frac{1}{14}x^2y^9$; з) $(0,8a^2b)^2 - 3ab^2 \cdot 0,5a^3$.

**685.** а) $12ab + 5ab - 7ab$; б) $8xy - yx + 6xy$;
в) $2a^2 - 1\frac{1}{3}a^2 - 5\frac{2}{3}a^2$; г) $0,2pq + 7,9pq - 5,3qp$;
д) $7x - (x + 5)$; е) $12a - (3b - 5a)$;
ж) $(6m^2 - 2n) - (5n - m^2)$; з) $(3p + 10q^2) - (2q^2 + 5p)$;
и) $2m^3n^2 - 5n \cdot 2m^3 \cdot n + 3m^3 \cdot n \cdot n$;
к) $5a^2b^2b - ab \cdot 3ab^2 - 2ab^2 \cdot 3ba$.

**686.** а) $(a + b - c) \cdot 4$; б) $3(a - b + c)$;
в) $2x \cdot (-7a - 3b + 2c)$; г) $(3a^2b - 2ab^2 + b^3) \cdot 2a^2b^2$;
д) $(-2abc) \cdot (5a - 7b - 3c)$; е) $(-5ab + 7ac - bc) \cdot (-2abc)$;
ж) $(2a - 3b) \cdot (3x - 2y)$; з) $(5a - 7b) \cdot (-8y + 2x)$;
и) $(5a - b) \cdot (-2a - 3b)$; к) $(-3a - 5b) \cdot (7a - b)$.

**687.** а) $(3ab - 2ac) - (5ab - 7ac) + (2ac - 3ab) - (7ac - 5ab)$;
б) $(4m - 2p + 3q) - (4p - 2q + 3m) + (4q - 2m + 3p)$;
в) $5x - 3y - (3x + 6y) + (7x - y) - (8x - 15y)$;
г) $20a - (4b - 5c) + (-17a + 3b - c) - (2a - 2b - 16c)$.

**688.** а) $x(x + y) - y(x - y)$; б) $2(a + b) + 3(a - b)$;
в) $3(x - 2y) + 2(x - 3y)$; г) $m(p + 2q) - p(m - 3q)$;
д) $(a + 2)(a - 1) - (a + 1)(a - 2)$;
е) $(x + 4)(x - 2) - (x + 2)(x - 1)$;
ж) $(a + 2)(a - 1) - (a + 3)(a - 2)$;
з) $(n + 7)(n - 5) - (n + 9)(n - 7)$;
и) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 + x - 3)$;
к) $(x^2 - 3x + 7)(-3 + 5x + 2x^2)$.

**689.** Преобразуйте выражение в многочлен:
а) $6(3a + 4b) - 4(5a - b) + (a + b)$;
б) $2(p + q) + 3(p - q) - (p + q) - (p - 5q)$;
в) $(2a - 3)(3a - 1) - (4a + 2)(a - 3)$;
г) $(m - 1)(m + 2) - (m - 3)(m + 4)$;
д) $2(x + 1)(x + 2) - (3x - 4)(x + 2)$;
е) $3(-4a + 1)(a - 1) + 2(3a - 4)(a + 2)$.

Представьте в виде многочлена (690—691):

**690.** а) $(x+y)^2$; б) $(a-8)^2$; в) $(2a-3b)^2$;
г) $\left(xy+\frac{1}{2}y\right)^2$; д) $(5m^2-2n^3)^2$; е) $(0{,}2p^3+3q^4)^2$.

**691.** а) $(y+x)^3$; б) $(m-n)^3$; в) $(5+a)^3$;
г) $(3a-b)^3$; д) $(10-x^2)^3$; е) $(x^2+y^2)^3$.

Преобразуйте в квадрат двучлена (692—693):

**692.** а) $x^2+2x+1$; б) $a^2-6a+9$;
в) $4-4x+x^2$; г) $49x^2-14x+1$;
д) $x^6+4x^3+4$; е) $x^4+10x^2+25$.

**693.** а) $x^2+x+\frac{1}{4}$; б) $0{,}09+0{,}6a+a^2$;
в) $121x^4+44x^2+4$; г) $2{,}56k^2-9{,}6kp+9p^2$;
д) $64a^2b^2+48abc+9c^2$; е) $9a^2b^4+30ab^2c+25c^2$.

Разложите на множители (694—699):

**694.** а) $4ax-2bx$; б) $2a^2-2a$;
в) $48xy-3bxy^2$; г) $85ab-170a$;
д) $mx-nx+px$; е) $8abx-6acy-10a$;
ж) $14anx-21bny-7n$; з) $63xy-84y^2+98y$.

**695.** а) $m^2-n^2$; б) $1-x^2$; в) $64x^2-1$;
г) $81-9a^2$; д) $m^4-n^2$; е) $121-9p^4$;
ж) $9a^2b^2-y^2$; з) $4a^2b^2-9c^2$; и) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2$;
к) $0{,}81b^4-a^2c^2$; л) $a^3+b^3$; м) $x^3-1$;
н) $a^6+b^6$; о) $m^6-n^6$; п) $27p^3-8q^3$.

**696.** а) $(x+1)^2-4x^2$; б) $x^2+2xy+y^2-1$;
в) $(a-4)^2-16$; г) $p^2-2pq+q^2-4$;
д) $36m^2-(m+9)^2$; е) $9-x^2-2xy-y^2$;
ж) $81q^2-(p+6q)^2$; з) $4-a^2-2ab-b^2$.

**697.** а) $a(x+y)+b(x+y)$; б) $a(x+y)-b(x+y)$;
в) $2x(3p-q)-(3p-q)$; г) $m(x+y)-x-y$;
д) $n(x-y)-x+y$; е) $ax+ay+(bx+by)$;
ж) $ac+ad-bc-bd$; з) $ac-cx+a-x$;
и) $ax-a+x-1$; к) $2ax-3bx-2ay+3by$;
л) $ax-bx+cx+ay-by+cy$;
м) $2ax-5ay+a-2bx+5by-b$.

**698.** а) $x^3-x$; б) $2a-ab$; в) $3m-m^3$;
г) $p^2-qp$; д) $x^2-4$; е) $9-a^2$;
ж) $4y^2-x^2$; з) $m^2-16n^2$; и) $a^2-3$;
к) $x^2-5$; л) $7-2m^2$; м) $9-5x^2$.

**699.** а) $m^3 - 4m^2 + 20m - 125$; б) $8 - 2p + 3p^2 - 27p^3$;
в) $(x^2 + 4x)^2 - (x - 9)^2$; г) $(9x^2 + 2)^2 - (6x + 7)^2$;
д) $(5a - 7b)^2 - 2(5a - 7b) + 1$; е) $1 + 2(x - 3y) + (x - 3y)^2$.

**700.** **Доказываем.** Докажите тождество:
а) $2x^3 - (x - 2)(2x^2 - 3x + 4) = 7x^2 - 10x + 8$;
б) $2m^3 - (2m - 3)(m^2 - 7m + 2) - 6 = 17m^2 - 25m$;
в) $(a - 2)^2 - 2a(a - 2) + a^2 = 4$;
г) $x^2 - 2x(x - 3) + (x - 3)^2 = 9$;
д) $5x(x - y) - 2(y - x)^2 = (3x + 2y)(x - y)$;
е) $(a - 1)(a^2 + 1)(a + 1) - (a^2 - 1)^2 = 2(a^2 - 1)$;
ж) $(a^2 + 1)^2 + (a - 1)(a^2 + 1) - a^2 = a(a^3 + a^2 + 1)$;
з) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 - 1)^3 = 3x^2(x^2 - 1)$.

**701.** Выделите полный квадрат:
а) $x^2 + 2x + 3$; б) $m^2 - 2m + 3$; в) $a^2 + 4a + 2$;
г) $p^2 + 6p - 9$; д) $x^2 + 2x$; е) $c^2 - 10c$.

**702.** Упростите выражение и найдите его значение:
а) $x^2 - 2xy + y^2$ при $x = 0{,}65$, $y = 0{,}15$;
б) $5a^2 - 10ab + 5b^2$ при $a = 124$, $b = 24$;
в) $\frac{1}{2}m^2 + mn + \frac{1}{2}n^2$ при $m = 64$, $n = 36$;
г) $ax^2 + 2axy + ay^2$ при $a = 4$, $x = 71$, $y = 29$.

## Алгебраические дроби

При каких числовых значениях $x$ определено выражение **(703—705)**?

**703.** а) $\frac{1}{x+1}$; б) $\frac{1}{x-1}$; в) $\frac{2x}{3x-1}$; г) $\frac{4x}{2x+5}$.

**704.** а) $\frac{2x^2-4}{x^2-x}$; б) $\frac{7-2x^2}{2x-x^2}$; в) $\frac{x^2-x+1}{x^2+x-2}$;
г) $\frac{1}{x^2-5x+6}$; д) $\frac{x^2-7}{x^2-3x+4}$; е) $\frac{5}{x^2-x+3}$.

**705.** а) $\frac{x-7}{x^2+3x+4}$; б) $\frac{5}{x^2+x+3}$; в) $\frac{x^2-5}{x+5}$;
г) $\frac{3x-x^2}{x^2-5x+6}$; д) $\frac{x^2-7x-1}{2x-7x^2-8}$; е) $\frac{9x^2-4x-1}{5x-3x^2+1}$.

Сократите дробь **(706—710)**:

**706.** а) $\frac{24}{42}$; б) $\frac{168}{256}$; в) $\frac{26ax}{39a^2}$; г) $\frac{17x^2y^3}{51xy^5}$;
д) $\frac{16a^2b^3c^3}{24a^3bc^2}$; е) $\frac{120m^2n^3pq}{450m^5np^2q^4}$; ж) $\frac{x-1}{1-x}$; з) $\frac{6x^3y^2(a-b)}{9xy^3(b-a)}$.

**707.** а) $\frac{2x-4y}{x^2-4y^2}$; б) $\frac{(3-a)^2}{a^2-3a}$; в) $\frac{m^2-n^2}{(n-m)^2}$; г) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

**708.** а) $\frac{x-2}{x^2-4}$; б) $\frac{x-1}{x^2-2x+1}$; в) $\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$;

г) $\frac{x+3}{x^2-9}$; д) $\frac{2x+2}{x^2+2x+1}$; е) $\frac{x^2-x+1}{x^3+1}$.

**709.** а) $\frac{x-1}{x^2-3x+2}$; б) $\frac{x+1}{x^2-5x-6}$; в) $\frac{x^2-6x+5}{x^2-4x+3}$;

г) $\frac{x-2}{x^2-5x+6}$; д) $\frac{x+2}{x^2-x-2}$; е) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-2x-3}$.

**710.** а) $\frac{2x^2-5x+3}{2x^2+5x-7}$; б) $\frac{3x^2-4x+1}{2x^2+7x-9}$;

в) $\frac{3x^2+4x+1}{3x^2+5x+2}$; г) $\frac{2x^2+5x-7}{3x^2-5x+2}$.

**711.** Преобразуйте выражение в алгебраическую дробь:

а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{2}$; б) $x-\frac{1}{a}$; в) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$;

г) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x}$; д) $\frac{a}{x-1}-\frac{2}{1-x}$; е) $\frac{m}{m-n}+\frac{n}{n-m}$;

ж) $\frac{m}{n}\cdot\frac{n^2}{2m}$; з) $\frac{a}{2x}:\frac{3a}{8xy}$; и) $3a\cdot\frac{b}{a}$;

к) $7x:\frac{x^2}{2y^2}$; л) $\frac{a+1}{3}\cdot\frac{7a}{a+1}$; м) $\frac{x-2}{4x}:\frac{2-x}{3x^2}$.

Упростите выражение (712—724):

**712.** а) $\frac{p^2-q^2}{(p+q)^2}:\frac{6p-6q}{3p+3q}$; б) $\frac{3m^2-3n^2}{m^2+mn}\cdot\frac{m+n}{9m-9n}$;

в) $\frac{a^2+ab}{4a^2-4b^2}\cdot\frac{2a^3+2b^3}{a^2-ab}$; г) $\frac{x^2-4y^2}{(x+2y)^2}:\frac{x^3-8y^3}{4y^2-2xy+x^2}$.

**713.** а) $\frac{6a}{4-9a^2}+\frac{1}{3a-2}$; б) $\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}-\frac{1}{2x+2y}$;

в) $\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{3x-3}$; г) $\frac{a}{ax-bx}-\frac{b}{ay-by}$;

д) $2-\frac{3}{a-3}$; е) $\frac{(x-y)^2}{2x}+y$;

ж) $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{y}\right)$; з) $\left(\frac{x}{y}-\frac{2}{3}\right):(3x-2y)$.

**714.** а) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}$; б) $\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}$;

в) $\dfrac{4x}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{x+1}$; г) $\dfrac{2x}{x^2-x-2}-\dfrac{5}{x-2}$;

д) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x^2-x-6}$; е) $\dfrac{3}{x+5}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+4x-5}$.

**715.** а) $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(a-c)(b-a)}-\dfrac{a+c}{(a-b)(c-b)}$;

б) $\dfrac{1}{(m-n)(n-p)}+\dfrac{1}{(p-n)(n-q)}+\dfrac{1}{(q-n)(n-m)}$;

в) $\dfrac{1}{(x-y)(y-z)}-\dfrac{1}{(z-y)(z-x)}+\dfrac{1}{(y-x)(x-z)}$;

г) $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}$; д) $\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}+\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}-2$.

**716.** а) $\left(x^2-\dfrac{1+x^4}{x^2-1}\right):\dfrac{x^2+1}{x+1}$; б) $\left(a^2-\dfrac{1+a^4}{a^2+1}\right):\dfrac{1-a}{1+a^2}$;

в) $\left(\dfrac{1}{m^2-m}-\dfrac{1}{m-1}\right)\cdot\dfrac{1}{m+2}+\dfrac{m}{m^2-4}$;

г) $\left(\dfrac{k+4}{3k+3}-\dfrac{1}{k+1}\right)\cdot\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{2}{1-k^2}$;

д) $\dfrac{2c}{c^2-4}-\dfrac{1}{c-2}:\left(\dfrac{c+1}{2c-2}-\dfrac{1}{c-1}\right)$;

е) $\dfrac{y^2}{y^2-1}+\dfrac{1}{y+1}:\left(\dfrac{1}{2-y}-\dfrac{2}{2y-y^2}\right)$;

ж) $\dfrac{5p+6}{p^2-4}-\dfrac{p}{p^2-4}:\dfrac{p}{p-2}-\dfrac{p+2}{p-2}$;

з) $\dfrac{21-5a}{a^2-9}-\dfrac{a}{a^2-9}:\dfrac{a}{a+3}-\dfrac{a-3}{a+3}$.

**717.** а) $\left(1-\dfrac{1-a}{1+a}\right):\left(1+\dfrac{1-a}{1+a}\right)$; б) $\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x}{x+y}\right):\dfrac{xy}{x^2-y^2}$;

в) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$; г) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}}$.

**718.** а) $\dfrac{5}{2a-2b}+\dfrac{3}{4b-4a}-\dfrac{5}{a-b}$; б) $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{y}{y-x}+\dfrac{x}{x-y}$;

в) $\dfrac{4m}{2m-3n}-\dfrac{5n}{3n-2m}-\dfrac{3m}{4m-6n}$; г) $\dfrac{5p}{2p-3q}-\dfrac{7q}{6p-9q}+\dfrac{3p}{6q-4p}$.

**719.** а) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{8}{1+x}+\dfrac{3x-7}{x^2-1}$;

б) $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b^2}{a^2+ab+b^2}-\dfrac{ab(a+2b)}{a^3-b^3}$;

в) $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}-\dfrac{x(x-y)}{x^3+y^3}$.

**720.** а) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{a-b}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{a(a-b)}{a^3+b^3}$;

б) $\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y^2}{x^2+xy+y^2}-\dfrac{xy(x+2y)}{x^3-y^3}$.

**721.** а) $\dfrac{a^2-5a+6}{a^2+5a+4}:\dfrac{a^2-4a+3}{2a^2+3a+1}\cdot\dfrac{a^2+3a-4}{2a^2-3a-2}$;

б) $\dfrac{c^3-8}{c+3}:\left(\dfrac{c-2}{4c}\cdot\dfrac{8c^2}{c^2+3c}\right):\dfrac{c^2+2c+4}{2(3-c)}$.

**722.** а) $\dfrac{a^3-a^2b-ab^2-2b^3}{a^3+3a^2b+3ab^2+2b^3}$; б) $\dfrac{4b^4+11b^2+25}{4b^4-9b^2+30b-25}$.

**723.** а) $-\dfrac{48}{a^3+64}+\dfrac{1}{a+4}+\dfrac{4}{a^2-4a+16}$;

б) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{2}{(x+1)(x^2+5x+6)}$.

**724.** а) $\dfrac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\left(\dfrac{x}{ax+ay}+\dfrac{3}{2x+2y}\right)$;

б) $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{a+b}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right):\dfrac{(a+b)^2}{ab}$;

в) $\left(\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}\right):\dfrac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+2x^2+x^3}$;

г) $\left(\dfrac{a^2-ax}{a^2x+x^3}-\dfrac{2a^2}{x^3-ax^2+a^2x-a^3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{x-1}{a}-\dfrac{x}{a^2}\right)$.

## Квадратные корни

**725.** Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{-4}$; б) $\sqrt{1-\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; г) $\sqrt{2-\sqrt{4}}$;

д) $\sqrt{10-\sqrt{121}}$; е) $\sqrt{3-\sqrt{17}}$?

**726.** Имеет ли смысл выражение при заданных значениях букв:

а) $\sqrt{b^2-4}$ при $b=3$, $b=-2$, $b=0$;

б) $\sqrt{b^2-4a}$ при $b=1$ и $a=4$; $b=\frac{1}{2}$ и $a=-2$;

в) $\sqrt{b^2-4ac}$ при $b=3$, $a=\frac{1}{2}$, $c=-3$;

г) $\sqrt{b^2-4ac}$ при $b=\frac{1}{2}$, $a=-2$, $c=7$?

**727.** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\frac{2}{3}a\sqrt{72a^3b}$; б) $\frac{3}{x}\sqrt{\frac{a^5x^2}{18}}$;

в) $x^3\sqrt{\frac{12a^3b}{49x^4}}$; г) $\frac{x}{4}\sqrt{\frac{64a^3b^4}{81x^3y^5}}$;

д) $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}{8}}$; е) $\sqrt{\frac{20}{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}$;

ж) $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}}$; з) $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}{\left(\sqrt{10}-3\right)^2}}$.

**Доказываем** (728—729).

**728.** *Задача Евклида.* Докажите равенство

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

**729.** Докажите или опровергните утверждение: для любых положительных чисел $a$ и $b$ $(a>b)$ верно равенство:

а) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b$; б) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=a-b$;

в) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$; г) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$.

Упростите выражение (730—738):

**730.** а) $\frac{a\sqrt{12}}{\sqrt{3a}}$; б) $\frac{a\sqrt{20}}{\sqrt{5a}}$; в) $\frac{\sqrt{50ab}}{\sqrt{2b}}$; г) $\frac{\sqrt{28ab}}{\sqrt{7a}}$.

