МГУ - ШКОЛЕ

Алгебра

7

$0,(17) = \frac{17}{99}$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

0,1234567891011...

ПРОСВЕЩЕНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ – ШКОЛЕ

ФГОС

Алгебра

7 класс

Учебник для общеобразовательных организаций

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

Москва
«Просвещение»
2013

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/295 от 12.10.12) и Российской академии образования (№ 01-5/7д-247 от 11.10.12)

Условные обозначения:

— задания, предназначенные для устной работы

— задания повышенной трудности

— начало необязательного материала внутри пункта

— конец необязательного материала внутри пункта

Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. организаций /
А45 [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — М. : Просвещение, 2013. — 287 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-027739-6.

Данный учебник является первой частью трёхлетнего курса алгебры для общеобразовательных школ. Новое издание учебника дополнено и переработано. Его математическое содержание позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС, и дать учащимся хорошую подготовку по алгебре в объёме традиционной общеобразовательной программы или программы для классов с углублённым изучением математики.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-027739-6

Дорогие семиклассники!

В этом году вы продолжите изучение математики по учебнику «Алгебра, 7». Слово АЛГЕБРА (аль-джабр) впервые применил в 825 г. среднеазиатский учёный ал-Хорезми в сочинении «Краткая книга об исчислении аль-джабра и аль-мукабалы», где это слово означало операцию переноса вычитаемых из одной части уравнения в другую или буквально «восполнение», «восстановление».

Алгебра, наряду с арифметикой и геометрией, принадлежит к числу старейших разделов математики. Задачи и методы алгебры, отличающие её от других разделов математики, создавались постепенно, начиная с древности. Алгебра возникла под влиянием нужд практики, в результате поисков общих приёмов для решения однотипных арифметических задач. Приёмы эти заключаются обычно в составлении и решении уравнений.

Решение и исследование уравнений оказали большое влияние на развитие первоначального арифметического понятия числа. С введением в науку отрицательных, а затем иррациональных чисел общее исследование свойств этих числовых систем отошло к алгебре. При этом в алгебре сформировались характерные для неё буквенные обозначения, позволившие записать свойства действий над числами в сжатой форме. Преобразование буквенных выражений по определённым правилам дало возможность получать буквенную запись результата действий. Это и составляет аппарат алгебры. Тем самым алгебра, выйдя из арифметики и пользуясь буквенными обозначениями, изучает общие свойства числовых систем и общие методы решения задач при помощи уравнений.

Ещё 4 тысячи лет назад вавилонские учёные записывали уравнения в словесной форме. Первые обозначения неизвестных появились в Древней Греции благодаря учёному Диофанту.

В 1707 г. английский учёный И. Ньютон опубликовал книгу под названием «Универсальная арифметика» (или «Всеобщая арифметика»). В ней встречались обыкновенные арифметические задачи, которые И. Ньютон решал в общем виде — при помощи буквенных выражений. Тем самым он решал не одну задачу с конкретными данными, а целый класс однотипных задач, отличающихся только числовыми значениями величин.

Решение таких и более сложных задач потребовало развития буквенного счисления — правил действий над буквенными выражениями (одночленами, многочленами, алгебраическими дробями), обозначавшими первоначально числа.

Алгебра нужна в повседневной жизни, так как учит общим правилам действий над объектами, которые не обязательно являются числами.

Знания, полученные на уроках алгебры, помогут вам в изучении геометрии, физики и других предметов. Там также требуются умения рассуждать, ставить вопросы, отвечать на них, преобразовывать буквенные выражения, решать задачи в общем виде, а в полученный ответ подставлять числовые данные и затем правильно вычислять.

Весь материал учебника разбит на 3 главы, а каждая глава — на параграфы и пункты, содержащие теоретические сведения и практические упражнения. Новые термины и важные факты выделены в тексте **жирным шрифтом**. Правила и свойства, которые полезно запомнить, даны на цветном фоне или в «рамочке».

Каждая глава имеет дополнения, позволяющие расширить знания, полученные при изучении главы, и научиться решать более сложные задачи. Эти материалы охватывают традиционную программу классов с углублённым изучением математики. В исторических сведениях приведена информация, дополняющая изученное в главе, рассказывающая о развитии математики и об учёных-математиках.

В конце учебника имеется раздел «Задания для повторения», в котором собраны упражнения на вычисления, упрощение буквенных выражений, решение уравнений, а также текстовые задачи. Здесь имеется много исторических задач и заданий из старинных учебников и сборников задач. К некоторым заданиям в учебнике приведены ответы.

Если вы хотите учиться успешно, то с вниманием относитесь к тому, что написано в учебнике и объясняет учитель, к выполнению домашних заданий.

Перед выполнением домашнего задания обязательно прочитайте заданный на дом пункт учебника, вспомните объяснение учителя. Это позволит подготовиться к выполнению заданий. Ответьте на вопросы, идущие после учебного текста, а в случае затруднения найдите ответы в тексте учебника. Объяснение того или иного термина ищите в предметном указателе. Там они выписаны в алфавитном порядке.

Особое внимание уделите решению текстовых задач. В 7 классе они решаются арифметическими способами или с помощью линейных уравнений. Разнообразные способы решения текстовых задач развивают мышление и способности к учению.