**731.** а) $\frac{b\sqrt{32}}{\sqrt{-2b}}$; б) $\frac{b\sqrt{27}}{\sqrt{-3b}}$; в) $\frac{\sqrt{3ab}}{\sqrt{-12a}}$; г) $\frac{\sqrt{5ab}}{\sqrt{-20b}}$.

**732.** а) $\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$; б) $\frac{x-16}{\sqrt{x}+4}$; в) $\frac{81-x}{\sqrt{x}+9}$.

**733.** а) $\frac{121+x}{11-\sqrt{-x}}$; б) $\frac{25+x}{5-\sqrt{-x}}$; в) $\frac{16+x}{4+\sqrt{-x}}$.

**734.** а) $\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$; б) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a+b}}$; в) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}$;

г) $\dfrac{a}{\sqrt{a}-a}$; д) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; е) $\dfrac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$;

ж) $\dfrac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}}$; з) $\dfrac{\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}$.

**735.** а) $\dfrac{5\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}}+\dfrac{2\sqrt{a}}{a}$; б) $\dfrac{5\sqrt{b}+3}{\sqrt{b}}-\dfrac{3\sqrt{b}}{b}$;

в) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}}{a-1}$; г) $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+1}+\dfrac{\sqrt{b}}{b-1}$.

**736.** а) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+1\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$; б) $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{1+\sqrt{a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}-a}$;

в) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$; г) $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-6}-\dfrac{3}{\sqrt{m}+6}+\dfrac{m}{36-m}$.

**737.** а) $\dfrac{x-1}{x-2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; б) $\dfrac{x-1}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;

в) $\dfrac{x-4}{x-4\sqrt{x}+4}-\dfrac{4}{\sqrt{x}-2}$; г) $\dfrac{x-4}{x+4\sqrt{x}+4}+\dfrac{4}{\sqrt{x}+2}$.

**738.** а) $\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-4\sqrt{x}+3}-\dfrac{\sqrt{x}+10}{\sqrt{x}-3}$; б) $\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x-3\sqrt{x}+2}-\dfrac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\left(\dfrac{2x\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}{4\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}}$;

г) $\left(\dfrac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}+\dfrac{2y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}\right):\dfrac{\sqrt{x^3y}+4\sqrt{xy^3}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$.

Найдите значение выражения (739—741):

**739.** а) $x-\sqrt{(x-10)^2}$ при $x=10{,}1$;

б) $x+\sqrt{(x-10)^2}$ при $x=9{,}9$;

в) $2x-\sqrt{(2x-3)^2}$ при каждом $x>1{,}5$;

г) $2x+\sqrt{(2x-3)^2}$ при каждом $x<1{,}5$.

**740.** а) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ при $x=5$;

б) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5}$ при $x=26$;

в) $\frac{x-16}{\sqrt{x}-4} - \frac{x-36}{\sqrt{x}+6}$ при каждом $x > 16$;

г) $\frac{x-49}{\sqrt{x}+7} - \frac{x-64}{\sqrt{x}+8}$ при каждом $x > 0$.

**741.** а) $\sqrt{x-3} - |\sqrt{x-3}+1|$ при $x = 3,1$;

б) $\sqrt{x-2} + |\sqrt{x-2}-3|$ при $x = 3,2$;

в) $|\sqrt{x+1}-1| - \sqrt{x+1}$ при каждом $x > 3,3$;

г) $|\sqrt{x+5}-3| + \sqrt{x+5}$ при каждом $x < 3,4$.

## Система координат, функции и графики

**742.** Укажите на координатной плоскости все точки, у которых:
а) абсциссы равны 5; б) ординаты равны −4;
в) абсциссы равны 0; г) ординаты равны 0;
д) абсциссы и ординаты равны.

**743.** На координатной плоскости отметьте все точки, у которых:
а) абсциссы больше 1;
б) ординаты меньше −3;
в) абсциссы удовлетворяют неравенству $x < -1$;
г) ординаты удовлетворяют неравенству $y \geqslant 2$;
д) абсциссы удовлетворяют неравенству $-1 < x < 4$;
е) ординаты удовлетворяют неравенству $-4 \leqslant y \leqslant 2$.

**744.** Укажите на координатной плоскости точки $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют условиям:
а) $x = 2$, $y > 3$; б) $x > -1$, $y = -2$;
в) $0 \leqslant x < 2$, $y < 3$; г) $x \geqslant 0$, $-1 < y < 3$;
д) $-2 < x < 4$, $0 < y \leqslant 2$; е) $-3 < x \leqslant 2$, $-3 \leqslant y < 2$.

**745.** Какие углы образуют графики функций $y = x$ и $y = -x$ с положительной полуосью $Ox$? Какой угол образуют графики этих функций между собой?

**746.** Постройте график функции $y = -2x$. Какие значения принимает $y$, если:
а) $x > 3$; б) $x < 1$; в) $4 < x < 7$; г) $-5 < x < -1$?

**747.** Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку:
а) $B(1; 1,5)$; б) $B(1; -3)$; в) $B(1; -0,5)$.

**748.** Постройте график функции:
а) $y = x$; б) $y = |x|$; в) $y = -|x|$; г) $y = 0$.

**749.** **Доказываем.** Докажите, что функция:
а) $y = 2x$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$;
б) $y = -\frac{1}{2}x$ убывает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

**750.** а) График прямой пропорциональности расположен в I и III четвертях. Определите знак коэффициента прямой пропорциональности.
б) В каких четвертях расположен график прямой пропорциональности, если $k > 0$; $k < 0$?
в) Как расположен график функции $y = kx$, если $k = 0$?

**751.** Найдите расстояние между точками:
а) $A(1; 2)$ и $B(1; -8)$; б) $A(1; 2)$ и $B(-6; 2)$;
в) $A(1; 2)$ и $B(2; 5)$; г) $A(1; 2)$ и $B(-2; -5)$.

**752.** Напишите уравнение окружности радиуса $AB$ с центром $A$:
а) $A(-2; 1)$ и $B(1; 5)$; б) $A(1; 5)$ и $B(-2; 1)$.

**753.** **Доказываем.** Докажите, что точки $A(m; n)$ и $B(n; m)$ симметричны относительно прямой, делящей I и III координатные углы пополам.

**Замечание**. Точки $A$ и $B$ называют симметричными относительно прямой $a$, если эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку $AB$. Точка прямой $a$ считается симметричной сама себе относительно этой прямой.

Постройте график функции **(754—755)**:

**754.** а) $y = \frac{1}{3}x$; б) $y = \frac{3}{4}x$; в) $y = -2\frac{1}{3}x$;
г) $y = 2{,}5x$; д) $y = 6$; е) $y = -x$.

**755.** а) $y = 2x - 3$; б) $y = -2x - 3$; в) $y = 3x + 1$;
г) $y = -\frac{1}{2}x - 3$; д) $y = \frac{1}{2}x - 3$; е) $y = \frac{1}{3}x + 1$;
ж) $y = 0{,}5x + 5$; з) $y = -4 - x$; и) $y = 4 - 2x$.

**756.** Верно ли утверждение:
а) всякая прямая пропорциональная зависимость между переменными $y$ и $x$ есть линейная функция $y$ от $x$;
б) всякая линейная функция есть прямая пропорциональная зависимость?

**757.** Принадлежит ли графику функции $y = 3{,}5x + 1{,}2$ точка:
а) $(-1; -2)$; б) $(5; -7)$; в) $(-2; -5{,}8)$; г) $(4; 15{,}2)$?

**758.** Точка $A$ принадлежит графику функции $y = -2x + 0{,}5$. Определите неизвестную координату:
а) $A(x; 1{,}5)$; б) $A(4; y)$; в) $A(x; -2)$; г) $A(-3; y)$.

**759.** Постройте график функции и определите координаты точки, в которой график пересекает ось $x$:
а) $y = 3x + 2$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = x + 3$;
г) $y = -x + 2$; д) $y = 0{,}5x - 4$; е) $y = 5 - 3x$.
Какие из построенных прямых параллельны?

**760.** Напишите уравнение прямой, проходящей через точку (0; 3) и параллельной прямой:
а) $y = 2x$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = 1{,}5x - 1$; г) $y = -x + 2$.

**761.** График какой линейной функции проходит через точки:
а) $A(2; 6)$ и $B(6; 10)$; б) $A(2; 5)$ и $B(3; 7)$;
в) $A(3; 3)$ и $B(5; 1)$; г) $A(-1; 2)$ и $B(2; -7)$?

**762.** Напишите уравнения прямой, проходящей через точки:
а) (2; 1) и (1; 0); б) (1; 2) и (3; 4);
в) (0; 2) и (1; 0); г) (−1; 2) и (2; −1);
д) (0; 0) и (−3; −3); е) (1; −2) и (−3; −5).

**763.** Укажите промежутки возрастания (убывания) функции:
а) $y = x - 2$; б) $y = -2x + 3$;
в) $y = 2(x + 1)$; г) $y = 3x - 7(x - 4)$.

**764.** Является ли функция $y = 3 \cdot \frac{x^2}{x} + 5$ линейной?

**765.** Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

**766.** Определите координаты точки пересечения графиков функций:
а) $y = x$ и $y = -x$; б) $y = x$ и $y = 2x - 2$;
в) $y = 2x - 1$ и $y = -2x$; г) $y = 0{,}5x - 2$ и $y = x + 3$.

**767.** Две материальные точки движутся по оси $Os$ по законам:
а) $s = 2t + 4$ и $s = 4t$;
б) $s = 2t + 1$ и $s = -t + 2$;
в) $s = 2t + 1$ и $s = 2t + 3$.
Встретятся ли эти точки? Если да, то в какой момент времени? Нарисуйте графики движения и с их помощью поясните полученные результаты.

**768.** На рисунке 112 представлены графики функций. Запишите формулу, которой задана каждая функция.

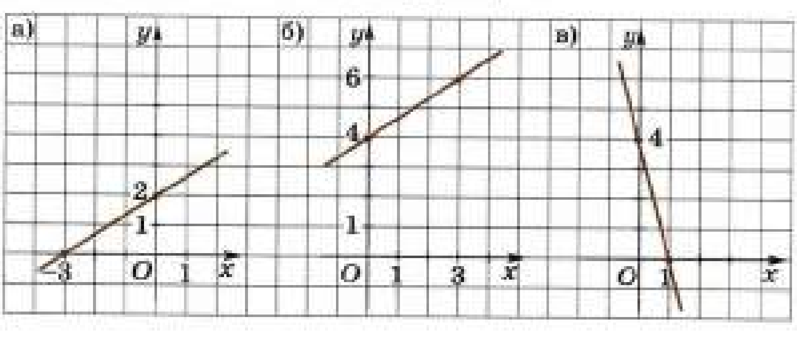



Рис. 112

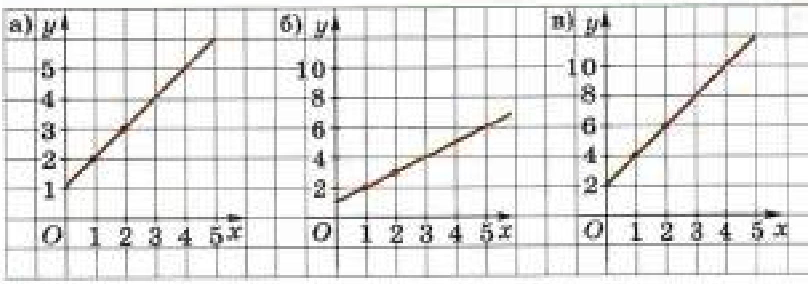



**Рис. 113**

**769.** Два графика на рисунке 113 являются графиками одной и той же функции. Какие это графики? Напишите формулу, которой задана эта функция.

**770.** Постройте несколько точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$; б) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

Где лежат все такие точки?

**771.** а) Известно, что при $x = 2$ функция $y = 3x + b$ принимает значение 8. Определите $b$.

б) Известно, что график функции $y = kx - 2$ проходит через точку $(-3; 7)$. Определите $k$.

**772.** Даны две функции:

$$y = 3x - 1 \text{ и } y = 0{,}2x + 2.$$

Определите, при каком значении $x$ обе функции имеют одно и то же значение. Проиллюстрируйте решение с помощью графика.

**773.** а) Приведите примеры линейных функций, графики которых параллельны. Чем отличаются формулы, задающие эти функции?

б) Приведите примеры линейных функций, графики которых образуют с положительной полуосью $Ox$ угол в 45°, 135°.

в) Приведите примеры линейных функций, графики которых перпендикулярны.

**774.** Материальная точка движется по оси $Os$ по закону:

а) $s = 2t + 3$; б) $s = -2t + 3$.

1) Равномерно ли движется точка?
2) В каком направлении оси она движется?
3) С какой скоростью движется точка?
4) Где находилась точка в момент времени $t = 0$?
5) В какой момент времени точка находилась в нулевой точке ($s = 0$)?
6) Постройте график движения материальной точки в системе координат $tOs$.

**775.** Разогнавшись, велосипедист едет в гору со скоростью $v = 10 - 2t$ (м/с), не работая педалями. Сколько времени он будет ехать до полной остановки? Проиллюстрируйте ответ графиком.

Постройте график функции (776—778):

**776.** а) $y = x^2$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = x^2 + 3$; г) $y = (x - 2)^2$; д) $y = (x + 3)^2$; е) $y = (x - 2)^2 + 1$; ж) $y = (x + 2)^2 - 1$; з) $y = (x + 2)^2$; и) $y = (x - 3)^2 - 4$.

**777.** а) $y = x^2 + 2x + 1$; б) $y = x^2 - 4x + 4$; в) $y = x^2 + 6x + 5$; г) $y = x^2 - 8x + 8$.

**778.** а) $y = 2x^2$; б) $y = -2x^2$; в) $y = -2x^2 + 1$; г) $y = -(x - 3)^2 + 4$; д) $y = 4x^2 - 4x$; е) $y = -x^2 + 4x$; ж) $y = -2x^2 + 8x$; з) $y = 2x^2 - 8x$.

**779.** Определите с помощью графика значения $x$, для которых выполняется неравенство:
а) $x^2 > 9$; б) $x^2 > -5$; в) $x^2 \geqslant 3$; г) $x^2 < -3$; д) $x^2 \leqslant 0$; е) $x^2 < 4$; ж) $x^2 > 2x$; з) $x^2 < x$; и) $x^2 \leqslant 2x + 1$.

**780.** а) Расположите значения функции $y = x^2$ в порядке возрастания: $y(-4)$, $y(5,1)$, $y(4,1)$, $y(0,5)$, $y(0)$.
б) Расположите значения функции $y = x^2$ в порядке убывания: $y\left(-\frac{1}{5}\right)$, $y(-0,3)$, $y\left(\frac{1}{4}\right)$, $y(0,27)$, $y(-0,(3))$, $y\left(\frac{2}{7}\right)$.

**Доказываем (781—782).**

**781.** Докажите с помощью определения, что функция:
а) $y = 2x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$;
б) $y = 2x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$;
в) $y = 3x^2 - 6x$ возрастает на промежутке $[1; +\infty)$;
г) $y = 3x^2 - 6x$ убывает на промежутке $(-\infty; 1]$.

**782.** Докажите, что при любом значении $x$ выполняется неравенство:
а) $x^2 + 6x + 10 > 0$; б) $x^2 - 8x + 17 > 0$; в) $x^2 - 3x + 3 > 0$; г) $x^2 + 5x + 7 > 0$.

**783.** На рисунке 114 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки $a$, $b$, $c$.

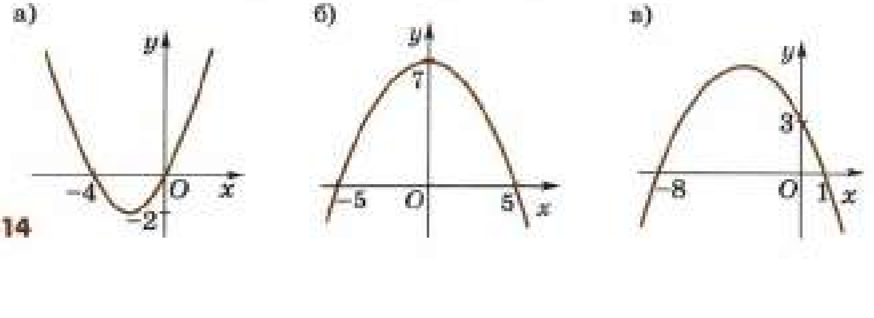



**Рис. 114**

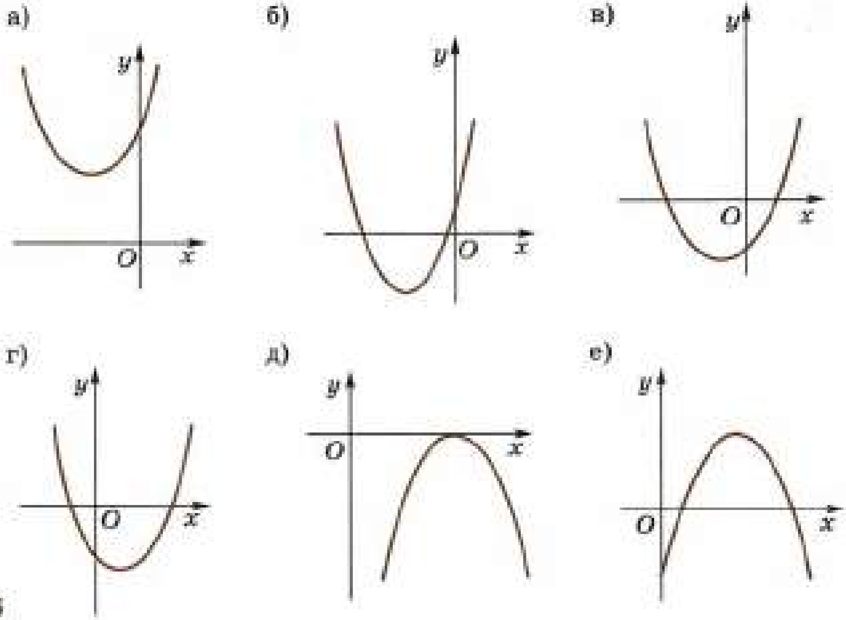



Рис. 115

**784.** По графику функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки $a$, $b$, $c$ (рис. 115).

**785.** Как расположен в координатной плоскости $xOy$ график функции

$$y = |ax^2 + bx| + c,$$

если $D = b^2 - 4ac > 0$, $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$?
Постройте схематически график функции.

**786.** На рисунке 116 изображён график квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Какие значения могут принимать коэффициенты $a$, $b$ и свободный член $c$?