Лучшему усвоению изученного поможет использование дидактических материалов, содержащих задания для самостоятельных и контрольных работ.

Желаем вам успехов в изучении алгебры!

Авторы

Глава 1. Действительные числа

При изучении главы 1 вам предстоит привести в систему всё, что вы знаете о числах — натуральных, рациональных, действительных, изучить свойства арифметических действий над ними, научиться применять их для упрощения вычислений. Все эти знания помогут вам лучше освоить преобразования буквенных выражений, которые будут изучаться в следующей главе.

§ 1. Натуральные числа

1.1. Натуральные числа и действия с ними

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... называют **натуральными** или **целыми положительными** числами. Нуль не считают натуральным числом.

Сумма и произведение натуральных чисел являются натуральными числами. Например, $3 + 5 = 8$, $3 \cdot 5 = 15$.

Разность натуральных чисел является натуральным числом только в том случае, если уменьшаемое больше вычитаемого.

Например, $8 - 5 = 3$.

Если уменьшаемое меньше вычитаемого или равно ему, то разность натуральных чисел не является натуральным числом.

Частное двух натуральных чисел также не всегда является натуральным числом. Если при делении одного натурального числа на другое в частном получается натуральное число, то говорят, что **первое число делится на второе нацело**, при этом второе число называют **делителем** первого.

Например, 6 делится на 3 нацело. Говорят также, что 3 — делитель числа 6. Число 7 не делится на 3 нацело. Слово «нацело» в этих предложениях обычно опускают, говорят: 6 делится на 3, а 7 не делится на 3.

Справедливо свойство делимости натуральных чисел:

> **Если m, n и k — натуральные числа и m делится на n, а n делится на k, то m делится на k.**

Например, 510 делится на 51, а 51 делится на 17, следовательно, 510 делится на 17.

Натуральные числа принято обозначать малыми латинскими буквами: a, b, c, ..., p, q, ...

Каждое натуральное число p делится на 1 и само на себя:

$$p : 1 = p, \quad p : p = 1.$$

1. Какие числа называют натуральными? Является ли 0 натуральным числом?

2. Каким числом является сумма натуральных чисел?

3. В каком случае разность натуральных чисел есть натуральное число?

4. Каким числом является произведение натуральных чисел?

5. Всегда ли выполнимо деление натуральных чисел нацело?

6. На какие натуральные числа делится нацело любое натуральное число?

7. Делятся ли нацело на 7 числа: 12, 27, 42, 126?

8. Сформулируйте признак делимости на:
а) 10; б) 5; в) 2; г) 3; д) 9.

9. Делятся ли нацело на 15 числа: 30, 105, 215, 360?

10. Делятся ли нацело на 18 числа: 189, 252, 456, 1998, 1999?

11. Какие из чисел 3124, 3582, 3528, 31 212 делятся на 4?

12. Делятся ли нацело на 45 числа: 234, 900, 954, 5553, 3555?

13. Какие из чисел 5425, 3530, 3550, 31 275 делятся на 25?

Вычислите (14—15):

14. а) $7326 + 359$; б) $5321 - 985$; в) $424 \cdot 27$;
г) $15\,795 : 39$; д) $732 \cdot 254 - 8145 : 45 + 314\,253$.

15. а) $329 \cdot 759 + 329 \cdot 41$; б) $724 \cdot 928 - 724 \cdot 128$;
в) $398 \cdot 801 - 398$; г) $854 \cdot 399 + 854$.

16. Объясните, не выполняя всех вычислений, почему:
а) $357 \cdot 828 + 357 \cdot 936$ делится на 357;
б) $425 \cdot 723 - 315 \cdot 723$ делится на 3; на 5; на 15.

17. Натуральное число n делится на натуральное число p $(p > 1)$. Докажите, что число $n + 1$ не делится на p.

18. Выписали первые 99 натуральных чисел: 1, 2, ..., 99. Запятые стёрли и получили натуральное число.
а) Сколько раз в записи этого числа встречается цифра: 0, 1, 2, 3, ..., 9?
б) Делится ли это число на 9?

19. Произведение первых n $(n \geqslant 2)$ натуральных чисел обозначают $n!$ и читают «эн факториал»: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.
Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
На сколько нулей оканчивается:
а) $10!$; б) $50!$; в) $100!$?

1.2. Степень числа

Для записи произведения числа самого на себя несколько раз применяют сокращённое обозначение.

Произведение четырёх множителей, каждый из которых равен числу 5, называют четвёртой степенью числа 5 и обозначают 5^4, т. е.

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4.$$

При этом число 5 называют основанием степени, а число 4 — показателем степени.

Вообще, ***k*-й степенью числа *p*** называют произведение k множителей, каждый из которых равен p, его обозначают p^k, т. е.

$$p^k = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k \text{ раз}} \ (k > 1).$$

Число p называют **основанием степени**, а число k — **показателем степени**.

Число p в первой степени понимают как само число p, т. е.

$$p^1 = p,$$

например, $5^1 = 5$.

Легко видеть, что верны следующие равенства:

$$2^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 3)^2,$$
$$5^1 \cdot 6^1 = 5 \cdot 6 = (5 \cdot 6)^1.$$

Эти равенства подтверждают справедливость следующего свойства степеней:

1. Произведение степеней с одним и тем же показателем равно степени с тем же показателем и основанием, равным произведению оснований:

$$p^n \cdot q^n = (p \cdot q)^n.$$

Верны также равенства:

$$3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 3^{2+4},$$
$$5 \cdot 5^3 = 5 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 5^{1+3}.$$

Эти равенства подтверждают справедливость следующего свойства степеней:

> **2. Произведение степеней с одним и тем же основанием есть степень с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей этих степеней, т. е.**
> $$p^k \cdot p^m = p^{k+m}.$$

Наконец, рассмотрим равенства:

$$(7^3)^2 = 7^3 \cdot 7^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6 = 7^{3 \cdot 2},$$
$$(2^4)^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12} = 2^{4 \cdot 3}.$$

Эти равенства подтверждают справедливость следующего свойства степеней:

> **3. Степень степени числа равна степени того же числа с показателем, равным произведению показателей этих степеней, т. е.**
> $$(p^m)^n = p^{m \cdot n}.$$

20. Что называют k-й степенью числа p? Назовите показатель и основание степени в записи p^k.

21. Чему равна первая степень числа?

22. Чему равно произведение степеней с одним и тем же показателем? Приведите примеры.

23. Чему равно произведение степеней с одним и тем же основанием? Приведите примеры.

24. Чему равен показатель степени при возведении степени числа в степень? Приведите примеры.

25. Запишите произведение в виде степени, назовите основание и показатель степени:

а) $2 \cdot 2 \cdot 2$; б) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
в) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$; г) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
д) $7 \cdot 7$; е) $8 \cdot 8 \cdot 8$.

26. Вычислите:

а) 2^3; б) 5^2; в) 3^4;
г) 4^3; д) 2^4; е) 99^1.

27. Верно ли равенство:

а) $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3$; б) $7^{10} \cdot 8^{10} = (7 \cdot 8)^{10}$;
в) $(2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$; г) $2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7$?

28. Запишите произведение в виде степени числа 10:

а) $2 \cdot 5$; б) $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$;
в) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; г) $2^6 \cdot 5^6$.

29. На какое наименьшее число надо умножить данное число, чтобы результат можно было записать в виде степени числа 10:

а) 2; б) 5; в) $2 \cdot 5^2$; г) $2^2 \cdot 5$;
д) $2^4 \cdot 5^2$; е) $2^3 \cdot 5^6$; ж) 20; з) 50;
и) 250; к) 80; л) 25; м) 16?

30. Верно ли равенство:

а) $2^3 \cdot 2^5 = 2^8$; б) $5^2 \cdot 5^3 = 5^5$;
в) $2^7 \cdot 2 = 2^8$; г) $3^4 \cdot 3^5 \cdot 3 = 3^{10}$?

31. Запишите произведение в виде степени:

а) $2^4 \cdot 2^3$; б) $3^5 \cdot 3^2$; в) $4^2 \cdot 4^5$;
г) $5^7 \cdot 5$; д) $6 \cdot 6^3$; е) $2^6 \cdot 2^6 \cdot 2$;
ж) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$; з) $4 \cdot 4^5 \cdot 4$; и) $5 \cdot 5^2 \cdot 5^3$.

32. Верно ли равенство:

а) $(2^3)^2 = 2^6$; б) $(3^5)^6 = 3^{30}$; в) $(3^3)^3 = 3^9$; г) $(5^4)^2 = 5^8$?

33. Используя свойство 3 степеней, запишите в виде степени:

а) $(2^2)^3$; б) $(3^4)^2$; в) $(3^7)^2$; г) $(5^3)^4$; д) $(10^3)^5$; е) $(7^2)^4$.

1.3. Простые и составные числа

Простым числом называют натуральное число, которое больше 1 и делится только на 1 и на себя.

Приведём первые 15 простых чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Непростые натуральные числа, большие 1, называют **составными.** Каждое составное число делится на 1, на себя и ещё хотя бы на одно натуральное число.

Приведём составные числа, меньшие 25:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24.

Единица не является ни простым, ни составным числом.

Таким образом, **множество всех натуральных чисел состоит из простых чисел, составных чисел и числа 1.**

Приведём некоторые свойства простых и составных чисел.

Теорема 1

Каждое отличное от единицы натуральное число имеет делитель — простое число.

Доказательство. Каждое натуральное число n ($n > 1$) имеет делители 1 и n.

Если n — простое число, то натуральное число n имеет делитель — простое число n.

Если n — составное число, а d — наименьший не равный 1 его делитель, то d — простое число. Покажем это. Предположим противное, т. е. что d — составное число. Тогда число d имеет делитель, меньший d и отличный от 1, который является также делителем числа n (см. п. 1.1), т. е. d не является наименьшим не равным 1 делителем числа n. Полученное противоречие означает, что d — простое число. Теорема 1 доказана. ●

Все простые числа выписать невозможно, так как их бесконечно много. Любой список простых чисел можно пополнить ещё одним простым числом, отличным от этих простых чисел. Следующую теорему доказал древнегреческий учёный Евклид (III в. до н. э.).

Теорема 2

Простых чисел бесконечно много.