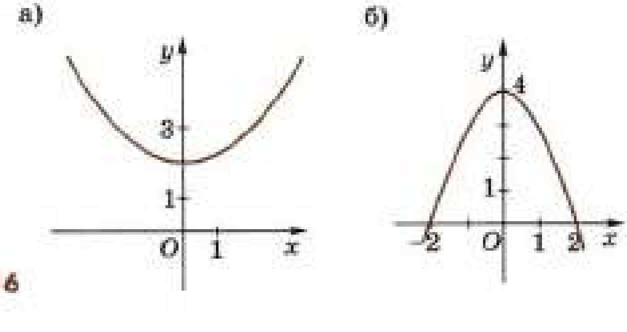



Рис. 116

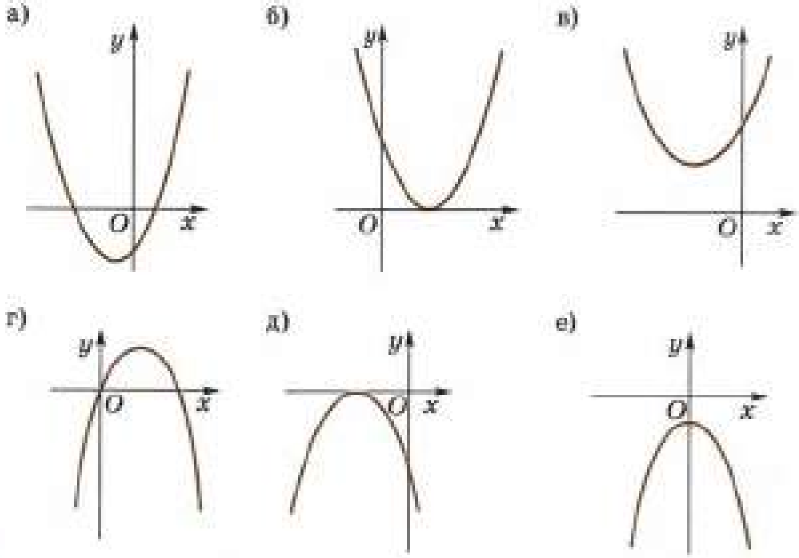



Рис. 117

**787.** На рисунке 117 изображены графики квадратичных функций. Укажите рисунок, удовлетворяющий условию:
а) $D > 0$, $a < 0$; б) $D > 0$, $a > 0$; в) $D = 0$, $a < 0$;
г) $D < 0$, $a > 0$; д) $D < 0$, $a < 0$; е) $D = 0$, $a > 0$.
$D$ — дискриминант, $a$ — коэффициент при старшем члене квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

**788.** Постройте график функции:
а) $y = |x|(x + 2)$; б) $y = x|x + 2|$.

**789.** Определите с помощью графиков значения $x$, для которых выполняется равенство:
а) $\frac{1}{x} = 1$; б) $3 = \frac{1}{x}$; в) $\frac{1}{x} = x^2$.

Постройте график функции (790—791):

**790.** а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = -\frac{1}{x}$; в) $y = \frac{|x|}{x^2}$; г) $y = -\frac{x^2}{|x^3|}$.

**791.** а) $y = \frac{1}{x} + 1$; б) $y = \frac{1}{x} - 2$; в) $y = 2 - \frac{1}{x}$; г) $y = \frac{x - 1}{x}$.

Укажите на координатной плоскости $xOy$ все точки, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют условию (792—793):

**792.** а) $x^2 - y^2 = 0$; б) $(x - 2)^2 - y^2 = 0$;
в) $x^2 - (y - 3)^2 = 0$; г) $(x + 3)^2 - (y - 1)^2 = 0$.

**793.** а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 \leqslant 4$;
в) $x^2 + y^2 \geqslant 4$; г) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$;
д) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 4$; е) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 \geqslant 4$.

**794.** Проволока длиной 12 дм согнута под прямым углом так, что площадь квадрата, построенного на воображаемой гипотенузе, оказалась наименьшей. Определите стороны полученного прямого угла.

**795.** В равнобедренный треугольник с основанием 20 см и высотой 14 см вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите площадь этого прямоугольника.

**796.** Каким условиям должны удовлетворять числа $a$, $b$ и $c$, чтобы квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ имела:
а) положительные значения при любых $x$;
б) наибольшее значение?

**797.** При каком условии график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось $Ox$ в точках, абсциссы которых являются противоположными числами?

**798.** Определите знак числа $a$ в формуле квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если $y_2 > y_1$ при $x_2 > x_1 > -\frac{b}{2a}$, где $y_1$ и $y_2$ — значения функции в точках $x_1$ и $x_2$.

**799.** Напишите уравнение какой-либо параболы, проходящей через две точки: $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ и $(4; 0)$.

**800.** Каким условиям должны удовлетворять числа $a$, $b$ и $c$, чтобы парабола $y = ax^2 + c$ и прямая $y = -bx$ имели две общие точки?

**801.** Напишите уравнение какой-либо параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через начало координат, при условии, что число $-2$ является корнем квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ ($a$, $b$ и $c$ — целые числа).

## Уравнения и системы уравнений

**802.** Считая $a$ и $b$ данными числами, решите уравнение с неизвестным $x$:
а) $4x + a = 6x - 8$;
б) $3x + a = 4x - 2b + 3a$;
в) $5a + 6x = 8x - 3a$;
г) $7a - b - 4x = 3b + 5x - 2a$;
д) $2(x + a) = 3(x - a)$;
е) $5(x - b) = 2(a - x)$;
ж) $a - (a + b)x = (2 - a)x - (3 + bx)$;
з) $3x - a(b + x) = a(b - x) - 2(a - x)$.

**803.** Считая $m$, $n$, $a$ и $b$ данными числами, решите уравнение с неизвестным $x$:
а) $4m - 2x = 6n$;
б) $5x - 10a = 15b$;
в) $(x - a)(x + b) = 0$;
г) $(a - x)(b - x) = 0$.

Решите уравнение (**804—805**):

**804.** а) $(x-1)(x-3)=0$; б) $(x-5)(x-2)=0$;
в) $(x+4)(3+x)=0$; г) $(7+x)(x-10)=0$;
д) $(2x-1)(x+1)=0$; е) $(x-0{,}5)(3x+4)=0$;
ж) $x(x-1)=0$; з) $x(2x+1)=0$;
и) $3x(2x-7)=0$; к) $5x(4x-1)=0$.

**805.** а) $x^2=4$; б) $x^2=1$; в) $x^2=3$; г) $x^2=5$.

**806.** Существует ли значение $x$, при котором:
а) $x^2=0$; б) $x^2=1$; в) $x^2+1=0$;
г) $5+x^2=0$; д) $x^2+7=0$; е) $x^2-16=0$?

Решите уравнение (**807—809**):

**807.** а) $x^2=36$; б) $x^2=2{,}25$; в) $3x^2=0$; г) $x^2=-1$.

**808.** а) $-0{,}5x^2=0$; б) $2x^2+3=0$; в) $7x^2-1=0$;
г) $8x^2-12=0$; д) $3x^2+5=0$; е) $3x^2=4x$;
ж) $-7x^2=1$; з) $72-x^2=0$; и) $16+x^2=0$.

**809.** а) $x^2=2-x$; б) $x^2=x-8$;
в) $x^2+2x+1=0$; г) $x^2-x-2=0$.

**810.** Является ли корнем уравнения $x^2-4x+2=0$ число:
а) $-2-\sqrt{2}$; б) $2+\sqrt{2}$; в) $2-\sqrt{2}$; г) $-2+\sqrt{2}$?

**811.** Найдите значение выражения $b^2-4ac$ при:
а) $b=1$, $a=0$, $c=2$; б) $b=\frac{1}{3}$, $a=-1$, $c=4$.

**812.** Может ли квадратное уравнение с рациональными коэффициентами иметь своими корнями числа:
а) $5$ и $2+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$; в) $3-\sqrt{2}$ и $3+\sqrt{2}$?

**813.** При каком числовом значении $t$ один из корней уравнения $x^2-12x+t=0$ является квадратом другого корня?

**814.** Могут ли быть целыми числами корни приведённого квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, если $p$ и $q$:
а) целые числа; б) рациональные числа?

**815.** Решите уравнение:
а) $1999x^2-2001x+2=0$;
б) $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8)=12$.

**816.** При каком числовом значении $t$ уравнение

$$x^2+t(t-1)x+9=0$$

имеет равные корни?

**817.** Найдите квадратный трёхчлен, значение которого при $x=0$ равно 3, при $x=1$ равно 0, при $x=2$ равно 1.

**818.** Найдите квадратный трёхчлен, значение которого при $x = 1$ равно 1, при $x = 2$ равно 3, при $x = 3$ равно 11.

Решите уравнение (**819—820**):

**819.** а) $5x^2 - 6x + 1{,}75 = 0$;  б) $\sqrt{2}x^2 - 10x + 8\sqrt{2} = 0$;
в) $11x^2 - 10x - 9 = 0$;  г) $\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{2}x + 8\sqrt{3} = 0$;
д) $\frac{5}{4}x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$;  е) $2x^2 - 3{,}1x + 0{,}42 = 0$;
ж) $3x^2 + 2\sqrt{6}x + 2 = 0$;  з) $\frac{1}{4}x^2 + 1 + \frac{3}{5}x = 0$.

**820.** а) $46x - 21 + 7x^2 = 0$;  б) $2x^2 + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)x - 3\sqrt{2} = 0$;
в) $\sqrt{3}y^2 - 8\sqrt{2}y + 4\sqrt{3} = 0$;  г) $16a^2 - 8\sqrt{2}a + 1 = 0$;
д) $m^2 + 2\sqrt{2}m + \sqrt{3} = 0$;  е) $(x - 3)^2 = 1 - \pi$;
ж) $(2x + 3)^2 - (x - 2)^2 = 5$;
з) $(5 - 3x)(3x + 5) - 2x(x - 3) = 25$.

Равносильны ли уравнения (**821—822**):

**821.** а) $(x + 4)(x - 3) = 0$ и $x^2 + x - 12 = 0$;
б) $(x + 3)(x - 1) = 0$ и $x^2 - 2x - 3 = 0$;
в) $(x - 2)(x + 1) = 0$ и $x + \frac{6}{2 - x} = 1$;
г) $(x - 1)(x - 2) = 0$ и $\frac{3}{2 - x} - x = 2$;
д) $x + 4 = 2x$ и $x = 4$;  е) $2x + 5 = 0$ и $x + 3 = 0$;
ж) $2x = 5$ и $x = -2{,}5$;  з) $x^2 + x = 0$ и $x^2 = 0$?

**822.** а) $2(x + 1) = 3(x - 2)$ и $2(x + 1) + 1 = 3(x - 2) + 1$;
б) $2(x + 1) + x + 2 = 3(x - 2) + x + 2$ и $2(x + 1) = 3(x - 2)$;
в) $2(x + 1) + \frac{1}{x} = 3(x - 2) + \frac{1}{x}$ и $2(x + 1) = 3(x - 2)$;
г) $x = 2$ и $x + \frac{2 - x}{x + 1} = 2 + \frac{2 - x}{x + 1}$;
д) $x + 1 = 2 - x$ и $2(x + 1) = 2(2 - x)$;
е) $x + 1 = 2 - x$ и $x(x + 1) = x(2 - x)$;
ж) $x + 1 = 2 - x$ и $(x + 1)(x - 1) = (2 - x)(x - 1)$;
з) $x + 1 = 2 - x$ и $(x + 1)(x^2 + 2) = (2 - x)(x^2 + 2)$;
и) $x + 1 = 2 - x$ и $(x + 1)(2x - 1) = (2 - x)(2x - 1)$?

Решите уравнение (**823—832**):

**823.** а) $x^4 + 9 = 10x^2$;  б) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$;
в) $x^4 - 14x^2 = 15$;  г) $5x^4 + 3 + 8x^2 = 0$;
д) $x^4 + x^2 = 0$;  е) $x^4 - x^2 = 0$.

**824.** а) $x^4+2x^2-3=0$; б) $x^4-x^2-6=0$;
в) $x^3+4x^2+4x+1=0$; г) $x^3+4=3x^2$;
д) $2x^3-3x^2+3x=2$; е) $x^4-2x^3+x=132$.

**825.** а) $(x^2-5)^2+(x^2-1)=40$; б) $(x^2-10)(x^2-3)=78$;
в) $(x^2+1)(x^2-3)=15$; г) $(y^2-3)^2=2(15-y^2)$;
д) $(x^2-1)^2-12=3-x^2$; е) $(x^2-2)^2-2(x^2+5)=4$.

**826.** а) $x^3-x^2+x-1=0$; б) $x^3+x^2+x+1=0$;
в) $2x^4+5x^3-5x-2=0$; г) $x^3+2x^2+2x+1=0$;
д) $3x^3-7x^2-7x+3=0$; е) $6x^3-7x^2-7x+6=0$;
ж) $x^3-25x-2x^2+50=0$; з) $x^3+3x^2-16x-48=0$;
и) $x^3+2x^2-9x-18=0$; к) $x^3-3x^2-4x+12=0$.

**827.** а) $x^3-2x(x+1)=x$;
б) $(x^3-5x^2)(x^2-3x+1)=0$;
в) $3x^3-3x(x-1)=7x^2$;
г) $(14x^3+19x^2+12x)(2x^2-7x+6)=0$;
д) $(x-2)^2-10(x-2)+21=0$;
е) $(a+1)^2=9(a+1)-20$;
ж) $(2m-1)^2+4(2m-1)+3=0$;
з) $(3n+2)^2=15-2(3n+2)$;
и) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$;
к) $x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$.

**828.** а) $x-6\sqrt{x}=-5$; б) $x+10=7\sqrt{x}$;
в) $x+\sqrt{x}=30$; г) $x-3\sqrt{x}=28$;
д) $x^9-2x^5+x=0$; е) $x^9+4x^5+4x=0$.

**829.** а) $\sqrt{x}=3$; б) $\sqrt{x}=0$; в) $\sqrt{x}=-1$;
г) $\sqrt{2x}=1$; д) $\sqrt{4x-1}=1$; е) $\sqrt{x+2}=1$;
ж) $\sqrt{3x-8}=6$; з) $\sqrt{1+5x}=7$; и) $\sqrt{x-3}-2=0$.

**830.** а) $\frac{x-3}{x}=0$; б) $\frac{x}{x-1}=0$; в) $\frac{7}{x}=0$; г) $\frac{x+1}{x+1}=1$.

**831.** а) $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$; б) $\frac{1}{x-4}+\frac{24}{x^2-16}=\frac{x+1}{x+4}$;
в) $\frac{3}{x+1}+\frac{2x}{x-1}-\frac{3x+1}{x^2-1}=0$; г) $\frac{1}{x-3}-\frac{x}{x+3}+\frac{18}{x^2-9}=0$;
д) $\frac{3}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$; е) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{5}{x^2+2x+1}$;
ж) $\frac{1}{x+3}-\frac{6}{9-x^2}=\frac{3}{x^2-6x+9}$; з) $\frac{4}{x^2+6x+9}-\frac{1}{x-3}=\frac{6}{9-x^2}$.

**832.** а) $\frac{2+a}{3-a}-\frac{1-3a}{a}=\frac{2a}{a-2}$; б) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=\frac{4}{x-3}$;

в) $\frac{2}{m-1}-\frac{1}{m+3}=\frac{3}{m-3}$; г) $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}=\frac{6}{x-1}$;

д) $\frac{21}{y}-\frac{10}{y-2}-\frac{4}{y-3}=0$; е) $\frac{3-5x}{x+2}=2+\frac{x-11}{x+4}$.

**833.** Выразите $x$ из уравнения:

а) $xy=5$; б) $x+xy=1$; в) $x^2+3y=2$; г) $y^2-xy=0$.

Решите систему уравнений (834—836):

**834.** а) $\begin{cases}x+y=13,\\ y=x-4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+4y=230,\\ y=5x;\end{cases}$

в) $\begin{cases}13x-14y=27,\\ 13x=2y+15;\end{cases}$ г) $\begin{cases}8x-9y=1,\\ 3y=4x+1;\end{cases}$

д) $\begin{cases}x-3y=12,\\ 2x+4y=90;\end{cases}$ е) $\begin{cases}2x+y=8,\\ 3x+4y=7;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}x-3y=4,\\ 5x+3y=-1;\end{cases}$ з) $\begin{cases}2x+5y=25,\\ 4x+3y=15;\end{cases}$

и) $\begin{cases}4x+3y=-4,\\ 6x+5y=1;\end{cases}$ к) $\begin{cases}2x-3y=5,\\ 7x+5y=2;\end{cases}$

л) $\begin{cases}4x-7y=2,\\ 2x+3y=1;\end{cases}$ м) $\begin{cases}4x+4y=1,\\ 3x+3y=-5.\end{cases}$

**835.** а) $\begin{cases}x-2y=5,\\ 2x+3y=4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x-y=2,\\ 2x+2y=5;\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x-5y=4,\\ 2x+6y=3;\end{cases}$

г) $\begin{cases}4x+3y=2,\\ 5x-2y=3;\end{cases}$ д) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1,\\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=2;\end{cases}$ е) $\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=-5,\\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=1.\end{cases}$

**836.** а) $\begin{cases}\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}x-1,\\ \frac{1}{4}y=\frac{2}{5}x-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-\frac{5}{3}y=4,\\ 3x-\frac{7}{2}y=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=6,\\ 3x-4y=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{x}{7}-\frac{y}{3}=-1,\\ \frac{5x}{3}-\frac{35y}{12}=0;\end{cases}$

д) $\begin{cases} 3(3x - y) + \frac{2}{5}(x - 2y) = 17, \\ 5x + y = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2(2y - x) + \frac{1}{7}(y + 3x) = 1, \\ 5y + x = 7; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{x + 3y}{2} = \frac{x - 2y}{3} + 31, \\ x + y = \frac{3}{4}(x - y) + 27; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x}{3} = 1, \\ x - \frac{x + y}{2} = 3; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \frac{3x - 2y}{5} + \frac{5x - 3y}{3} = x + 1, \\ \frac{2x - 3y}{3} + \frac{4x - 3y}{2} = y + 1; \end{cases}$

к) $\begin{cases} \frac{2x - y + 3}{3} - \frac{x - 2y + 3}{4} = 4, \\ \frac{3x - 4y + 3}{4} + \frac{4x - 2y - 9}{3} = 4. \end{cases}$

**837.** Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ 2x - 3y = -14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 3y = 0, \\ 3x + 2y = 17; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x + 2y = -1, \\ 2x - 3y = -8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + y - 1 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x - y - 3 = 0, \\ 14x - 2y + 5 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ 6x + 2y - 2 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 4x - 2y + 3 = 0, \\ x - 3y - 1 = 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3x + y = 13, \\ 2x - 3y - 5 = 0. \end{cases}$

**838.** Определите, сколько решений имеет система уравнений, и дайте объяснение решения с помощью графиков:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 2x + 3y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x - 6y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ x + y = 5. \end{cases}$

**839.** Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = x + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 4, \\ y = -x^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = -x^2 + 4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$

Решите систему уравнений (840—841):

**840.** а) $\begin{cases} 4x + 3y = 6, \\ 2x + 8y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x - 3y = 15, \\ 5x + 6y = 27; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 5y - 7x = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6x - 7y = 40, \\ 5y - 2x = -8. \end{cases}$

**841.** а) $\begin{cases} 2y + 6x + 6 = 0, \\ 5x + y = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x - 3y = 27, \\ 5x - 6y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x - 7y = 16, \\ 2x + 3y = -16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x + 3y = 2, \\ 3x + 5y = -18; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 4(x + 2y) - 8 = 5x - 2, \\ 3(2x - y) + 6 = 24y + 12; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3(2x - y) - 14(5x - 3y) = 7, \\ 6x - 6y = 3. \end{cases}$

**842.** а) К уравнению $x - y = 3$ подберите второе уравнение так, чтобы получившаяся система уравнений:
1) имела единственное решение;
2) имела бесконечное множество решений;
3) не имела решений.
б) Устно решите систему уравнений:
1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + z = 2, \\ y + z = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 8y = 5, \\ 8x + 5y = 8. \end{cases}$

**843.** а) Ученик решил уравнение $5x + 15 = 3x + 9$ следующим образом: $5(x + 3) = 3(x + 3)$, $5 = 3$ — и заявил, что уравнение корней не имеет, так как его решение приводит к нелепому результату. Прав ли ученик?
б) Ученик решил систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2(1 - x), \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

способом подстановки, для чего выражение $y$ из первого уравнения он подставил во второе уравнение. Объясните это решение.
в) Ученик решил систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 8, \\ y = 2(4 - x) \end{cases}$$

способом подстановки, для чего выражение $y$ из второго уравнения он подставил в первое уравнение. Объясните это решение.