Доказательство. Допустим, что существует наибольшее простое число p. Запишем все простые числа в порядке возрастания:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ p.$$

Составим число:

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1.$$

Так как $n > 1$, то по теореме 1 оно имеет делитель d — простое число. Следовательно, число n делится хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5, 7, ..., p. Но очевидно, что при делении числа n на любое из чисел 2, 3, 5, 7, ..., p получается остаток 1, т. е. число n не делится ни на одно из этих чисел. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно, т. е. не существует наибольшего простого числа. Теорема 2 доказана. ●

34. Какое число называют простым; составным?

35. Является ли 1 простым числом; составным?

36. Какие из чисел являются простыми, какие — составными:
а) 9, 12, 14, 17, 28, 37, 47, 69, 517;
б) 41, 57, 1121, 793?

37. Являются ли простыми числа 1 000 011; 20 012 345; 111 111 111?

38. Выпишите первые 25 простых чисел в порядке возрастания.

39. Выпишите все составные числа, не превышающие 50, в порядке возрастания.

40. **Доказываем.** Докажите, что 2 — единственное чётное простое число.

41. Запишите числа 48 и 96 в виде разности квадратов двух простых чисел.

Исследуем (42—43).

42. Можно ли простое число записать в виде суммы:
а) двух чётных чисел; б) двух нечётных чисел;
в) чётного и нечётного чисел?

43. Леонард Эйлер предложил такую формулу простых чисел: $p = n^2 - n + 41$. Сколько простых чисел даёт эта формула при подстановке в неё последовательных натуральных чисел, начиная с 1? Выполните вычисления до получения первого составного числа.

Доказываем (44—45).

44. Докажите, что найдётся такое натуральное число n, для которого $n^2 - n + 41$ является составным числом.

45. а) Докажите, что одно из трёх соседних нечётных чисел делится на 3.
б) Известно, что p, $p + 2$, $p + 4$ — простые числа. Найдите p. Докажите, что других p не существует.

1.4. Разложение натуральных чисел на множители

Из п. 1.3 следует, что простое число p имеет только два делителя 1 и p, составное число n, кроме делителей 1 и n, имеет ещё по крайней мере один делитель.

Так, делителями числа 13 являются числа 1 и 13, делителями числа 4 являются числа 1, 2, 4, делителями числа 12 являются числа 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Если делитель — простое число, то его называют **простым делителем**. Так, число 13 имеет один простой делитель 13, число 4 — один простой делитель 2, а число 12 — два простых делителя 2 и 3.

Каждое натуральное составное число можно представить как произведение степеней различных его простых делителей, записанных в порядке возрастания этих делителей. Например:

$$28 = 2^2 \cdot 7, \quad 22 = 2 \cdot 11, \quad 81 = 3^4, \quad 100 = 2^2 \cdot 5^2.$$

Правые части этих равенств называют **разложениями на простые множители** чисел, записанных в левых частях.

Таким образом, **разложить данное натуральное число на простые множители** — это значит представить его в виде произведения различных простых чисел, взятых в соответствующих степенях и записанных в порядке возрастания этих простых чисел.

Справедливо следующее утверждение, называемое **основной теоремой арифметики:**

> **Каждое отличное от 1 натуральное число можно разложить на простые множители, и такое разложение единственно.**

Покажем на примере, как разложить на простые множители натуральное составное число.

Пример. Разложим число 90 на простые множители.

90 делится на простое число 2, поэтому

$$90 = 2 \cdot 45.$$

45 не делится на 2, но делится на простое число 3, поэтому

$$45 = 3 \cdot 15.$$

15 делится на 3, поэтому

$$15 = 3 \cdot 5.$$

Так как 5 — простое число, то процесс отыскания простых делителей закончен.

Этот процесс удобно записать так:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, получаем равенство $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Правая часть этого равенства есть разложение на простые множители числа 90.

Каждое простое число уже разложено на множители, так как, например,

$$7 = 7^1, \ 19 = 19^1.$$

В дальнейшем нас будут интересовать натуральные числа, которые не имеют других простых делителей, кроме 2 и 5.

Разъясним, что понимается под словами «данное натуральное число m не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5».

Во-первых, m может быть степенью числа 2, т. е. равняться одному из чисел:

$$2; \ 2^2 = 4; \ 2^3 = 8; \ 2^4 = 16; \ 2^5 = 32; \ \dots .$$

Во-вторых, m может быть степенью числа 5, т. е. равняться одному из чисел:

$$5;\ 5^2 = 25;\ \ 5^3 = 125;\ \ 5^4 = 625;\ \ \ldots .$$

В-третьих, m может быть произведением некоторой степени числа 2 и некоторой степени числа 5. Примерами таких чисел являются числа:

$$2^2 \cdot 5^2 = 100;\ \ 2^3 \cdot 5^2 = 200;\ \ 2^4 \cdot 5 = 80.$$

Наконец, m может быть единицей ($m = 1$). Ведь единица не имеет простых делителей.

46. Что называют делителем натурального числа? Назовите делители числа 12.

47. Что называют простым делителем натурального числа? Назовите простые делители числа 12.

48. Назовите все делители числа:
а) 17; б) 45; в) 113; г) 476; д) 32.

49. Найдите все простые делители числа:
а) 19; б) 54; в) 112; г) 232.

50. Напишите пять натуральных чисел, не имеющих других простых делителей, кроме 2 и 5, и пять натуральных чисел, не обладающих этим свойством.

51. Приведите примеры натуральных чисел, имеющих делители 3 и 4. Какие делители, кроме указанных, имеют выбранные натуральные числа?

52. Приведите примеры натуральных чисел, не имеющих других простых делителей, кроме 3 и 5.

53. Найдите все делители чисел: 2, 6, 12, 28, 48, 100.

54. Найдите все простые делители чисел:
а) 4, 9, 15, 10, 24; б) 46, 50, 58, 99, 128;
в) 196, 254, 400, 625, 10 000; г) 7, 77, 777, 7777, 77 777.

55. Разложите на простые множители числа, т. е. запишите число в виде произведения степеней простых чисел:
а) 16, 18, 26; б) 35, 48, 72;
в) 144, 210, 800; г) 216, 343, 384;
д) 1024, 1728, 1575; е) 9225, 1001, 1739.

56. Сколько чисел от 1 до 100:
а) делится на 2; б) делится на 5;
в) делится на 2 и на 5; г) не делится на 2 и на 5?

57. Сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 2, ни на 3?

§ 2. Рациональные числа

2.1. Обыкновенные дроби. Конечные десятичные дроби

Положительным рациональным числом называют число, которое может быть записано в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа.

Положительное рациональное число называют также **обыкновенной положительной дробью** или просто **дробью**. Число p называют **числителем** дроби, а число q — её **знаменателем**.

Примеры дробей: $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{123}{150}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{7}{1}$, $\frac{7}{5}$.

Любое натуральное число p можно записать в виде дроби $\frac{p}{1}$, при этом пишут равенство $p = \frac{p}{1}$.

До п. 2.5 мы будем рассматривать положительные дроби (положительные рациональные числа), но для краткости прилагательное «положительный» будем опускать, подразумевая его.

Для любого натурального числа n справедливо равенство, называемое **основным свойством дроби**:

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot n}{q \cdot n}. \qquad (1)$$

Например, $\frac{7}{3} = \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{35}{15}$, $2 = \frac{2}{1} = \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} = \frac{10}{5}$, $\frac{17}{2} = \frac{17 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{85}{10}$.

Можно сказать, что левая и правая части равенства (1) являются разными записями одного и того же положительного рационального числа.

Если числа p и q не имеют общих простых делителей, то дробь $\frac{p}{q}$ называют **несократимой**. Например, $\frac{2}{3}$ — несократимая дробь, а $\frac{6}{8}$ — сократимая дробь.

Если $p < q$, то дробь называют **правильной**. Если $p \geqslant q$, то дробь называют **неправильной**. Например, $\frac{4}{8}$ — правильная дробь, а $\frac{9}{8}$ и $\frac{8}{8}$ — неправильные дроби.

Если знаменатель q дроби $\frac{p}{q}$ равен 10, или 100, или 1000, или 10 000, ..., т. е. если q есть некоторая степень числа 10, то обыкновенную дробь $\frac{p}{q}$ можно записать в виде **конечной десятичной дроби**.

Например, обыкновенные дроби

$$\frac{3}{10};\ \frac{7}{100};\ \frac{12\,437}{1000};\ \frac{234}{100\,000}$$

записываются соответственно в виде следующих конечных десятичных дробей:

$$0{,}3;\ 0{,}07;\ 12{,}437;\ 0{,}00234.$$

Каждую из этих конечных десятичных дробей называют **десятичным разложением** соответствующей обыкновенной дроби.

При этом пишут равенства

$$\frac{3}{10} = 0{,}3; \qquad \frac{7}{100} = 0{,}07;$$

$$\frac{12\,437}{1000} = 12{,}437; \qquad \frac{234}{100\,000} = 0{,}00234$$

и говорят, что данные обыкновенные дроби разложены в конечные десятичные дроби.

Надо иметь в виду, что, например, $\frac{7}{100}$ и 0,07 есть разные обозначения одного и того же числа. Первое — в виде обыкновенной дроби, а второе — в виде конечной десятичной дроби.

Очевидно также, что всякая конечная десятичная дробь может быть записана в виде обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$, где p — натуральное число, а q — некоторая степень числа 10. Например:

$$1{,}05 = \frac{105}{10^2}; \qquad 8{,}234 = \frac{8234}{10^3};$$

$$3{,}0122 = \frac{30\,122}{10^4}; \qquad 0{,}00012 = \frac{12}{10^5}.$$

Итак, **любая обыкновенная дробь, знаменатель которой есть некоторая степень числа 10, может быть записана в виде конечной десятичной дроби.**

Верно и обратное утверждение: **любая конечная десятичная дробь может быть записана в виде обыкновенной дроби, знаменатель которой есть некоторая степень числа 10.**

Отметим, что любое натуральное число можно записать в виде конечной десятичной дроби, например:

$$3 = 3{,}0 = 3{,}00 = 3{,}000 = \ldots .$$

На практике такими записями пользуются широко. Если, например, в результате измерений, которые производились с точностью до сантиметра, получилось 3 м, то пишут 3,00 м, подчёркивая этим, что полученный результат вычислен с точностью до 1 сантиметра (0,01 м).

58. Что называют положительным рациональным числом (дробью)?

59. Как называют числа p и q в записи дроби $\frac{p}{q}$?

60. Какую дробь называют несократимой?

61. Можно ли натуральное число записать в виде обыкновенной дроби или конечной десятичной дроби? Приведите примеры.