**844.** Составьте систему двух уравнений с двумя неизвестными, решением которой являлась бы пара чисел:
а) (2; 3); б) (1; 1); в) (−1; 2); г) (−1; −2).

**845.** а) При каком $k$ число 5 будет корнем уравнения
$$(k-1)x^2+7x-2k=0?$$
б) Найдите коэффициенты приведённого квадратного уравнения, если известно, что числа 10 и −15 являются его корнями.
в) Докажите, что при любых числовых значениях $a$, $b$ и $c$ уравнение $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2=0$ имеет корни.

**846.** Определите, при каких числовых значениях $a$ и $b$ система уравнений имеет бесконечное множество решений; не имеет решений:
а) $\begin{cases} 5x+(a-1)y=3b, \\ x-2y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+8y=b, \\ \dfrac{x}{a-1}+(a-3)y=a+1. \end{cases}$

**847.** Для любых чисел $a$ и $b$ решите уравнение:
а) $x^2+2ax+a^2-b^2=0$; б) $x^2-2(a+b)x+4ab=0$;
в) $x^2-3ax+2a^2=0$; г) $x^2-ax-2a^2=0$.

**848.** Решите систему уравнений:
а) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{y-1}=\dfrac{1}{2}, \\ xy+3y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{y+1}=\dfrac{1}{4}, \\ xy-4y=x. \end{cases}$

## Разные задачи

**849.** а) Какое число можно прибавить к делимому (при делении с остатком), чтобы частное не изменилось?
б) Какие числа можно прибавлять к делимому и делителю (при делении с остатком), чтобы частное и остаток не изменились?

**Доказываем** (850—851).

**850.** а) Докажите, что если каждое из двух натуральных чисел при делении на 4 даёт в остатке 1, то их произведение при делении на 4 также даёт в остатке 1.
б) Докажите, что произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 120.

**851.** а) Докажите, что $\dfrac{a^3-a}{6}$ является целым числом, если $a$ — любое целое число.
б) Докажите, что разность квадратов двух последовательных чётных чисел делится на 4.
в) Докажите, что разность квадратов любых двух нечётных чисел делится на 8.

**852.** **Исследуем.** а) В каком двузначном числе удвоенная сумма цифр равна их произведению?
б) Найдите все целые значения $a$, при каждом из которых дробь $\frac{a^3+1}{a-1}$ принимала бы целые значения.

**Доказываем (853—855).**

**853.** Докажите, что точки координатной оси, соответствующие числам вида $\frac{n^5+n^4+n^3+2}{n^5+n^4+n^3+1}$ ($n$ — натуральное число), расположены на отрезке, длина которого не превышает $\frac{1}{4}$.

**854.** Докажите, что если числа $a$ и $b$ таковы, что $2b = 1 + ab$ и $a \neq 1$, $b \neq 1$, то $\frac{a+1}{a-1} - \frac{b+1}{b-1} = 2$.

**855.** Докажите, что если числа $a$, $b$ и $c$ таковы, что

$$\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c},$$

то $bc = 0$.

**856.** а) При делении 20 на 6 в частном получается 3, а в остатке 2. Запишите соответствующее равенство. Выразите каждое число из этого равенства через другие.
б) Выразите формулой зависимость между делимым $a$, делителем $b$, частным $c$ и остатком $d$. Выразите каждое число через остальные из этой формулы.

**857.** **Исследуем.** Записали одну за другой четыре последовательные цифры, затем первые две поменяли местами. Полученное таким образом четырёхзначное число является квадратом натурального числа. Найдите это число.

**858.** Одновременно были зажжены две свечи одинаковой длины: одна свеча потолще (сгорающая за 4 ч), другая потоньше (сгорающая за 2 ч). Через некоторое время обе свечи потушили. Оказалось, что огарок толстой свечи в 3 раза длиннее огарка тонкой свечи. Сколько времени горели свечи?

**859.** Книга продана со скидкой 10 % за 2 р. 70 к. Сколько стоила эта книга до снижения цены?

**860.** а) Завод выпустил 1260 моторов вместо 1200 по плану. На сколько процентов завод перевыполнил план?
б) Рабочий по плану должен был изготовить 800 деталей, но он перевыполнил план на 5 %. Сколько деталей изготовил рабочий?
в) В классе по списку 40 учеников, 4 сегодня отсутствуют. Каков процент посещаемости сегодня?

г) Как проще найти $33\frac{1}{3}$ % от числа?

д) Какую часть числа составляют $66\frac{2}{3}$ %?

е) Если к некоторому числу прибавить его 10 %, то получится 330. Найдите это число.

ж) Трава при высыхании теряет 80 % своей массы. Сколько сена получится с луга площадью 10 га, если с одного гектара накашивают в среднем 6 т травы?

**861.** а) Известно, что норма выработки за месяц (25 смен) составляет 2000 деталей. Определите норму выработки за одну смену (6 ч) и норму времени на одну деталь.

б) Известно, что норма времени на обработку одной детали 30 мин. Найдите норму выработки за смену (6 ч) и за месяц (25 смен).

в) Самолёт поднялся на высоту 8 км за 20 мин. Можно ли указать, на какую высоту самолёт поднимется за 5 ч?

г) Ученик метнул спортивное копьё на 30 м. Копьё весит 0,4 кг. Можно ли узнать, на какое расстояние метнёт ученик копьё весом 0,2 кг?

д) Пачка газетной бумаги в 500 листов имеет высоту 5 см. Какой высоты получится пачка из 1 млн таких листов?

**862.** а) На 15 автомашинах одинаковой грузоподъёмности доставили на элеватор 90 т зерна. Сколько нужно таких машин, чтобы доставить на элеватор 186 т зерна?

б) В 1 кг раствора содержится 40 г соли. Сколько соли содержится в 350 г этого раствора?

в) В 5 л раствора содержится 80 г соли. Сколько соли содержится в 4,2 л такого же раствора?

**863.** Рис содержит 75 % крахмала, а ячмень — 60 %.

а) Сколько нужно взять риса, чтобы получить столько же крахмала, сколько содержится его в 6 кг ячменя?

б) Сколько нужно взять ячменя, чтобы получить столько же крахмала, сколько его содержится в 8 кг риса?

**864.** Морская вода содержит 5 % (по массе) соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 50 кг морской воды, чтобы содержание соли в полученной воде составило 2 %?

**865.** а) До просушки зерна влажность его была 20 %. 10 ц этого зерна просушили, после чего его масса уменьшилась на 100 кг. Определите влажность зерна после просушки.

б) Хранившееся на складе зерно имело влажность 20 %. После просушки влажность его стала 15 %. Какова стала масса зерна после просушки, если при первоначальной влажности зерна было 50 т?

**Замечание.** Влажность зерна показывает содержание в нём воды в процентах.

**866.** а) При проверке влажность зерна оказалась равной 23 %, а после просушки — 12 %. На сколько процентов стало легче зерно после просушки?
б) Семена попали под дождь и стали на 20 % тяжелее. Когда их просушили, они потеряли в массе 20 %. Вернулись ли они к первоначальной массе?

**867.** а) Время изготовления некоторой детали уменьшилось на 40 %. На сколько процентов увеличилась производительность труда?
б) Объём строительных работ увеличился на 80 %. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих для выполнения этой работы за то же время, если производительность труда будет увеличена на 20 %?

**868.** а) Цена книги снизилась на столько процентов, на сколько копеек она снизилась. Какова первоначальная цена книги?
б) Две автомашины разных марок имеют максимальные скорости 160 км/ч и 140 км/ч. На сколько процентов скорость второй машины меньше скорости первой? На сколько процентов скорость первой машины больше скорости второй?

**869.** Даны два куска с различным содержанием олова. Первый, массой 300 г, содержит 20 % олова. Второй, массой 200 г, содержит 40 % олова. Сколько процентов олова будет содержать сплав, полученный из этих кусков?

**870.** Найдите процентное содержание $p$ олова в сплаве, полученном из двух кусков массами $m_1$ и $m_2$, содержащих соответственно $p_1$ и $p_2$ процента олова, если:
а) $m_1 = 15$, $p_1 = 40$, $m_2 = 35$, $p_2 = 20$;
б) $m_1 = 35$, $p_1 = 40$, $m_2 = 15$, $p_2 = 20$.

**871.** **Доказываем.** Докажите, что в предыдущей задаче из условия $p_2 < p_1$ следует, что $p_2 < p < p_1$.

**872.** Имеется два куска сплава олова и свинца. Первый, массой $m_1$ г, содержит $p_1$ % олова, второй содержит $p_2$ % олова. Сколько граммов от второго куска надо добавить к первому, чтобы получить сплав с содержанием олова $p$ %, если:
а) $m_1 = 300$, $p_1 = 40$, $p_2 = 60$, $p = 56$;
б) $m_1 = 180$, $p_1 = 45$, $p_2 = 70$, $p = 60$?

**873.** Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Сколько килограммов меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60 % меди?

**874.** Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45 % меди. Сколько килограммов олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?

**875.** Сколько чистой воды нужно добавить к 300 г морской воды, содержащей 4 % соли, чтобы получить воду, содержащую 3 % соли?

**876.** Сколько чистого серебра нужно добавить к 200 г серебра 835-й пробы, чтобы получить серебро 875-й пробы?

**Замечание**. 1 г сплава серебра 835-й пробы содержит 0,835 г серебра.

**877.** Имеются два куска, содержащие 60 % и 40 % олова. По скольку граммов от каждого куска надо взять, чтобы получить 600 г сплава, содержащего 45 % олова?

**878.** Имеются два куска, содержащие $p_1$ и $p_2$ процента олова. По скольку граммов от каждого куска надо взять, чтобы получить $m$ г сплава, содержащего $p$ % олова, если:
а) $m = 450$, $p_1 = 70$, $p_2 = 40$, $p = 60$;
б) $m = 600$, $p_1 = 80$, $p_2 = 65$, $p = 75$?

**879.** *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* У некоторого человека были для продажи вина двух сортов. Первое ценою 10 гривен ведро, второе же по 6 гривен. Захотелось ему сделать из тех двух вин, взяв по части, третье вино, чтобы ему цена была по 7 гривен. Какие части надлежит из тех двух вин взять к наполнению ведра третьего вина ценою в 7 гривен?

**880.** Имеются два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота к меди равно 1 : 2, а во втором — 2 : 3. Если сплавить $\frac{1}{3}$ первого слитка с $\frac{5}{6}$ второго, то в получившемся слитке окажется столько золота, сколько было в первом меди, а если $\frac{2}{3}$ первого слитка сплавить с половиной второго, то в получившемся слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

**881.** Требуется составить 50 г 15-процентного раствора соли из 10- и 20-процентных растворов. Сколько граммов каждого раствора необходимо для этого взять?

**882.** Стоимость товара прямо пропорциональна его количеству. Составьте формулу зависимости между стоимостью и количеством товара и установите смысл коэффициента пропорциональности.

**883.** Зависимость между длиной $l$ металлического стержня и его температурой $t$ выражается формулой $l = l_0(1 + \alpha t)$, где $l_0$ — длина этого стержня при 0 °С, $\alpha$ — постоянная величина. Выразите $t$ через $l$.

**884.** а) Урожай с 1 га равен $A$ (ц/га), площадь, с которой убирают урожай, $S$ (га), масса урожая $P$ (ц). Выразите зависимость между $A$, $S$, $P$.
б) Длина окружности колеса $C$, число оборотов колеса $k$, пройденный путь $s$. Выразите формулой зависимость между $C$, $k$, $s$.

**885.** а) Резервуар объёмом $V$ наполняется водой, подаваемой насосом за время $t$, производительность насоса $K$. Выразите формулой зависимость между $V$, $t$, $K$.
б) Приняв объём резервуара за единицу, выразите формулой зависимость между производительностью $K$ насоса, с помощью которого наполняется резервуар, временем наполнения $t$ и объёмом.

**886.** а) Вкладчик внёс в сберегательный банк вклад в сумме $A$ (р.) под $K$ % годовых. Выразите формулой сумму его вклада $B$ через 1 год.
б) Выразите формулой зависимость между массой $m$, объёмом $V$ и плотностью $p$. Запишите соответствующие формулы для каждой переменной.

**887.** а) Одна бригада может выполнить задание за 36 дней, а вторая — за 45 дней. За сколько дней выполнят это задание обе бригады, работая вместе?
б) Через первую трубу бассейн наполняется за 16 мин, а через вторую трубу — за 48 мин. За сколько минут наполнится бассейн, если открыть обе трубы?
в) Легковая машина проезжает расстояние между двумя городами за 42 мин, а грузовая — за 56 мин. Однажды эти машины выехали одновременно навстречу друг другу из этих городов. Через сколько минут они встретились?

**888.** Через первую трубу бассейн наполняется за $a$ мин, через вторую трубу — за $b$ мин. За сколько минут наполнится бассейн через обе эти трубы?
Решите задачу в общем виде, получите ответ для указанных значений $a$ и $b$:
а) $a = 12$, $b = 36$; б) $a = 14$, $b = 35$.

**889.** Через первую трубу бассейн наполняется за $a$ ч, через вторую трубу — за $b$ ч, через третью трубу — за $c$ ч. За сколько часов бассейн наполнится через три трубы при их совместной работе, если:
а) $a = 21$, $b = 24$, $c = 28$; б) $a = 12$, $b = 20$, $c = 30$?

**890.** Бак наполняют через три трубы: через первую трубу за $a$ ч, через вторую трубу за $c$ ч, а через все три трубы за $x$ ч. За сколько часов бак наполнится через одну третью трубу, если:
а) $a = 12$, $c = 28$, $x = 6$; б) $a = 9$, $c = 30$, $x = 5$?

**891.** Некоторое расстояние автомобиль преодолел в гору со скоростью 42 км/ч, а с горы — со скоростью 56 км/ч. Какова средняя скорость движения автомобиля на всём участке пути?

**Указание.** Здесь требуется узнать, с какой постоянной скоростью можно проехать тот же путь за то же время.

**892.** Некоторое расстояние автомобиль преодолевает в гору со скоростью $a$ км/ч, а с горы — со скоростью $b$ км/ч. Какова средняя скорость движения автомобиля на всём участке пути, если: а) $a = 40$, $b = 60$; б) $a = 30$, $b = 45$?

**893.** Лодка от $A$ до $B$ плывёт по течению $a$ ч, а от $B$ до $A$ (против течения) — $b$ ч. Сколько часов будет плыть бревно от $A$ до $B$, если: а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 2$, $b = 3$?

**894.** а) Сейчас 9 ч утра. Какую часть суток составляет оставшаяся часть от прошедшей и какая часть суток осталась?

б) Вода, обращаясь в лёд, увеличивается на $\frac{1}{11}$ часть своего объёма. Сколько кубических сантиметров воды получится при переходе в воду куска льда объёмом 24 см$^3$? Какую часть своего объёма теряет лёд при таянии?

в) Число 20 разделите на две части так, чтобы одна была в 4 раза больше другой.

г) Число 120 разделите на три части в отношении 2 : 3 : 15.

д) Число 25 разделите на части пропорционально числам 2, 3, 5.

**895.** Трое рабочих выполняют некоторую работу за 12 смен. За сколько смен выполнят эту же работу двое рабочих, если производительность труда всех рабочих одинакова?

**896.** а) Первое число в четыре раза больше второго. Если второе число увеличить в шесть раз, то оно станет больше первого на 4. Найдите числа.

б) Первое число в три раза меньше второго. Если первое число умножить на 8, а второе — на 2, то первое число станет на 8 больше второго. Найдите числа.

**897.** а) Первое число в четыре раза меньше второго. Если первое число увеличить в шесть раз, то полученное число будет на 6 больше второго числа. Найдите эти числа.

б) Первое число на 3 больше второго. Если первое число умножить на 3, то полученное число будет на 1 больше второго числа, умноженного на 5. Найдите числа.

**898.** а) Первое число на 8 меньше второго. Если первое число увеличить на 17, то полученное число будет равно второму числу, умноженному на 2. Найдите числа.

б) Даны два числа. Если первое умножить на 3, то полученное число будет на 16 больше второго; если второе умножить на 2, то полученное число будет на 8 больше первого. Найдите числа.

**899.** а) Выполняя плановое задание, бригада рабочих должна была за 14 дней изготовить некоторое количество деталей. Увеличив производительность труда, бригада изготовляла в день на 5 деталей больше и выполнила плановое задание за 12 дней. Сколько деталей нужно было изготовить по плану?

б) Выполняя плановое задание, бригада рабочих должна была за 13 дней изготовить некоторое количество деталей. Увеличив производительность труда, бригада изготовляла в день на 50 деталей больше, чем намечалось по плану. Поэтому уже за 12 дней был не только выполнен план, но изготовлено на 100 деталей больше плана. Сколько деталей изготовила бригада?

в) Заказ по выпуску машин должен быть выполнен по плану за 20 дней. Но завод выпускал ежедневно по 2 машины сверх плана, а поэтому выполнил заказ за 18 дней. Сколько машин должен был выпускать завод ежедневно по плану?

**900.** Составьте и решите две задачи, аналогичные задачам предыдущего номера.

**901.** а) Расстояние между двумя пунктами 20 км. Из них одновременно навстречу друг другу выезжают мотоциклист и велосипедист. Скорость мотоциклиста 50 км/ч, велосипедиста 10 км/ч. На каком расстоянии от начала движения мотоциклиста они встретятся?

б) Расстояние между двумя пунктами 20 км. Из этих пунктов навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Скорость мотоциклиста 40 км/ч, а велосипедиста 20 км/ч. Через какое время они встретятся?

**902.** Составьте задачу, аналогичную предыдущей, и решите её.

**903.** Расстояние между двумя пунктами 40 км. Из одного из них в другой одновременно выезжают автобус и велосипедист. Скорость автобуса 50 км/ч, велосипедиста 10 км/ч. Автобус доехал до населённого пункта, потратил на остановку 6 мин и выехал в обратном направлении с той же скоростью. На каком расстоянии от первого населённого пункта встретятся велосипедист и автобус? Какие допущения необходимо сделать для решения задачи?

**904.** Составьте и решите задачу, аналогичную предыдущей.

**905.** Из одного населённого пункта выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. Спустя 1 ч вслед за ним выехал второй велосипедист со скоростью 20 км/ч. В пункт назначения оба велосипедиста прибыли одновременно. Что можно определить, используя данные условия?