62. В чём заключается основное свойство дроби?

63. Можно ли записать конечную десятичную дробь в виде $\frac{p}{q}$? Приведите примеры.

64. Какую дробь называют правильной; неправильной? Приведите примеры.

65. Разложите числитель и знаменатель дроби на простые множители и сократите дробь, если возможно:

а) $\frac{12}{35}$; б) $\frac{48}{100}$; в) $\frac{105}{125}$; г) $\frac{24}{36}$;

д) $\frac{56}{100}$; е) $\frac{225}{300}$; ж) $\frac{123}{321}$; з) $\frac{111}{132}$.

Сократите дробь (66—67):

66. а) $\frac{16}{24}$; б) $\frac{240}{1000}$; в) $\frac{1240}{10\,000}$; г) $\frac{1024}{3456}$;

д) $\frac{315}{420}$; е) $\frac{630}{1470}$; ж) $\frac{660}{616}$; з) $\frac{770}{1320}$;

и) $\frac{143}{260}$; к) $\frac{112}{672}$; л) $\frac{450}{540}$; м) $\frac{777}{2121}$.

67. а) $\frac{88}{99}$; б) $\frac{777}{888}$; в) $\frac{123}{205}$; г) $\frac{945}{459}$; д) $\frac{1212}{2727}$; е) $\frac{123\,123}{327\,327}$.

68. Проверьте, является ли дробь несократимой:

а) $\frac{13}{21}$; б) $\frac{62}{81}$; в) $\frac{94}{98}$; г) $\frac{125}{250}$;

д) $\frac{17}{10}$; е) $\frac{63}{91}$; ж) $\frac{126}{129}$; з) $\frac{217}{279}$;

и) $\frac{765}{1071}$; к) $\frac{396}{591}$; л) $\frac{199}{200}$; м) $\frac{1999}{2000}$.

69. Запишите данные дроби в виде конечных десятичных дробей и прочитайте полученные десятичные дроби:

а) $\frac{7}{10}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{23}{10}$; б) $\frac{53}{1000}$, $\frac{178}{10}$, $\frac{37\,481}{10\,000}$;

в) $\frac{21}{10\,000}$, $\frac{73}{1\,000\,000}$, $\frac{1276}{10\,000}$; г) $\frac{453}{100}$, $\frac{7269}{100}$, $\frac{5676}{10}$.

70. Запишите данные конечные десятичные дроби в виде обыкновенных дробей:

а) 0,1; 0,21; 1,5; б) 12,3; 0,007; 123,05;
в) 0,4; 0,12; 0,125; г) 1,25; 3,75; 4,625;
д) 0,037; 2,503; 0,710; е) 0,22; 0,055; 2,125; 4,0404.

2.2. Разложение обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь

Конечные десятичные дроби всегда можно записать в виде обыкновенных несократимых дробей. Например:

$$0{,}375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8} = \frac{3}{2^3};$$

$$6{,}72 = \frac{672}{100} = \frac{168}{25} = \frac{168}{5^2};$$

$$0{,}065 = \frac{65}{1000} = \frac{13 \cdot 5}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{13}{5^2 \cdot 2^3};$$

$$0{,}034 = \frac{34}{1000} = \frac{17 \cdot 2}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{17}{5^3 \cdot 2^2};$$

$$17{,}0 = \frac{17}{1}.$$

Заметим, что после сокращения дробей получились знаменатели, которые не имеют других простых делителей, кроме 2 и 5.

Из этих примеров видно, что **если конечную десятичную дробь записать в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{p}{q}$, то её знаменатель q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.**

Это утверждение доказывается и в общем случае.

Верно и обратное утверждение: **если знаменатель q несократимой дроби $\frac{p}{q}$ не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то эта дробь разлагается в конечную десятичную дробь.**

Например, $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8}{10} = 0{,}8$.

В этом примере числитель и знаменатель дроби мы умножили на 2, чтобы получить в знаменателе 10.

Аналогично поступаем и в следующих примерах:

$$\frac{501}{500} = \frac{501 \cdot 2}{500 \cdot 2} = \frac{1002}{1000} = 1{,}002; \quad \frac{3}{40} = \frac{3 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{75}{1000} = 0{,}075;$$

$$17 = \frac{17}{1} = \frac{170}{10} = 17{,}0.$$

Для разложения в конечную десятичную дробь обыкновенной несократимой дроби, знаменатель которой не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, существует два способа.

Один из них был рассмотрен выше, он сводится к умножению числителя и знаменателя дроби $\frac{p}{q}$ на соответствующую степень или числа 2, или числа 5, или числа 10, чтобы в знаменателе получилась степень числа 10.

Вторым способом является известный способ деления числителя на знаменатель уголком. Например, обратим этим способом дробь $\frac{3}{40}$ в десятичную дробь:

$$\begin{array}{r|l}
3 & 40 \\ \cline{2-2}
30 & 0{,}075 \\ \hline
-300 & \\
280 & \\ \hline
-200 & \\
200 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Следовательно, $\frac{3}{40} = 0{,}075$.

Отметим, что любой из этих способов разложения приводит к одной и той же конечной десятичной дроби.

До сих пор рассматривались десятичные дроби, называемые **конечными десятичными дробями**. Их так называют потому, что в записи после запятой стоит конечное число цифр.

В дальнейшем придётся рассматривать и бесконечные десятичные дроби. В их записи после запятой бесконечно много цифр.

71. Какие делители должен иметь знаменатель обыкновенной несократимой дроби, чтобы она разлагалась в конечную десятичную дробь? Приведите примеры.

72. Какими способами можно разложить обыкновенную дробь в десятичную? Приведите примеры.

73. Какие простые делители содержит знаменатель дроби:

а) $\frac{1}{64}$; б) $\frac{1}{48}$; в) $\frac{1}{56}$; г) $\frac{1}{24}$;

д) $\frac{1}{128}$; е) $\frac{1}{78}$; ж) $\frac{1}{256}$; з) $\frac{1}{625}$?

74. Найдите несократимые дроби, равные данным:

а) $\frac{24}{60}$; $\frac{15}{20}$; $\frac{21}{30}$; б) $\frac{65}{100}$; $\frac{94}{100}$; $\frac{8}{1000}$;

в) $\frac{16}{100}$; $\frac{72}{450}$; $\frac{144}{3600}$; г) $\frac{18}{900}$; $\frac{120}{50}$; $\frac{404}{5050}$.

75. Запишите десятичную дробь в виде обыкновенной несократимой дроби:
а) 0,4; б) 0,12; в) 0,125; г) 1,2; д) 0,45; е) 0,0018.

76. Запишите дробь в виде дроби, у которой знаменатель является степенью числа 10:
а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{1}{25}$; д) $\frac{11}{20}$; е) $\frac{9}{8}$; ж) 3; з) $\frac{7}{400}$.

77. Разложите данные обыкновенные дроби в десятичные двумя способами: $\frac{1}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{24}{15}$.

78. Разложите данные дроби в десятичные с помощью деления уголком:
а) $\frac{7}{5}, \frac{3}{16}, \frac{48}{15}$; б) $\frac{3}{2000}, \frac{17}{40}, \frac{28}{140}$;
в) $\frac{3}{12}, \frac{7}{56}, \frac{6}{24}$; г) $\frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}$;
д) $\frac{3}{25}, \frac{12}{75}, \frac{17}{200}$; е) $\frac{123}{20}, \frac{783}{540}, \frac{324}{25}$;
ж) $\frac{625}{125}, \frac{860}{400}, \frac{33}{60}$; з) $\frac{1024}{256}, \frac{804}{400}, \frac{624}{120}$.

79. Возможно ли разложение данной дроби в конечную десятичную дробь:
а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{6}{48}$; в) $\frac{7}{352}$; г) $\frac{12}{56}$; д) $\frac{120}{38}$; е) $\frac{12}{96}$?

2.3. Периодические десятичные дроби

Из изложенного в предыдущем пункте следует, что всякая несократимая дробь $\frac{p}{q}$ разлагается в конечную десятичную дробь тогда и только тогда, когда её знаменатель q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.

Поэтому если знаменатель несократимой дроби $\frac{p}{q}$ имеет простой делитель, отличный от 2 и 5, то эта дробь не разлагается в конечную десятичную дробь и, применив к ней способ деления уголком, нельзя получить конечную десятичную дробь.

Пример 1. Пусть дано число $\frac{7}{9}$. Это несократимая дробь, и её знаменатель имеет простой делитель 3, т. е. делитель, отличный от 2 и 5. Поэтому число $\frac{7}{9}$ заведомо не разлагается в конечную десятичную дробь.

Убедимся в этом, разделив числитель данной дроби на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{l|l}
7 & 9 \\
\hline
-70 & 0{,}777\ldots \\
63 & \\
\hline
-70 & \\
63 & \\
\hline
-70 & \\
63 & \\
\hline
70 & \\
\ldots &
\end{array}$$

На каждом этапе этих вычислений получается один и тот же остаток 7, а в частном — одна и та же цифра 7.

Процесс этот бесконечный (не имеет конца). Он приводит к выражению 0,777..., где точки означают, что цифра 7 периодически повторяется бесконечно много раз, т. е. на любом месте (разряде) после запятой в этом выражении стоит одна и та же цифра 7.

Выражение 0,777... называют **бесконечной периодической десятичной дробью** или коротко **периодической дробью**. Его записывают следующим образом: 0,(7) — и читают: «нуль целых и семь в периоде». Цифру (7) называют **периодом дроби 0,(7)**.

Говорят, что число $\frac{7}{9}$ представлено в виде периодической дроби 0,(7) или что число $\frac{7}{9}$ разложено в периодическую дробь 0,(7). При этом пишут:

$$\frac{7}{9} = 0{,}777\ldots = 0{,}(7).$$

Выражения $\frac{7}{9}$ и 0,(7) являются разными обозначениями одного и того же числа в виде обыкновенной дроби $\frac{7}{9}$ и в виде периодической дроби 0,(7).

Пример 2. Дробь $\frac{2}{99}$ несократимая, и её знаменатель имеет простые делители, отличные от 2 и 5, поэтому её десятичное разложение не может быть конечным. В самом деле,

$$\begin{array}{l|l}
2 & 99 \\
\hline
20 & 0{,}0202\ldots \\
\hline
200 & \\
\hline
2\ldots &
\end{array}$$

Процесс деления числителя на знаменатель уголком здесь бесконечный. Он приводит к выражению 0,0202..., где точки означают, что группа цифр (02) периодически повторяется бесконечно много раз. Это выражение также называют **периодической дробью**. Его записывают так: 0,(02) — и читают: «нуль целых и нуль два в периоде». Группу цифр (02) называют **периодом дроби 0,(02)**.