**906.** Два поезда отправляются из одного и того же города друг за другом. Скорость первого 36 км/ч, а второго 48 км/ч. Через сколько часов после своего отправления второй поезд догонит первый, если известно, что первый поезд был отправлен на 2 ч раньше второго? Что необходимо допустить для решения задачи?

**907.** Теплоход прошёл расстояние между двумя пристанями по течению реки за 4 ч, а против течения реки за 5 ч. Определите расстояние между пристанями, если скорость течения реки 2 км/ч.

**908.** **Доказываем.** Докажите, что если все слагаемые суммы увеличить или уменьшить в одно и то же число раз, то сумма соответственно увеличится или уменьшится во столько же раз.

**909.** Как изменится разность, если уменьшаемое и вычитаемое увеличить (или уменьшить) в одно и то же число раз?

**910.** а) Пятизначное число, являющееся точным квадратом, записывается при помощи цифр 0; 1; 2; 2; 2. Найдите это число.
б) Записано несколько чисел. Каждое из них, начиная с третьего, равно сумме двух, предшествующих ему. Известно, что девятое число и десятое число равны 1. Найдите первое и второе числа.

**911.** а) Зарплата сотрудника составляла 10 000 р. Зарплату повысили на несколько процентов, а через некоторое время повысили ещё на столько же процентов. Теперь зарплата сотрудника составляет 14 400 р. На сколько процентов повышали зарплату каждый раз?
б) Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 8000 р., он через два года был продан за 6480 р.

**912.** а) В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, ежемесячно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена магнитофона, если, выставленный на продажу за 4000 р., он через два месяца был продан за 2250 р.
б) Заработная плата служащего, равная 7000 р., повышалась два раза, причём во второй раз процент, на который она была повышена, был в два раза больше, чем в первый. На сколько процентов повышалась заработная плата в первый раз, если после второго повышения она составила 9240 р.?

**913.** Произведение двух последовательных натуральных чисел больше их суммы на 109. Найдите эти числа.

**914.** Найдите периметр прямоугольника, у которого одна сторона на 4 см больше другой и площадь которого равна 60 $см^2$.

**915.** На уборке урожая работали две бригады. За первый день работы первая бригада убрала на 5 га больше, чем вторая. Во второй день первая бригада убрала на 3 га больше, чем в первый день, а вторая бригада — в 2 раза больше, чем в первый день. Какую площадь убрала каждая бригада в первый день, если за два дня работы обе бригады убрали 63 га?

**916.** Сумма квадратов трёх последовательных целых чисел равна 302. Найдите эти числа.

**917.** Первый рабочий может выполнить некоторую работу на 4 ч раньше, чем второй. Вначале они работали вместе 2 ч, после чего оставшуюся работу выполнил один первый рабочий за 1 ч. За какое время может выполнить всю работу второй рабочий?

**918.** Двое рабочих должны выполнить некоторую работу. Вначале 2 ч работал первый, затем присоединился второй, и вместе они работали 1 ч. Оставшуюся после этого работу второй рабочий закончил за 3 ч. За какое время каждый может выполнить всю работу, если первому для выполнения всей работы нужно на 2 ч меньше, чем второму?

**919.** Две бригады грузчиков должны были разгрузить баржу в течение 6 ч. Первая бригада выполнила $\frac{3}{5}$ всей работы, вторая бригада закончила разгрузку. Вся работа была выполнена за 12 ч. Сколько часов требуется каждой бригаде в отдельности для разгрузки баржи?

**920.** Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 ч, а второй — 4 ч, оказалось, что они выполнили $\frac{5}{9}$ всей работы. Если бы они проработали совместно 4 ч, то им осталось бы выполнить $\frac{11}{18}$ всей работы. За сколько часов, работая отдельно, каждый из них может выполнить всю работу?

**921.** *Старинная задача.* На вопрос о возрасте одна дама ответила: «Мой возраст таков, что если его возвести в квадрат или сначала умножить на 53, а затем из результата вычесть 696, то получится одно и то же». Сколько лет даме?

**922.** Брат и сестра собирали малину в двухлитровые бидоны. Брат собирал ягоды быстрее сестры. Через некоторое время он решил ей помочь и поменялся с ней бидонами. Момент для обмена бидонами был выбран удачно — ребята наполнили их ягодами одновременно. Сколько литров ягод они набрали вместе до того, как поменялись бидонами?

**923.** Дед и внук начали одновременно собирать клюкву в одинаковые лукошки. Дед собирает быстрее внука. Когда им надо поменяться лукошками, чтобы оба лукошка наполнились одновременно?

**924.** Брат и сестра собирали малину. Корзина брата вмещала 5 л, а корзина сестры 4 л. Брат собирал ягоды быстрее сестры, поэтому, когда она набрала половину своей корзины, они поменялись корзинами и через некоторое время наполнили их одновременно. Сколько литров ягод собрал брат?

**925.** Брат и сестра собирали малину. Когда сестра собрала $\frac{2}{3}$ своего двухлитрового бидона, трёхлитровый бидон брата был почти полон. Ребята поменялись бидонами и через некоторое время одновременно закончили сбор ягод. Во сколько раз брат работал быстрее сестры?

**926.** Отец и сын принялись косить два соседних луга, площади которых относятся как 8 : 7. Когда отец скосил три четверти большего луга, а сын скосил больше половины меньшего, они присели отдохнуть и подсчитали, что если будут работать с той же производительностью, но поменяются местами, то закончат работу одновременно. Во сколько раз отец косил быстрее сына?

**927.** Сулико подошла к роднику с двумя кувшинами. Один вмещал 5 л, а другой — 4 л. Вода из родника текла двумя струями — одна сильнее, другая слабее. Сулико поставила одновременно кувшины под струи и, когда набралась половина меньшего кувшина, поменяла кувшины местами. Как это ни удивительно, но кувшины наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды даёт одна струя, чем другая?

**928.** *Старинная задача (Древний Вавилон).* Найти длину шеста, сначала вертикально прислонённого к стене, затем смещённого так, что его верхний конец опустился на 3 локтя, а нижний отступил от стены на 9 локтей.

**929.** *Старинная задача (Древний Вавилон, ок. 1950 г. до н. э.).* Площадь $A$, состоящая из площадей двух квадратов, равна 1000. Сторона одного из квадратов составляет уменьшенные на 10 две трети стороны другого квадрата. Каковы стороны квадратов?

**930.** *Задача Безу.* По контракту работникам причитается 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с них вычитается по 12 франков. Через 30 дней выяснилось, что работникам ничего не причитается. Сколько дней они отработали в течение этих 30 дней?

**931.** Один мастер оклеит комнату обоями за $a$ ч, а другой — за $b$ ч. Если же они будут работать вместе, то производительность работы каждого повысится на $p$ %. За сколько часов они оклеят комнату, работая вместе, если:
а) $a = 6$, $b = 4$, $p = 20$; б) $a = 3$, $b = 7$, $p = 40$?

**932.** Один работник может вырыть колодец за $a$ дней, другой — за $b$ дней. Если же они будут работать вместе, то производительность работы каждого повысится на $p$ % и они выроют колодец за $c$ дней. На сколько процентов повышается производительность труда каждого работника при совместной работе, если:
а) $a = 15$, $b = 10$, $c = 4$; б) $a = 21$, $b = 28$, $c = 8$?

**933.** Поле разделено на 3 участка. За день были вспаханы половина первого участка, $\frac{3}{4}$ второго участка, а третий, составляющий четвёртую часть всего поля, был вспахан полностью. Вспаханные за день площади в 2 раза больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?

**934.** Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахивают за 6 дней, первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз больше вспахивает в день вторая бригада, чем третья?

**935.** Определите высоту дерева, если известно, что длина тени от этого дерева равна 20 м, а длина тени от метрового шеста равна 1,4 м (измерения проведены одновременно).

**936.** Какова длина тени от дерева высотой 12 м, если от двухметрового шеста отбрасывается тень длиной 1,5 м?

**937.** а) В формуле равномерного прямолинейного движения выразите время через расстояние и скорость. Как изменится время движения, если расстояние останется прежним, а скорость увеличится в 3 раза, в 5 раз; уменьшится в 2 раза, в 1,5 раза?
б) Рабочему необходимо изготовить 200 деталей. Запишите формулу зависимости времени выполнения заказа от производительности труда (количество деталей, изготовляемых в единицу времени). Как изменится время выполнения работы, если производительность труда увеличится в 1,2 раза, в 1,4 раза, в 2 раза?

**938.** а) На изготовление одной детали рабочие стали затрачивать 8 мин вместо 20 мин. Сколько деталей изготовит бригада за смену, если раньше она выпускала 120 деталей? На сколько процентов повысилась производительность труда?

б) Завод выполнил годовой план к 1 декабря. На сколько процентов завод выполнит годовой план к 1 января, если будет работать с той же эффективностью?

в) Внедрение рационализаторского предложения позволяет понизить норму времени на изготовление одной детали с 12 мин до 10 мин. Во сколько раз при этом повысится норма выработки? На сколько процентов будет выполняться план при сохранении нормы выработки?

г) Два шкива соединены ремнём. Окружность первого шкива 60 см, а второго — 40 см. Сколько оборотов в минуту сделает второй шкив, если первый делает 240 оборотов в минуту?

**939.** Земной шар совершает полный оборот вокруг своей оси (360°) за 24 ч.

а) На сколько градусов различается долгота двух городов, если солнечное время различается на 8 ч?

б) На сколько часов различается солнечное время двух городов, если долгота различается на 60°?

**940.** Санкт-Петербург расположен на 30° восточной долготы, а Магадан на 150° восточной долготы. Определите солнечное время в Магадане, когда в Санкт-Петербурге полдень.

**941.** В баке 6 л воды. Каждую минуту в него через кран вливают 4,5 л воды.

а) Запишите зависимость между числом литров воды в баке ($y$) и временем ($x$), в течение которого открыт кран.

б) Начертите график изменения $y$, давая $x$ значения от 0 до 8 через 2.

в) Найдите по графику, сколько воды будет в баке через 1 мин, через 5 мин.

г) Через сколько минут в баке будет 40 л воды? (Округлите с точностью до 1 мин.)

д) Через сколько минут бак будет заполнен, если он вмещает 100 л воды? (Округлите с точностью до 1 мин.)

**942.** В одной цистерне 32 т бензина, а в другой — 36 т. Из первой выкачивают каждую минуту по 200 кг, а из второй — по 300 кг бензина. Через какое время в обеих цистернах станет бензина поровну?

**943.** Из 18 дм проволоки получилось 15 колец для ключей. Сколько колец получится из 24 дм проволоки?

**944.** Сколько килограммов хлеба можно получить из 850 кг пшеницы, если из 10 кг зерна получается 8 кг пшеничной муки, а из 6 кг муки — 9 кг хлеба?

**945.** Из 32 кг молока получается 4 кг сливок, из 35 кг сливок получается 7 кг сливочного масла, а из 16 кг сливочного масла получается 12 кг топлёного масла. Сколько килограммов топлёного масла можно получить из 3000 кг молока?

**946.** Выпечено 400 кг хлеба. При остывании хлеб потерял 2,75 % своей массы. На сколько килограммов уменьшилась масса хлеба?

**947.** Смешали 4 л горячей воды и 3 л воды, температура которой 10 °С. Температура смеси оказалась равной 40 °С. Найдите температуру горячей воды.

**948.** Вычислите в процентах с точностью до 0,1 выполнение плана реализации продукции в каждом квартале на основе следующих данных:

| Квартал | Реализация в тыс. р. | | % выполнения |
|---|---|---|---|
| | план | фактически | |
| I | 1200 | 1280 | |
| II | 1400 | 1450 | |
| III | 1300 | 1280 | |
| IV | 1400 | 1650 | |

**949.** Два цеха должны были выпустить по плану 180 станков в год. Первый цех выполнил план на 112 %, а второй — на 110 %, и поэтому оба цеха выпустили за год 200 станков. Сколько станков сверх плана выпустил каждый цех?

**950.** Какой должна быть температура 20 л воды, чтобы при смешении её с 10 л воды, температура которой 20 °С, получить воду с температурой не менее 35 °С и не более 45 °С?

**951.** Два мальчика качаются на доске, перекинутой через бревно. Длина доски 5,5 м. В каком месте должна находиться точка опоры доски, чтобы мальчики находились в равновесии, если масса одного 48 кг, а другого 40 кг?

**952.** К концам прямолинейного рычага привешены два груза; они находятся в равновесии, причём точка опоры рычага отстоит от одного конца рычага на 5 дм, а от другого — на 7 дм. Если больший груз увеличить на 2 кг, а меньший уменьшить на 2 кг, то для сохранения равновесия придётся передвинуть точку опоры на 1 дм. Определите массу каждого груза.

**953.** Скорости двух поездов, пассажирского и товарного, относятся как 5 : 3. Пассажирский поезд вышел со станции на 0,5 ч позже товарного, но прибыл на следующую станцию на 0,5 ч раньше товарного. Найдите скорости поездов, считая их постоянными, если расстояние между станциями равно 75 км.

**954.** а) Если одну из сторон прямоугольника увеличить на 5 м, а вторую — на 4 м, то площадь прямоугольника увеличится на 113 $м^2$. Если же первую сторону увеличить на 4 м, а вторую — на 5 м, то площадь увеличится на 116 $м^2$. Определите длину и ширину прямоугольника.

б) Если длину прямоугольника увеличить на 3 м, а ширину уменьшить на 2 м, то площадь прямоугольника не изменится. Также не изменится площадь прямоугольника, если длину его уменьшить на 2 м, а ширину увеличить на 3 м. Определите длину и ширину прямоугольника.

**955.** Двое рабочих за смену изготовили 72 детали. Если бы первый рабочий увеличил производительность труда на 15 %, а второй — на 25 %, то за смену они изготовили бы вместе 86 деталей. Сколько деталей изготовил каждый из рабочих за смену?

**956.** Между двумя велосипедистами расстояние 50 м. Они выезжают одновременно в одном направлении, и через 50 с второй велосипедист догоняет первого. Если бы первый велосипедист выехал на 5 с раньше второго, то тогда второй бы догнал первого лишь через 75 с после начала движения первого. Сколько метров в секунду проезжает второй велосипедист?

**957.** На расстоянии 6 м от ручья росло дерево высотой 20 м. Буря надломила его так, что вершина коснулась воды у ближнего к дереву берега ручья. На какой высоте надломлено дерево?

**958.** Лестница, длина которой 7,5 м, прислонена к стене так, что её основание находится в 2,5 м от стены. На сколько метров опустится верхний конец лестницы, если основание лестницы отодвинуть ещё на 3,5 м от стены?

**959.** Найдите два числа, сумма квадратов которых 101, а разность квадратов 99. Сколько решений имеет задача?

**960.** Найдите два числа, сумма квадратов которых 145, а разность квадратов 17.

**961.** Разность квадратов двух чисел 1029, а отношение чисел 2 : 5. Найдите эти числа.

**962.** Сумма цифр двузначного числа на 29 меньше произведения цифр и на 72 меньше суммы квадратов цифр. Определите это число.

**963.** Если переставить цифры двузначного числа, то получится число, которое на 18 меньше данного числа. Произведение этих двух чисел в 126 раз больше произведения цифр, которыми они записаны. Определите число.

**964.** Алёша на 3 года старше Бори и на 6 лет старше Вовы. Произведение возрастов Гриши и Бори на 9 больше произведения возрастов Алёши и Вовы. На сколько лет Алёша старше Гриши?

**965.** Алёша на 3 года старше Бори и на 6 лет старше Вовы. Произведение возрастов Гриши и Бори на 20 больше произведения возрастов Алёши и Вовы. Сколько лет Грише?

**966.** Саша сказал: «Моему младшему брату больше семи лет, а сумма квадратов наших возрастов в 20 раз больше моего возраста». Сколько лет Саше?

**967.** Вася возвёл в квадрат число мальчиков и число девочек нашего класса. Сумма полученных чисел оказалась в 25 раз больше числа мальчиков. Сколько мальчиков в нашем классе, если девочек больше десяти, а мальчиков больше, чем девочек?

**968.** Два купца внесли для общего дела по 48 тыс. р.: первый забрал свои деньги (без дохода) через год, а второй — через два года. Как они должны поделить между собой 42 тыс. р. прибыли, полученные на их деньги за эти два года?

**969.** Два компаньона вложили деньги в общее дело. Первый внёс 40 тыс. р., а второй — 60 тыс. р. Через месяц первый забрал свои деньги (без дохода), а ещё через месяц они решили поделить доход, полученный за эти два месяца. Как они должны поделить между собой доход в сумме 17 тыс. р.?

**970.** Некоторое дело приносит стабильный доход. Первый компаньон вложил в него 9 тыс. р., а второй — 2 тыс. р. Первый забрал вложенные деньги (без дохода) через месяц, второй — через два месяца. Только после этого они разделили полученный доход. Каков процент ежемесячной прибыли, если доход первого оказался в 2,5 раза больше дохода второго?

**971.** Из пункта $A$ в пункт $B$, расстояние между которыми 20 км, вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта $B$ в пункт $A$ выехал велосипедист, который встретил пешехода через 50 мин после своего выезда из $B$. Сколько времени потребовалось бы пешеходу для того, чтобы пройти весь путь из $A$ в $B$, если известно, что велосипедист проделал бы тот же путь на 4 ч быстрее пешехода? Какое условие является лишним?

**972.** а) Бак, вмещающий 10 000 л, заполняется бензином двумя насосами, второй из которых вливает в минуту на 10 л меньше, чем первый. За 5 мин бак заполняется на 25 %. Сколько литров бензина вливает каждый насос за 10 мин?

б) Двумя кранами бассейн наполняется за 1 ч 20 мин, а одним краном — за 2 ч. За какое время наполнится бассейн другим краном?

в) Бак наполняется через две трубы за 12 ч. Через сколько часов наполнится бак, если первые два часа были подключены обе трубы, а затем только одна, через которую в единицу времени поступает две трети того количества воды, которое поступает через другую трубу?

г) В бассейн проведены три трубы. Через первую бассейн наполняется за 6 ч, через вторую — за 8 ч, а через третью вся вода из наполненного бассейна выливается за 12 ч. За сколько времени наполнится бассейн водой, если открыть одновременно все три трубы?

**973.** а) Смешали 30-процентный раствор соляной кислоты с 10-процентным и получили 600 г 15-процентного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?
б) В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой до прежнего уровня. Затем снова отлили столько же и опять долили водой до прежнего уровня. Сколько литров жидкости отливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался 25-процентный раствор кислоты?

**974.** *Из трактата «Девять отделов искусства счёта» (Китай).* 5 волов и 2 барана стоят 11 таэлей, а 2 вола и 8 баранов стоят 8 таэлей. Сколько стоят отдельно вол и баран?

**975.** *Задача Евклида (III в. до н. э.).* Мул и осёл по дороге с мешками шагали. Осёл жаловался на свою непомерно тяжёлую ношу. Мул обратился к попутчику с речью: «Если я возьму у тебя один мешок, то моя ноша станет вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты взял у меня один мешок, то наши ноши сравнялись бы». Сколько нёс каждый из них?

**976.** *Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи).* Один говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько денег у каждого?

**977.** *Старинная задача (Китай, I в.).* Имеется 9 слитков золота и 11 слитков серебра, их взвесили, вес как раз совпал. Переложили слиток золота и слиток серебра, золото стало легче на 13 ланов. Спрашивается, каков вес слитка золота и слитка серебра, каждого в отдельности.