Говорят, что число $\frac{2}{99}$ представимо в виде периодической дроби 0,(02) или что его можно разложить в периодическую дробь 0,(02). При этом пишут:

$$\frac{2}{99} = 0{,}0202... = 0{,}(02).$$

Применяя способ деления уголком, получим следующие равенства:

1) $\frac{17}{99} = 0{,}1717... = 0{,}(17);$

2) $\frac{143}{45} = 3{,}1777... = 3{,}1(7);$

3) $\frac{101}{900} = 0{,}11222... = 0{,}11(2).$

Правые части этих равенств читаются так:

1) нуль целых и семнадцать в периоде;
2) три целых, одна десятая и семь в периоде;
3) нуль целых, одиннадцать сотых и два в периоде.

В этих примерах несократимые дроби, знаменатели которых имеют простые делители, отличные от 2 и 5, были представлены в виде периодических дробей.

Верно и общее утверждение: если применить правило деления уголком к любой несократимой дроби $\frac{p}{q}$, у которой знаменатель имеет простые делители, отличные от 2 и 5, то получится бесконечная периодическая десятичная дробь или коротко периодическая дробь.

Приписывая к конечной десятичной дроби бесконечно много нулей, мы также превращаем её в бесконечную периодическую десятичную дробь с периодом 0. Например:

$$27 = 27{,}0 = 27{,}000... = 27{,}(0);$$
$$0{,}354 = 0{,}354000... = 0{,}354(0).$$

Следовательно, любое целое число и любую конечную десятичную дробь можно считать бесконечной периодической десятичной дробью или коротко периодической дробью.

Таким образом, справедливо утверждение:

любое положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ разлагается в периодическую дробь.

Верно и обратное утверждение:

любая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого положительного рационального числа $\frac{p}{q}$.

Оба эти утверждения будут обоснованы в следующем пункте.

80. В каком случае несократимая обыкновенная дробь не разлагается в конечную десятичную дробь?

81. Каким способом разлагается любая обыкновенная дробь в десятичную?

82. Какие десятичные дроби могут получиться при делении уголком числителя обыкновенной дроби на знаменатель?

83. Как узнать, разлагается обыкновенная дробь в конечную или же в бесконечную десятичную дробь? Приведите примеры.

84. Как можно записать конечную десятичную дробь или натуральное число в виде бесконечной десятичной дроби? Приведите примеры.

85. Напишите периодические дроби, равные обыкновенным дробям:

а) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{12}{5}, 12$; б) $\frac{24}{30}, \frac{36}{48}, \frac{4}{7}, \frac{45}{63}$;

в) $\frac{20}{41}, \frac{15}{37}, \frac{5}{21}, \frac{17}{42}$; г) $\frac{8}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{3}{9}$;

д) $\frac{13}{99}, \frac{25}{99}, \frac{71}{99}, \frac{42}{99}$; е) $\frac{123}{999}, \frac{12}{999}, \frac{5}{999}$.

86. Подберите обыкновенную дробь, равную периодической дроби:

а) 0,(8); б) 0,(4); в) 0,(13);
г) 0,(37); д) 0,(27); е) 0,(125).

87. Определите цифру сотого разряда после запятой в записи периодической дроби:

а) 0,(3); б) 0,(25); в) 0,(123);
г) 0,5(3); д) 5,2(13); е) 7,2(51).

2.4*. Периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби

Зададим произвольную положительную несократимую дробь $\frac{p}{q}$. Покажем, что если разделить числитель дроби на знаменатель уголком, то в частном получится либо конечное, либо бесконечное периодическое её десятичное разложение.

Мы уже знаем, когда может получиться конечное десятичное разложение. Для этого число q не должно иметь других простых делителей, кроме 2 и 5. В остальных случаях может быть только бесконечное десятичное разложение, которое является периодическим.

Пример 1. Пусть надо найти десятичное разложение несократимой дроби $\frac{1372}{65}$.

Будем делить 1372 на 65 уголком:

```
     _1372    | 65
       130    |______________
   *   _72     21,1076923076...
        65            *    *
        __            *    *
        _70                *
         65
         __
     ** _500
         455
         ___
         _450
          390
          ___
          _600
           585
           ___
           _150
            130
            ___
            _200
             195
             ___
      ***   _500
              455
              ___
               45
               ...
```

Здесь одной звёздочкой отмечен тот этап вычислений, когда снесена последняя цифра делимого. Получаемые после этого остатки заключены в прямоугольники. Мы видим, что остатки, отмеченные двумя и тремя звёздочками, равны между собой. Это показывает, что процесс деления носит периодический характер и приводит к бесконечной периодической десятичной дроби, т. е.

$$\frac{1372}{65} = 21{,}1(076923).$$

То, что десятичное разложение дроби $\frac{1372}{65}$ должно быть бесконечным периодическим, можно объяснить иначе.

Данная дробь — несократимая, и её знаменатель 65 имеет простой делитель 13, отличный от 2 и 5. Следовательно