**978.** Имеются берёзовые и сосновые дрова. 7 м$^3$ берёзовых и 5 м$^3$ сосновых дров весят 7,44 т, а 9 м$^3$ берёзовых и 10 м$^3$ сосновых дров весят 11,28 т. Сколько весит 1 м$^3$ берёзовых и 1 м$^3$ сосновых дров?

**979.** Проценты содержания (по массе) кислоты в трёх растворах таковы, что квадрат процента второго равен произведению процентов первого и третьего. Если смешать первый, второй и третий растворы в отношении 2 : 3 : 4 (по массе), то получится раствор, содержащий 32 % кислоты. Если же смешать их в отношении 3 : 2 : 1 (по массе), то получится раствор, содержащий 22 % кислоты. Сколько процентов кислоты содержит каждый раствор?

**980.** В один из дней каникул учащиеся класса, кроме нескольких оставшихся дома, отправились погулять. Двенадцать учащихся — треть всех девочек и половина всех мальчиков — пошли в кино, а ещё 13 человек — половина всех девочек и треть всех мальчиков — пошли на выставку. Сколько учащихся этого класса осталось дома?

**981.** *Старинная задача.* Крестьянин хочет купить лошадь и для этого продаёт рожь. Если он продаст 15 ц ржи, то ему не хватит для покупки лошади 80 р., а если он продаст 20 ц ржи, то у него останется 110 р. Сколько стоит лошадь?

**982.** *Старинная задача.* Некий человек покупал масло. Когда он давал деньги за 8 бочек масла, то у него осталось 20 алтын. Когда же стал давать за 9 бочек, то не хватило денег полтора рубля с гривною. Сколько денег было у человека? (1 алтын = = 3 к., 1 гривна = 10 к.)

**983.** Если продать 20 коров, то заготовленного сена хватит на десять дней дольше, если же прикупить 30 коров, то запас сена исчерпается десятью днями раньше. Сколько было коров и на сколько дней заготовлено сена?

**984.** Если продать 20 коров, то заготовленного сена хватит на двадцать дней дольше, если же уменьшить выдачу сена на одну корову в день на 20 %, заменив сено другими кормами, то сена хватит на пятнадцать дней дольше запланированного. Сколько было коров и на сколько дней заготовлено сена?

**985.** *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Три человека хотят двор купить. Первый покупатель говорит второму: дашь мне $\frac{3}{4}$ денег, что имеешь, и я один заплачу цену за двор. Второй говорит третьему: дашь мне $\frac{2}{5}$ из твоих денег, и я один заплачу цену за двор. Третий говорит первому: дашь мне $\frac{1}{3}$ из твоих денег, и я один заплачу цену за двор. А двору цена 100 р. Сколько каждый из покупателей имел денег?

**986.** *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Три человека разговаривали между собой. Первый из них говорит второму: если бы мне взять от твоих денег $\frac{2}{4}$, а от третьего $\frac{3}{5}$, тогда было бы у меня 150 р. Второй говорит третьему: если бы я взял твоих денег $\frac{3}{5}$, а от первого $\frac{5}{7}$, то я тоже имел бы 150 р. Третий говорит первому: если бы я взял от твоих денег $\frac{5}{7}$, а от второго $\frac{2}{4}$, то тоже имел бы 150 р. Спрашивается, сколько каждый из них в то время имел денег.

**987.** Три друга хотели купить книгу за 17 р., но ни у кого не набралось нужной суммы. Первый говорит друзьям: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю книгу». Второй говорит: «Дайте мне по трети своих денег, и я куплю книгу». Третий говорит: «Дайте мне по четверти своих денег, и я куплю книгу». Сколько денег было у каждого?

**988.** *Задача Адама Ризе.* Трое торгуют лошадь за 12 флоринов, но никто в отдельности не располагает такой суммой. Первый говорит двум другим: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю лошадь». Второй говорит первому и третьему: «Дайте мне по одной трети ваших денег, и я приобрету лошадь». Наконец, третий говорит первым двум: «Дайте мне только по четверти ваших денег, и лошадь будет моя». Теперь спрашивается: сколько денег было у каждого?

**989.** *Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона.* Даны три металлических сплава. Один фунт[1] первого сплава содержит 12 унций[2] серебра, 1 унцию меди и 3 унции олова. Фунт второго сплава содержит 1 унцию серебра, 12 унций меди и 3 унции олова. Фунт третьего сплава содержит 14 унций меди, 2 унции олова и вовсе не содержит серебра. Как из этих трёх сплавов нужно составить новый, фунт которого содержал бы 4 унции серебра, 9 унций меди и 3 унции олова?

**990.** *Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона.* Некто покупает 40 мер пшеницы, 24 ячменя и 20 овса за 15 фунтов 12 шиллингов[3]. Затем он производит вторую закупку тех же сортов в 26 мер пшеницы, 30 ячменя и 50 овса за 16 фунтов. Наконец, он делает третью закупку тех же сортов в 24 меры пшеницы, 120 ячменя и 100 овса за 34 фунта. Спрашивается цена меры каждого рода зерновых.

**991.** *Старинная задача (Китай, III в. до н. э.).* Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 мер зерна. Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 меры зерна. Из 1 снопа хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 мер зерна. Спрашивается, сколько зерна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая.

---

[1] 1 фунт = 0,4536 кг (мера веса).

[2] 1 унция = $\frac{1}{16}$ фунта (мера веса).

[3] 1 фунт = 20 шиллингов (мера денег).

**992.** Пешеход вышел из пункта $A$ в пункт $B$. Через 45 мин из пункта $A$ в пункт $B$ выехал велосипедист. Когда велосипедист прибыл в пункт $B$, пешеходу оставалось пройти $\frac{3}{8}$ всего пути. Сколько времени потратил пешеход на весь путь, если известно, что велосипедист догнал пешехода на половине пути из пункта $A$ в пункт $B$, а скорости пешехода и велосипедиста постоянны?

**993.** Пешеход вышел из пункта $A$ в пункт $B$. Через 30 мин навстречу ему из пункта $B$ выехал велосипедист. Когда велосипедист прибыл в пункт $A$, пешеходу оставалось пройти 0,3 всего пути. Сколько времени потратил пешеход на весь путь, если известно, что велосипедист встретил пешехода на половине пути из пункта $A$ в пункт $B$, а скорости пешехода и велосипедиста постоянны?

**994.** Ящик вмещает 12 кг крупы высшего сорта или 16 кг крупы третьего сорта. Если ящик заполнить крупой высшего и третьего сорта так, что их стоимости одинаковы, то в ящике окажется 15 кг смеси на сумму 180 р. Сколько стоит 1 кг крупы третьего сорта?

**995.** Ящик вмещает 16 кг риса или 20 кг пшена. Если ящик заполнить рисом и пшеном так, что их стоимости одинаковы, то содержимое будет иметь массу 18 кг и стоить 240 р. Сколько стоит 1 кг риса?

**996.** Бассейн начали наполнять водой с помощью насоса. После того, как треть бассейна была заполнена, насос проработал ещё минуту и сломался. Оставшуюся часть бассейна заполнил за 10 мин второй насос, имеющий меньшую мощность. Известно, что первая треть бассейна заполнилась на 10 мин быстрее, чем вторая, а вторая — на 10 мин быстрее, чем третья. За сколько минут заполнилась первая треть бассейна?

**997.** Друзья Томаса Эдисона удивлялись, почему калитка перед его домом открывается с трудом. «Калитка отрегулирована так, как надо, — смеясь, отвечал Эдисон, — я сделал от неё привод к насосу, и каждый входящий накачивает в цистерну 20 л воды». Если бы каждый посетитель накачивал на 5 л больше, то для заполнения цистерны понадобилось бы на 12 человек меньше. Какова ёмкость цистерны?

# Задания на исследование

1. *Задача Ариабхаты (476 — ок. 550).* Два лица имеют равные капиталы, причём каждый состоит из известного числа вещей одинаковой стоимости и известного числа монет. Но как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

   **Указание.** Считайте, что у первого лица $a$ вещей и $b$ монет, а у второго лица $c$ вещей и $d$ монет ($a \neq c$ и $b \neq d$).

2. Число 20 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение оказалось наибольшим.

3. Найдите число, которое даёт наименьшую сумму со своим квадратом.

4. Число 18 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма удвоенного первого из них и квадрата второго была наименьшей.

5. Число 16 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма кубов этих слагаемых оказалась наименьшей.

6. Проволока длиной 100 см согнута так, что получился прямоугольник наибольшей возможной площади. Определите его размеры.

7. В понедельник акции компании $A$ подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же число процентов. В результате они стали стоить на 16 % дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На какое число процентов подорожали акции компании $A$ в понедельник?

8. Заработная плата некоторой категории служащих повышалась два раза, причём процент повышения во второй раз был в два раза больше, чем в первый раз. Определите, на сколько процентов повышалась зарплата каждый раз, если до первого повышения зарплата была 1400 р., а после второго повышения составила 1848 р.

9. Два брата купили акции разных компаний на равные суммы. В понедельник акции старшего брата подорожали, а акции младшего брата подешевели на $p$ %. Во вторник акции старшего брата подешевели, а акции младшего брата подорожали на $q$ %. Чьи акции после торгов во вторник стоили дороже, если: а) $p = q$; б) $p > q$?

10. Инвестор купил 171 акцию известной компании по 342 р. за штуку. Через некоторое время разразился финансовый кризис, акции упали в цене и инвестор продал их на $p$ % дешевле, чем купил сам. А когда кризис закончился, инвестор решил вложить все деньги, вырученные от неудачной продажи акций,

в покупку большего числа тех же акций, которые со времени неудачной продажи стали дешевле на $q$ %. Сколько акций купил инвестор во второй раз, если: а) $q = 43$; б) $q = 25$?

**11.** По условиям задания 10 ответьте на вопрос: на какое наименьшее целое число процентов должна вырасти цена акций с момента второй покупки, чтобы акции стоили не меньше той суммы, которую инвестор первоначально потратил на покупку акций, если: а) $p = 22$; б) $p = 16$?

**12.** Сечение туннеля имеет форму прямоугольника, сверху завершённого полукругом (рис. 118). Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга сечение туннеля наибольшее?

**13.** Из пунктов $A$ и $B$ (рис. 119), расстояние между которыми 20 км, вышли одновременно в указанных направлениях два пешехода. Скорость пешехода, вышедшего из пункта $A$, 4 км/ч, а скорость пешехода, вышедшего из пункта $B$, 6 км/ч. Через какое время расстояние между ними станет наименьшим?

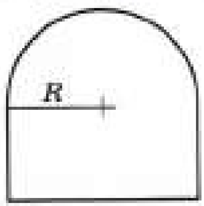



**Рис. 118**


**Рис. 119**

# Задания для самоконтроля

**1.** Расположите в порядке возрастания числа:

0,0902; 0,09; 0,209.

1) 0,209; 0,0902; 0,09 2) 0,09; 0,0902; 0,209
3) 0,09; 0,209; 0,0902 4) 0,0902; 0,09; 0,209

**2.** Какое из чисел $\sqrt{0{,}004}$, $\sqrt{4000}$, $\sqrt{400}$ является рациональным?

1) $\sqrt{0{,}004}$
2) $\sqrt{4000}$
3) $\sqrt{400}$
4) ни одно из этих чисел

**3.** Дневная норма потребления витамина С составляет 60 мг. Один мандарин в среднем содержит 35 мг витамина С. Сколько примерно процентов дневной нормы витамина С получил человек, съевший один мандарин?

1) 170 % 2) 58 %
3) 17 % 4) 0,58 %

**4.** Найдите значение выражения $\frac{a+b}{c}$ при $a = 8{,}4$, $b = -1{,}2$, $c = -4{,}5$.

**5.** Цена килограмма орехов $a$ р. Сколько рублей надо заплатить за 300 г этих орехов?

1) $\frac{a}{300}$ (р.) 2) $300a$ (р.)
3) $0{,}3a$ (р.) 4) $\frac{10a}{3}$ (р.)

**6.** В каком случае выражение преобразовано в тождественно равное?

1) $3(x-y) = 3x - y$ 2) $(3+x)(x-3) = 9 - x^2$
3) $(x-y)^2 = x^2 - y^2$ 4) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

**7.** Решите уравнение $2x^2 - 8 = 0$.

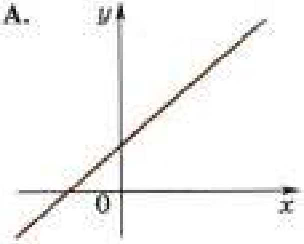
**8.** Упростите выражение $(a^2 + ab)\frac{b}{a^2 - b^2}$ и найдите его значение при $a = \sqrt{7} - 1$, $b = \sqrt{7} + 1$.

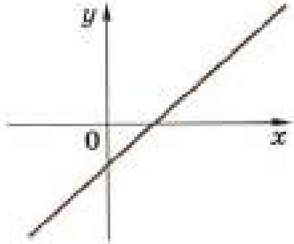
**9.** Укажите два соседних целых числа, между которыми заключено число $3\sqrt{7}$.

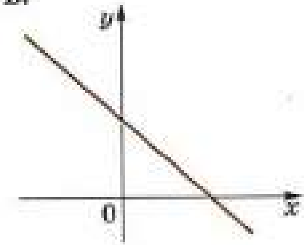
**10.** Какое целое число расположено между числами $2\sqrt{14}$ и $6\sqrt{2}$?

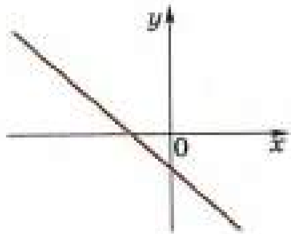
**11.** Даны четыре прямые $y = kx + b$. Для каждой прямой определите соответствующие ей знаки коэффициентов $k$ и $b$.

1) $k > 0,\ b > 0$ 2) $k < 0,\ b > 0$
3) $k > 0,\ b < 0$ 4) $k < 0,\ b < 0$

А.


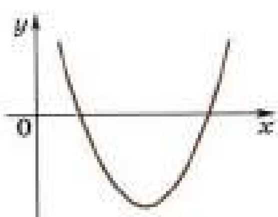
Б.


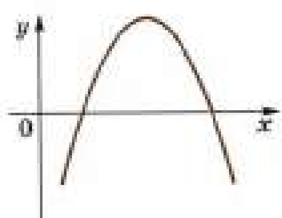
В.


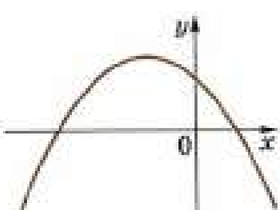
Г.


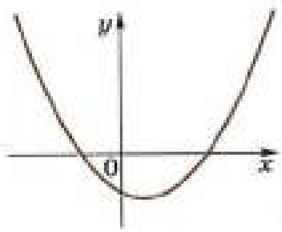
**12.** Даны графики функций $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого графика укажите соответствующие ему знаки коэффициентов $a$ и $c$.

1) $a > 0,\ c > 0$ 2) $a > 0,\ c < 0$
3) $a < 0,\ c > 0$ 4) $a < 0,\ c < 0$

А.


Б.


В.


Г.


**13.** Какая из следующих прямых отсутствует на рисунке 1?
1) $y = 2x + 3$ 2) $y = 2x - 3$
3) $y = -2x + 3$ 4) $y = -2x - 3$

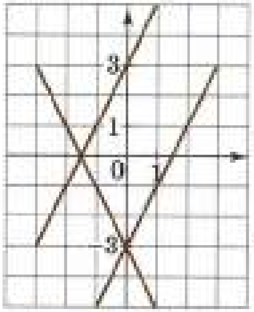



Рис. 1

**14.** Используя графики (рис. 2), решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + 2y = 9. \end{cases}$

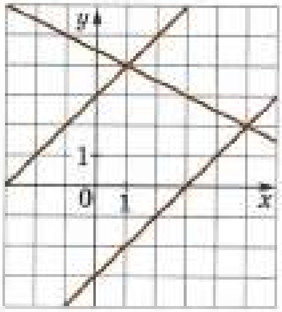



Рис. 2

**15.** Постройте график функции $y = -2x^2 + 4x - 1$. Укажите наибольшее значение функции.

**16.** Период колебания математического маятника $T$ (в секундах) приближённо можно вычислить по формуле $T = 2\sqrt{l}$, где $l$ — длина нити (в метрах). Пользуясь данной формулой, найдите длину нити маятника, период колебаний которого составляет 7 с.

**17.** Выясните, имеет ли корни уравнение
$$\frac{\left(x + \sqrt{6}\right)^2}{6} + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}x}{3} = \frac{4}{3}.$$

**18.** Найдите наименьшее значение выражения
$$2\sqrt{x + y + 1} - 4 + 3(x + 4y - 3)^2.$$
При каких значениях оно достигается?

**19.** Постройте график функции $y = \begin{cases} 2x + 1, \text{ если } x < 0, \\ 1 - 1{,}5x, \text{ если } 0 \leqslant x < 2, \\ x - 4, \text{ если } x \geqslant 2 \end{cases}$

и определите, при каких значениях $c$ прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

**20.** Найдите все значения $k$, при которых прямая $y = kx$ пересекает в двух точках график функции
$$y = \begin{cases} 3x + 2, & x < -1, \\ -1, & -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x - 7, & x > 2. \end{cases}$$

**21.** Решите уравнение $x^3 - 5x = 4x^2$.

**22.** Пристани $A$ и $B$ расположены на реке, скорость течения которой на этом участке равна 4 км/ч. Лодка проходит расстояние от $A$ до $B$ и обратно без остановок со средней скоростью 6 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

# Список дополнительной литературы


1. *Агаханов Н. Х.* Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Просвещение, 2010.
2. *Галкин Е. В.* Задачи с целыми числами: 7—11 кл. / Е. В. Галкин. — М.: Просвещение, 2011.
3. *Гашков С. Б.* Примени математику / С. Б. Гашков, С. Н. Олехник, С. Б. Сергеев. — М.: Наука, 1989.
4. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: VII—VIII кл. / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982.
5. *Дорофеева А. В.* Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2007.
6. *Игнатьев Е. И.* В царстве смекалки / Е. И. Игнатьев. — М.: Наука, 1979.
7. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. — М.: Наука, 1991.
8. *Нестеренко Ю. В.* Задачи на смекалку / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. — М.: Дрофа, 2006.
9. *Нестеренко Ю. В.* Лучшие задачи на смекалку / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. — М.: АСТ-ПРЕСС, 1999.
10. *Олехник С. Н.* Старинные занимательные задачи / С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов. — М.: Дрофа, 2006.
11. *Перельман Я. И.* Живая математика / Я. И. Перельман. — М.: Наука, 1978.
12. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ; Астрель, 2002.
13. *Пичурин Л. Ф.* За страницами учебника алгебры / Л. Ф. Пичурин. — М.: Просвещение, 1999.
14. *Симонов Р. А.* Кирик-Новгородец — учёный XII века / Р. А. Симонов. — М.: Наука, 1980.
15. *Спивак А. В.* Тысяча и одна задача по математике: кн. для учащихся 5—7 кл. / А. В. Спивак. — М.: Просвещение, 2010.
16. *Чистяков В. Д.* Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями / В. Д. Чистяков. — Минск: Изд-во Мин-ва высшего, средн. спец. и проф. обр., 1962.
17. *Чулков П. В.* Арифметические задачи. — М.: МЦНМО, 2009.
18. *Шевкин А. В.* Текстовые задачи по математике. 7—11 классы. — М.: Илекса, 2011.

19. *Шевкин А. В.* Школьная математическая олимпиада: Задачи и решения. Выпуск 1. — М.: Илекса, 2008.

20. *Шевкин А. В.* Школьная математическая олимпиада: Задачи и решения. Выпуск 2. — М.: Илекса, 2008.

**Интернет-библиотеки**

21. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета: http://lib.mexmat.ru/books/3275

22. Интернет-библиотека сайта Московского центра непрерывного математического образования: http://ilib.mirror1.mccme.ru/

23. Математические этюды: http://etudes.ru/

# Предметный указатель

# Ответы

## § 1

**13.** ж) $(-2)^2 < (-3)^2$; з) $4^2 = (-4)^2$; и) $(-4)^2 > 1^2$. **18.** Самый низкий из высоких выше самого высокого из низких. **21.** а) 3,111; 3,116; 3,119; в) 0,112; 0,119; 0,121. **23.** в) −6; 6; г) −6; −2; 2; 6; д) −1,5; 6,5; е) −5,5; 6,5; ж) 0,5; 1,5; 5,5; 6,5; з) $1\frac{2}{3}$; 3; и) −2; −1. **31.** а) −3, −2, −1, 0, 1; б) −2, −1, 0. **34.** а) [2; 4]; б) (2; 4); в) (2; 4]; г) [2; 4); д) $(5; +\infty)$; е) $[5; +\infty)$; ж) $(-\infty; 0)$; з) $(-\infty; 0]$. **37.** а) [3; 7]; б) (3; 7); в) (5; 6]; г) [5; 6); д) $[7; +\infty)$; е) $(-\infty; 8)$. **56.** а) $y(6) = -23$, $y(-7) = 29$, $y(0{,}5) = -1$, $y\left(\frac{2}{3}\right) = -1\frac{2}{3}$. **57.** а) $y = 2x$; б) $y = x - 2$; в) $y = x + 5$; г) $y = 4x$; д) $y = \frac{1}{7}x$; е) $y = 2x^2$. **62.** а) $y = 5x$; б) $y = 2{,}5x$. **63.** $y(1) = 1$, $y(2) = \frac{1}{2}$, $y(5) = \frac{1}{5}$, $y\left(\frac{1}{3}\right) = 3$. **64.** а) 4.

## § 2

**77.** а) При $x > 0$; б) при $x \geqslant 0$; в) при $x < 0$; г) при $x \leqslant 0$. **90.** а) $y_1 < y_2$; б) $y_1 > y_2$. **94.** а) Нет; б) нет; в) да; г) да. **102.** а) Нет; б) да; в) да. **103.** а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0)$. **110.** а) $y(1) > y(2)$; б) $y(2) > y(3)$; в) $y(1) > y(5)$. **117.** в) $x = \frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{5}$; $x = -\frac{1}{2}$. **118.** а) $y > 0$; $y < 0$; $0 < y < \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3} < y < 0$; б) $y > 1$; $-1 < y < -\frac{1}{3}$.

## § 3

**132.** а) 3; б) 9; в) 5. **142.** а) 3 и 4. **143.** а) 1; б) 4; в) 4; г) 1; д) 0,2; е) нет корней. **145.** в) 1; г) 5. **146.** а) При $x \geqslant 0$; б) при любых $x$; в) при $x \leqslant 0$; г) при $x = 0$. **147.** а) $a$; б) $-b$; в) 0; г) $1 - n$; д) $x + 1$; е) $m - 2$; ж) $3a + 1$; з) $-p + 4$. **148.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $1\frac{1}{5}$; г) $2\frac{1}{3}$. **149.** а) 4; б) 9; в) 8; г) 27; д) 16; е) 81; ж) $a^2$; з) $|m^3|$. **150.** а) $|x + 1|$; в) $|1 - m|$. **154.** а) $a^2$; б) $x\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$; д) $|ab|$; е) $2|mn|$; ж) $x^2|y|$; к) $4|y|\sqrt{xy}$, $xy \geqslant 0$; м) $11m^2n|k|\sqrt{n}$, $n \geqslant 0$. **157.** а) $\sqrt{8}$; б) $-\sqrt{18}$; д) $\sqrt{4a^2}$; ж) $-\sqrt{24x^2}$. **158.** ж) $\frac{x\sqrt{x}}{3}$, $x \geqslant 0$; з) $\frac{\sqrt{7a}}{4|b|}$, $a \geqslant 0$; и) $\frac{1}{2} \cdot \left|\frac{mn}{a}\right| \cdot \sqrt{\frac{3m}{b}}$, $\frac{m}{b} \geqslant 0$. **160.** а) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

**161.** а) $\frac{\sqrt{30}}{3}$. **162.** а) $\approx 0{,}816$. **168.** а) $\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)$; д) $\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$; ж) $a\left(\sqrt{a}+2\right)$; з) $mn\left(3-\sqrt{m}\right)$, если $n \geq 0$; $mn\left(3+\sqrt{m}\right)$, если $n<0$. **169.** а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{2}+1$; в) $1+\sqrt{5}$; г) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; д) $1+\sqrt{x}$; е) $\frac{\sqrt{m}-1}{2}$. **170.** а) $a+2\sqrt{ab}+b$. **171.** а) $\sqrt{2}+1$; б) $\sqrt{3}+1$; в) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; г) $2+\sqrt{3}$. **172.** а) 2; б) −2; в) 3; г) 3; д) 3; е) 4. **174.** а) 13; б) 3; в) 10; г) 9,2. **186.** а) 13; б) 16; в) 19; г) 20. **187.** а) 4,8; б) 5,6; в) 6,7; г) 7,3.

## § 4

**202.** а) 1; б) 1; в) 49; г) 49; д) −4; е) 0; ж) 0; з) 1; и) −4. **203.** в) $(x-4)^2+1$; г) $(x+2)^2$; д) $(x+2{,}5)^2-12{,}25$; е) $(x-1{,}5)^2-0{,}25$; ж) $2\left((x-2)^2-0{,}5\right)$; з) $-4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)$; и) $3\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right)$; к) $3\left((x-1)^2-\frac{2}{3}\right)$. **207.** а) $2(x-1{,}5)(x-1)$; б) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)$. **208.** а) $(x+5)(x+3)$; б) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. **225.** а) 0; 4; б) 0; −6; в) 0; $-\frac{1}{3}$. **226.** б) −3; 3; в) −5; 5; г) −4; 4; д) −7; 7; е) нет корней. **227.** а) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; в) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; г) $-5\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **228.** а) 0; 6; б) 0; $\frac{4}{9}$; в) 0; $-1\frac{16}{19}$; г) 0; $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **231.** а) 0; б) 0; в) 0; 4; г) 0; $10\frac{1}{3}$; д) 0; −7. **232.** а) 0; 2; б) 0; −4; в) −2; 2; г) −4; 4; д) $-\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$. **235.** а) $-\frac{n}{m}$ и $\frac{n}{m}$, если $m \neq 0$ и $n \neq 0$; нет корней, если $m = 0$ и $n \neq 0$; $x$ — любое число, если $m = n = 0$; 0, если $m \neq 0$ и $n = 0$; б) нет корней, если $m = 0$; $-\frac{2}{m}$ и $\frac{2}{m}$, если $m \neq 0$; в) $-\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{m}$, если $m \neq 0$; г) 0, если $m = 0$; $-\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n}$, если $m \neq 0$. **240.** а) 2; 4; б) −2; −3; в) −1; 2; г) −3; 2; д) нет корней; е) −2; ж) $\frac{-4-\sqrt{61}}{5}$; $\frac{-4+\sqrt{61}}{5}$; з) 0,5; 1,5; и) $-\frac{1}{3}$; 2; к) $\frac{1}{5}$; 1. **241.** а) $-\frac{1}{2}$; 1; б) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; в) $-2\frac{2}{3}$; 3; г) $-7\frac{1}{7}$; 7; д) $\frac{1}{2}$; 2; е) $\frac{1}{5}$; 5. **242.** а) −1; 2,5; б) 6; 8; в) $-6\frac{5}{7}$; 7; г) $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$; д) −0,5; 9;

е) $\frac{-13-\sqrt{253}}{14}$; $\frac{-13+\sqrt{253}}{14}$; ж) $-\frac{2}{3}$; $3\frac{1}{3}$; з) $-1{,}5$; $2{,}5$. **243.** а) $-4$; 5; б) $-2{,}5$; 2; в) $\frac{1}{3}$; 8; г) $-1$; 2; д) $-\frac{5}{6}$; 5; е) нет корней; ж) 2,5; 6; з) $-1$; 8. **246.** а) $-\frac{2}{3}$; 2; б) $2-\sqrt{14}$; $2+\sqrt{14}$; в) нет корней; г) $-1{,}5$; д) $-2$; $\frac{11}{16}$; е) $\frac{1-\sqrt{73}}{36}$; $\frac{1+\sqrt{73}}{36}$; ж) $\frac{1-\sqrt{29}}{14}$; $\frac{1+\sqrt{29}}{14}$; з) $-1$; $\frac{3}{14}$. **248.** а) При $m=-2\sqrt{3}$, $m=2\sqrt{3}$; б) ни при каких $m$; в) при $m=\frac{1}{3}$; г) при $m=0$, $m=-4$. **249.** а) $\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}$; $\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}$; б) $2-2\sqrt{1-a}$; $2+2\sqrt{1-a}$. **250.** а) При $a<1$; б) при $a=1$; в) при $a>1$. **251.** а) 0, если $a=0$; $a$; $2a$, если $a\neq 0$; б) 0,5, если $a=0$; $\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}$; $\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}$, если $a\neq 0$ и $a<1$; 1, если $a=1$; нет корней, если $a>1$. **252.** а) 0; 1; 4; 5; б) $-1$; 1; 3; 5; в) $-1$; 4,5; 11; г) $-1$; 3; 5,5. **253.** а) $-1$; 3; б) 3; в) $-0{,}5$; г) нет корней. **254.** а) $-4$; 1; б) $-1$; 5; в) 3; г) $-3$; $-2$. **258.** а) 2; б) нет корней; в) 1; г) $-3$; $-1$; д) $-12$; $-4$; е) $-2$; 11; ж) нет корней; з) нет корней. **259.** д) $-2$; 1; е) $-2$; 3; ж) $-11$; $-2$; з) $-11$; $-6$. **264.** а) Нет корней; б) нет корней; в) $x_1+x_2=-3$; $x_1x_2=-2$; г) $x_1+x_2=3$; $x_1x_2=2$; д) $x_1+x_2=2$; $x_1x_2=1$; е) $x_1+x_2=-4$; $x_1x_2=4$. **277.** а) $-3$; б) $-1$; в) 9; г) 11; д) $-36$; е) 13. **280.** а) 3 + 7. **281.** а) 10 и 11; б) 14 и 15. **282.** а) 4 и 11; б) 16 и 28. **283.** а) 7 и 13; б) $-5$ и 3. **284.** а) 35 или 53; б) 51. **285.** а) 160; б) 60 м$^2$; 4 и 15 м; в) да; да; нет; г) в пятиугольнике. **286.** а) 31 выпускник; б) 7 человек. **287.** а) 28 м; б) 5 и 5 см. **288.** На 20%, на 30%. **289.** На 5%, на 4%.

## § 5

**293.** д) Нет; е) да. **297.** а) $-\sqrt{2}$; $-1$; 1; $\sqrt{2}$; б) $-3$; $-1$, 1; 3; в) $-2$; $-1$; 1; 2; г) $-5$; $-1$; 1; 5; д) $-4$; $-2$; 2; 4; е) нет корней; ж) $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; з) $-2{,}5$; $-2$; 2; 2,5; и) $-1$; $-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 1; к) $-\sqrt{0{,}6}$; $-\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{0{,}6}$. **298.** а) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; б) $-4$; 4; в) $-4$; 4; г) $-5$; 5; д) $-1$; 1; е) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; ж) $-\sqrt{3{,}5}$; $\sqrt{3{,}5}$; з) $-\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{1{,}5}$. **299.** а) Нет корней; б) $-\sqrt{15}$; $\sqrt{15}$; в) нет корней; д) $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$; $-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$; $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$; $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$; е) $-\sqrt{15+3\sqrt{21}}$; $-\sqrt{15-3\sqrt{21}}$; $\sqrt{15-3\sqrt{21}}$; $\sqrt{15+3\sqrt{21}}$. **304.** а) $-3$; $-2$; 0; б) 0; 1; 3;

в) $-1$; 0; 3; г) $-5$; 0; 2. **305**. д) $-2$; $-1$; 1,5; е) $\frac{2}{3}$; 2; 3; ж) $-3$; $-2$; з) 0; 3. **312**. а) 1; б) $-2$; в) нет корней; г) нет корней; д) $-2$. **313**. а) 2; б) $-4$; в) нет корней. **314**. а) $-1$; 0; 5; б) $-6$; 0; 3; в) 2; г) $-1$; д) нет корней. **317**. а) Да; б) да; в) да; г) нет. **318**. а) $\frac{1}{3}$; б) $-1$; в) 1; г) 10; д) $-3$; 3; е) $-4$; 5; ж) $-3$; 3; з) $-5$; 5; и) нет корней. **319**. а) $-1$; б) $\frac{16}{17}$; в) 0,5; г) 0,2. **320**. а) $-3$; б) 0; в) 0; г) $-2$. **321**. а) 2,5; б) 1; в) 1; г) 2. **322**. а) 1,25; 2; б) $-6$; 4; в) нет корней; г) 1. **323**. а) $-16$; 8; б) $-1,5$; в) $-1-\sqrt{6}$; $-1+\sqrt{6}$; г) 1; д) 7; е) $16\frac{1}{3}$; ж) нет корней. **324**. а) 0; $39\frac{40}{79}$; 79; б) 0; $49\frac{50}{99}$; 99. **325**. а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{7}{9}$. **326**. а) $\frac{6}{7}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{3}{5}$. **327**. а) 10 км/ч; б) 40 мин. **328**. 60 и 40 км/ч. **329**. а) 10 км/ч; б) 4 км/ч. **330**. а) 48 и 40 деталей; б) 8 и 6 деталей. **331**. а) 40 и 30 страниц; б) 2,5 и 3,5 м. **332**. а) 25 и 20 ц; б) 14 ч; в) 4 и 12 км/ч. **333**. За 10 и 15 ч. **334**. За 64 дня. **335**. 8 км/ч. **336**. За 24 ч. **337**. 60 или 40 пистолей. **338**. 10 р. **340**. е) $-2$; 3; ж) $\frac{45-5\sqrt{69}}{9}$; $\frac{45+5\sqrt{69}}{9}$. **341**. а) $-6$; 1; б) $-7$; 1; в) 2; 7; г) 2; 8. **342**. а) $-6$; 1; $\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$; б) $-8$; 1; $\frac{-7-\sqrt{17}}{2}$; $\frac{-7+\sqrt{17}}{2}$; в) 0; 1; г) $-1$; 0. **343**. а) $-5$; б) 2,5; в) $-1$; г) 1; д) 2; е) $-4$. **345**. а) $-4$; 2. **347**. а) $-1$; 6; б) $-2$; в) нет корней; г) 1; 2; д) $-2,5$; е) нет корней; ж) 4; з) 2; и) 8; к) нет корней. **348**. а) 1; б) 2; в) 3; 5; г) 4; 6; д) 1,5; е) $-0,5$; ж) 2; и) 3; 6; 7.

## Дополнения к главе 2

**357**. а) $7-2i$; б) $3+i$; в) $-18-38i$; г) $11,9+4,3i$. **358**. а) $-i$; $i$; д) $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

## § 6

**363**. а) 2; б) 5. **369**. а) (0; 0), (1; 7); б) (0; 0), (1; $-3$). **372**. а) $y=2x$; б) $y=0,5x$. **373**. а) Да; б) нет. **375**. а) Да; б) да. **376**. а) 8; б) $1\frac{1}{9}$; в) $\frac{2}{3}$. **377**. а) $y=\frac{4}{3}x$; б) $y=-\frac{1}{8}x$; е) $y=1,5x$. **389**. а) $y=4x+8$; б) $y=3x-1$. **399**. а) $-1$; б) $-\frac{1}{6}$. **400**. а) 1; б) 0,5. **401**. $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$. **406**. а) $s=4t+5$; б) $s=6t+2$. **411**. а) Первая точка двигалась в положительном направлении, вторая — в отрицательном; б) в момент $t=0$; в) в момент $t=4$;

г) 0,5 и −1 м/с; д) $s = 0{,}5t$; $s = -t + 6$. **417.** а) 7; б) −12; в) 7; г) −8. **418.** а) 0; в) 0,2; г) 0,8. **421.** а) $x$ — любое число; б) $x$ — любое целое число; в) −1,5; 2,5. **422.** а) $x = -2{,}5$; $y = 3{,}87$. **423.** 52,8.

## § 7

**428.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **439.** а) 12; б) 2 или −2; в) 8. **452.** а) −1 или 1; б) −0,008. **456.** а) 5; б) −8; в) 3. **457.** а) (−1; 0); б) (−9; 0). **458.** а) $x = 12$; б) $x = -7$. **463.** а) $y = 0{,}5(x - 5)^2$; б) $y = 5(x + 4)^2$. **464.** а) $y = 2(x + 8)^2$. **465.** а) Точки $A$ и $C$ принадлежат графику функции, точка $B$ нет. **466.** а) −720; б) 7 или 5. **469.** а) $y = x^2 + 5$; в) $y = 0{,}5x^2 + 3$. **472.** а) $y = 2(x - 5)^2 - 1$. **480.** а) −24; б) −13; в) 4; г) 0. **481.** а) 12; б) 11; в) 13; г) 10.

## § 8

**484.** г) Да, $k = \frac{3}{5}$; д) да, $k = -\frac{5}{2}$; е) нет. **487.** а) 6; б) −12; в) −24; г) 4. **493.** а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = 4$. **494.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **495.** а) Да; б) да; в) да; г) да. **496.** а) $a = \frac{60}{b}$; б) $t = \frac{12}{v}$. **500.** а) $k = -2$; б) $k = 2$; в) $k = -1$. **503.** а) −5; б) −5; в) 42. **504.** а) −3; б) $\frac{1}{2}$.

## Дополнения к главе 3

**515.** а) $y = x + 1$; б) $y = -2x + 10$. **516.** а) $y = -x + 7$; б) $y = 2x - 4{,}5$. **518.** а) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$, окружность не проходит через начало координат.

## § 9

**525.** а) Да; б) нет. **527.** а) Да; б) да. **532.** а) Да; б) нет. **533.** а) Нет; б) да. **534.** а) Нет; б) да. **535.** а) Нет; б) нет. **538.** а) (−2; 4); (2; 4); б) (24; 5); (24; −5); в) (5; −3); (5; 3); г) (−3; 5); (3; 5). **539.** а) (−5; 8); (8; −5); б) (4; 3); (3; 4); в) (7; −4); (−4; 7); г) (−3; −5); (−5; −3); д) (−3; 5); (−5; 3); е) (−2; −4); (4; 2); ж) (−3,5; 3,75); (4; 0); з) $\left(\frac{5}{9}; -\frac{2}{3}\right)$; (0; 1); и) (7; −2); (11; −4). **540.** а) (−5; −4); (4; 5); б) (−2; −3); (3; 2); в) (2; −1); г) (3; 1); д) (−2,75; −3,25); е) $\left(-1\frac{2}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$. **541.** а) $(x; -x)$, $x \in \boldsymbol{R}$; б) $(x; x)$, $x \in \boldsymbol{R}$; в) (5,1; −4,9); г) (−9,7; −10,3). **542.** а) (1; 6); (6; 1); б) (1; 5); (−13; 19); в) (1; 2); (0,5; 2,5); г) (−6; 18); (9; 3). **544.** а) (3; 2; 1); б) (−1; −2; 3); в) (2; 1; −1). **546.** а) (3; 4; 1); (1; 2; 3); б) (−1; −2; −3); (−3; 0; −1). **547.** а) (2; 3); (−3; −2); б) (2; 3); (3; 2); ж) (2; 2); з) (1; 4);

(4; 1); и) (6; 3); $\left(14\frac{1}{3}; -5\frac{1}{3}\right)$; к) (3; 8); (4; 1). **548.** в) (3; 2); (–3; –2); г) (5; 1); (1; 5). **549.** а) (2; –6); б) $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$; в) (2; 1); г) (2; 3). **550.** а) (3; 2); б) (18; –3); в) (1; –2); (–1; 2); г) (2; –1); (–2; 1). **551.** в) (2; 1); (–2; –1); $\left(-3\sqrt{21}; \sqrt{21}\right)$; $\left(3\sqrt{21}; -\sqrt{21}\right)$; г) (5; 1); (–5; –1); $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$; $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}; -\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$. **552.** а) 9 и 19; б) –11 и –21; 21 и 11; в) –4 и 7; г) 6 и –5. **554.** а) 3 и –8; –5 и –16; б) 18 и 14; –18 и –14. **555.** а) 64; б) 24. **556.** а) 25; б) 54; в) 34 или 43. **557.** а) За 12 и 24 ч; б) за 10 дней. **558.** а) За 12 и 8 дней; б) за 10 и 12 дней. **559.** а) 50 и 25 деталей; б) 10 и 15 дней. **560.** а) 36 и 12 ч; б) 30 и 20 ч. **561.** а) 120 листов за 15 дней; б) 110 и 132 ч.

## § 10

**576.** а) 0,5; б) 2. **578.** а) $a = -0{,}25$; $b = -5$; б) $a = -1$; $b \neq -2$. **584.** а) (–3; 3); (3; 3); б) (2; 1). **585.** а) Нет решений; б) 2 решения; д) 2 решения. Указание. Преобразуйте второе уравнение к виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. **586.** а) $k = -4$; $k = 2$; б) $k = -2$; $k = 4$. **587.** а) $k = 0$; $k = -2{,}4$; б) $k = -\frac{4}{3}$.

## Дополнения к главе 4

**595.** а) $(5t; 4 - 3t)$, где $t$ — целое число. **597.** а) (3; 2); (3; –2); (–3; 2); (–3; –2); б) (3; 2). **598.** а) (4; –2); (6; –4); (0; –6); (2; –8); в) (3; 3); (1; 1); г) (4; –1); (2; –3). **600.** а) (1; 2); (3; –2); (–1; –2); (–3; 2); в) (3; 3); (1; 3); (2; 4); (2; 2); д) (–2; –1); (2; 1); е) (5; 1); (5; –3); (7; –1); (3; –1); ж) (1; 2); (–1; –2); з) (3; 1); (–3; –1). **601.** а) (–5; 0); (5; 0); (1; 2); (–1; –2); (5; –2); (–5; 2); б) (–5; 0); (5; 0); (3; 1); (–3; –1); (5; –1); (–5; 1); в) (4; 4); (–4; –4); (4; 0); (–4; 0); г) (2; 2); (–2; –2); (4; 0); (–4; 0); д) (4; 72); (2; 44); (8; 104); (–2; 12); е) (–1; 12); (1; 24); (3; 28); (5; 40). **602.** Из 36 деталей. **603.** 15 лет. **604.** 9 привилегированных акций. **605.** Вчера 18 раков, сегодня 16 раков. **608.** а) (8; 12); (12; 8); б) (12; 8); в) (0; 0); (6; 2). **609.** е) (6; 4); (4; 6); з) (3; 7); (7; 3). **611.** в) (6; 4); (4; 6); г) (–15; 25); (8; 2). **612.** а) (36; 64); (64; 36).

## Задания для повторения

**614.** а) 21; б) $\frac{1}{123}$; в) 1; г) $22\frac{5}{8}$. **615.** а) 3; б) 0,25; в) 5,74; г) 2; д) 104; е) 11,3; ж) 64,5; з) 1,225; и) 2,32; к) $11\frac{11}{15}$. **616.** а) $\frac{25}{39}$; б) 0; в) 32;

г) 180. **617.** а) $\frac{1}{6}$; б) $3\frac{67}{150}$; в) 1; г) $1\frac{37}{520}$. **618.** а) 8; б) 3; в) 5,575; г) 0,1. **619.** а) 0,0102; б) 1,2; в) 2; г) 16. **620.** а) $10^{20} > 90^{10}$; б) $0{,}1^{10} > 0{,}3^{20}$. **638.** а) $\sqrt{3} - 1$; б) $5 - \sqrt{5}$; в) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; г) $4 - \sqrt{10}$. **644.** в) $\sqrt{10}$. **645.** в) 42. **647.** а) $\sqrt{3} + 1$; б) $\sqrt{3} - 1$; в) $\sqrt{2} - 1$; д) $\sqrt{13} - 2$; ж) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; и) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$. **661.** а) 3,5; б) 15; в) 4; г) 2,8; д) $2\frac{2}{3}$; е) 1,4; ж) 10; з) $2\frac{2}{11}$; и) $2\frac{10}{13}$. **662.** а) 2,1; б) 16,25; в) 108; г) 10; д) $\frac{7}{12}$; е) 0,5; ж) $\frac{12}{175}$; з) 0,9; и) 2. **682.** ж) $1\frac{5}{9}x^3y^4z^2$; з) $1\frac{7}{8}a^4b^2c^4$. **683.** п) $64a^6b^{30}$; р) $1{,}4641a^8b^{28}c^{44}$. **684.** ж) $27{,}5x^6y^{12}$; з) $-0{,}86a^4b^2$. **694.** ж) $7n(2ax - 3by - 1)$; з) $7y(9x - 12y + 14)$. **702.** а) 0,25; б) 50 000; в) 5000; г) 40 000. **703.** а) При $x \neq -1$; б) при $x \neq 1$. **704.** д) При любых значениях $x$. **708.** а) $\frac{1}{x+2}$; б) $\frac{1}{x-1}$; в) $\frac{1}{x-1}$. **709.** а) $\frac{1}{x-2}$; в) $\frac{x-5}{x-3}$. **710.** а) $\frac{2x-3}{2x+7}$; б) $\frac{3x-1}{2x+9}$. **713.** а) $-\frac{1}{3a+2}$; б) $\frac{x^2+xy+y^2}{2(x^3+y^3)}$; в) $\frac{5}{6(x-1)}$; г) $\frac{ay-bx}{(a-b)xy}$; д) $\frac{2a-9}{a-3}$; е) $\frac{x^2+y^2}{2x}$; ж) $\frac{9x^2-25y^2}{15xy}$; з) $\frac{1}{3y}$. **714.** е) $\frac{x-12}{(x-1)(x+5)}$. **715.** а) 0; б) $\frac{3n-m-p-q}{(m-n)(n-p)(n-q)}$; в) 0; г) $\frac{4xy}{x^2-y^2}$; д) $\frac{4n^4}{m^4-n^4}$. **716.** а) $\frac{1}{1-x}$; б) $-1-a$; в) $\frac{m^2-m+2}{m(m^2-4)}$; г) $\frac{1}{k-1}$; д) $\frac{4}{4-c^2}$; е) $\frac{y}{y^2-1}$; ж) $-1$; з) $-1$. **717.** а) $a$; б) 2; в) $\frac{ab}{a+b}$; г) $\frac{xy}{x-y}$. **720.** а) $\frac{a^2}{a^3+b^3}$; б) 1. **721.** а) 1; б) $\frac{3-c}{c}$. **724.** в) $\frac{3x}{4ay}$; б) $\frac{1}{ab}$. **725.** а) Нет; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) нет. **730.** а) $2\sqrt{a}$; б) $2\sqrt{a}$; в) $5\sqrt{a}$; г) $2\sqrt{b}$. **731.** а) $-4\sqrt{-b}$; б) $-3\sqrt{-b}$; в) $\frac{\sqrt{-b}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{-a}}{2}$. **732.** а) $\sqrt{x} + 5$; б) $\sqrt{x} - 4$; в) $9 - \sqrt{x}$. **733.** а) $11 + \sqrt{-x}$; б) $5 + \sqrt{-x}$; в) $4 - \sqrt{-x}$. **735.** а) 5; б) 5; в) $\frac{a}{a-1}$; г) $\frac{b}{b-1}$. **737.** а) 0; б) 0; в) 1; г) 1. **738.** а) $\sqrt{x} + 3$; б) $\sqrt{x} + 1$; в) $\frac{1}{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}$. **739.** а) 10; б) 10; в) 3; г) 3. **740.** а) 1; б) $-8$; в) 10; г) 1. **741.** а) $-1$; б) 3; в) $-1$; г) 3. **751.** а) 10; б) 7; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{58}$. **752.** а) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$. **783.** а) $a > 0$; $b > 0$; $c = 0$; б) $a < 0$; $b = 0$; $c > 0$; в) $a < 0$; $b < 0$; $c > 0$. **794.** 6 и 6 дм. **795.** 70 см$^2$. **803.** а) $2m - 3n$; б) $2a + 3b$; в) $a$; $-b$; г) $a$; $b$. **813.** При $t = 27$ и $t = -64$. **816.** При $t = -2$

и $t = 3$. **819.** а) 0,5; 0,7; б) $\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$; в) $\frac{5-2\sqrt{31}}{11}$; $\frac{5+2\sqrt{31}}{11}$; г) нет корней; ж) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$; з) нет корней. **820.** а) $-7$; $\frac{3}{7}$; б) $-1{,}5$; $\sqrt{2}$; в) $\frac{4\sqrt{6}-2\sqrt{15}}{3}$; $\frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{15}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$; д) $-\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $-\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$; е) нет корней; ж) $-5\frac{1}{3}$; 0; з) 0; $\frac{6}{11}$. **825.** а) $-\sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}}$; $\sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}}$; б) $-4$; 4; в) $-\sqrt{1+\sqrt{19}}$; $\sqrt{1+\sqrt{19}}$; г) $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$; д) $-\sqrt{\frac{1+\sqrt{57}}{2}}$; $\sqrt{\frac{1+\sqrt{57}}{2}}$. **826.** а) 1; б) $-1$; в) $-2$; $-1$; $-0{,}5$; 1; г) $-1$; д) $-1$; $\frac{1}{3}$; 3; е) $-1$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; ж) $-5$; 2; 5; з) $-4$; $-3$; 4; и) $-3$; $-2$; 3; к) $-2$; 2; 3. **827.** а) $-1$; 0; 3; б) 0; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 5; в) 0; $\frac{1}{3}$; 3; г) 0; $\frac{3}{2}$; 2; д) 5; 9; е) 3; 4; ж) $-1$; 0; з) $-\frac{7}{3}$; $\frac{1}{3}$; и) $\frac{1}{2}$; 1; 2; к) $-1$; $\frac{1}{2}$; 2. **828.** а) 1; 25; б) 4; 25; в) 25; г) 49; д) $-1$; 0; 1; е) 0. **831.** а) 3; б) 8; в) $-2$; г) 7; д) $2-\sqrt{7}$; $2+\sqrt{7}$; е) 4; ж) 6; з) 1. **832.** а) $\frac{27-\sqrt{489}}{20}$; $\frac{27+\sqrt{489}}{20}$; б) $\frac{-5-\sqrt{57}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{57}}{2}$; в) нет корней; г) $-1{,}25$; 5; д) $2\frac{4}{7}$; 7; е) $\frac{-5-\sqrt{61}}{4}$; $\frac{-5+\sqrt{61}}{4}$. **834.** а) (8,5; 4,5); б) (10; 50); в) (1; $-1$); г) ($-1$; $-1$); д) (31,8; 6,6); е) (5; $-2$); ж) $\left(\frac{1}{2}; -1\frac{1}{6}\right)$; з) (0; 5); и) ($-11{,}5$; 14); к) (1; $-1$); л) (0,5; 0); м) нет решений. **836.** а) (10; 12); б) (7; 6); в) (12; 8); г) (21; 12); д) (1; $-2$); е) (2; 1); ж) (17; 13); з) (6; 0); и) (3; 2); к) (7; 5). **852.** а) 36; 44; 63; б) при $a = -1$, 0, 2, 3. **857.** 4356. **858.** 1,6 ч. **860.** а) На 5 %; б) 840 деталей; в) 90 %; ж) 12 т. **861.** г) Нет; д) 100 м. **862.** а) 31 машина; б) 14 г; в) 67,2 г. **863.** а) 4,8 кг; б) 10 кг. **864.** 75 кг. **865.** а) $11\frac{1}{9}$ %; б) $47\frac{1}{17}$ т. **866.** а) На 12,5 %. **867.** а) На $66\frac{2}{3}$ %; б) на 50 %. **868.** а) 1 р.; б) на 12,5 % и на $14\frac{2}{7}$ %. **869.** 28 %. **870.** $p = \frac{m_1p_1 + m_2p_2}{m_1 + m_2}$; а) $p = 26$; б) $p = 34$. **872.** $\frac{(p-p_1)m_1}{p_2-p}$ г; а) 1200 г; б) 270 г. **873.** 13,5 кг. **874.** 1,5 кг. **875.** 100 г. **876.** 64 г. **877.** 150 и 450 г. **878.** $\frac{(p-p_2)m}{p_1-p_2}$ и $\frac{(p_1-p)m}{p_1-p_2}$ г; а) 300 и 150 г; б) 400 и 200 г.

**879.** $\frac{1}{4}$ ведра по 10 гривен и $\frac{3}{4}$ ведра по 6 гривен за ведро. **880.** 1,2 и 2,4 кг. **881.** По 25 г. **887.** а) За 20 дней; б) за 12 мин. **888.** Через $\frac{ab}{a+b}$ мин; а) через 9 мин; б) через 10 мин. **889.** За $\frac{abc}{ab+ac+bc}$ ч; а) за 8 ч; б) за 6 ч. **890.** За $\frac{acx}{ac-ax-cx}$ ч; а) за 21 ч; б) за 18 ч. **892.** $\frac{2ab}{a+b}$ км/ч; а) 48 км/ч; б) 36 км/ч. **893.** $\frac{2ab}{b-a}$ ч; а) 24 ч; б) 12 ч. **894.** а) $\frac{5}{3}$ и $\frac{5}{8}$; б) 22 см$^3$; в) 4 и 16; г) 12; 18; 90; д) 5; 7,5; 12,5. **895.** За 18 смен. **896.** а) 8 и 2; б) 4 и 12. **897.** а) 3 и 12; б) 7 и 4. **898.** а) 1 и 9; б) 8 и 8. **899.** а) 420 деталей; б) 6600 деталей; в) 18 машин. **901.** а) $16\frac{2}{3}$ км; б) через 20 мин.

**903.** $14\frac{1}{6}$ км. **906.** Через 6 ч. **907.** 80 км. **910.** а) 22 201; б) 13 и –8. **913.** 11 и 12. **914.** 32 см. **915.** 15 и 10 га. **916.** –11, –10, –9 или 9, 10, 11. **917.** За 8 ч. **918.** За 6 и 8 ч. **919.** 10 и 15 ч или 12 и 12 ч. **920.** 18 и 24 ч. **921.** 24 года или 29 лет. В старинном руководстве написано: «...так как вопрос касается возраста дамы, то из вежливости нужно перед радикалом поставить нижний знак», т. е. считать, что возраст дамы 24 года. **922.** 2 л. **924.** 6 л. **925.** В 2 раза. **926.** В 1,5 раза. **927.** В 2 раза. **930.** 6 дней. **931.** За $\frac{100ab}{(a+b)(100+p)}$ ч; а) за 2 ч; б) за 1,5 ч. **935.** $14\frac{2}{7}$ м. **936.** 9 м. **939.** а) На 120°; б) на 4 ч. **949.** 12 и 8 станков. **953.** 50 и 30 км/ч. **954.** а) 12 и 9 м; б) 6 и 6 м. **955.** 40 и 32 детали. **956.** 5 м/с. **964.** На 3 года. **965.** 12 лет. **966.** 16 лет. **967.** 16 мальчиков. **968.** 15 и 27 тыс. р. **969.** 4,4 и 12,6 тыс. р. **970.** 25 %. **971.** 5 ч. Лишнее условие «20 км». **972.** а) 2550 и 2450 л; б) за 4 ч; в) за 27 ч; г) за 4,8 ч. **973.** а) 150 и 450 г; б) 6 л. **975.** 7 и 5 мешков. **980.** 5 человек. **983.** Для 120 коров на 50 дней. **987.** 5, 11 и 13 р. **992.** 2 ч. **993.** 1 ч 40 мин. **994.** 7,5 р. **995.** 15 р. **996.** 2 мин. **997.** 1200 л.

## Задания на исследование

**7.** На 40 %. **8.** 10 и 20 %. **10.** а) 300 акций; б) 228 акций. **11.** а) На 29 %; б) на 20 %. **12.** ≈2,5 м. **13.** $2\frac{4}{13}$ ч.

## Задания для самоконтроля

**1.** 2). **2.** 3). **3.** 2). **4.** –1,6. **5.** 3). **6.** 4). **7.** –2; 2. **8.** –3. **9.** 7 и 8. **10.** 8. **11.** А — 1), Б — 3), В — 2), Г — 4). **12.** А — 1), Б — 4), В — 3), Г — 2). **13.** 3). **14.** $x = 5$, $y = 2$. **15.** 1. **16.** 12,25 м. **17.** Корней нет. **18.** –4; при $x = -2\frac{1}{3}$, $y = 1\frac{1}{3}$. **19.** При $c = -2$, $c = 1$. **20.** $k = 1$. **21.** –1; 0; 5. **22.** 8 км/ч.

# Оглавление

## ГЛАВА 4. Системы рациональных уравнений

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

**Никольский** Сергей Михайлович
**Потапов** Михаил Константинович
**Решетников** Николай Николаевич
**Шевкин** Александр Владимирович

**АЛГЕБРА**

**8 класс**

**Учебник для общеобразовательных организаций**

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Г. Войлокова*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, Е. В. Трошко*
Художники *В. А. Андрианов, О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *М. Е. Савельевой*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректоры *И. П. Ткаченко, С. В. Николаева, Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 26.07.13. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 17,52 + 0,52 форз. Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 38014 (л-гк).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат» ОАО «Издательство «Высшая школа». 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7 (4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru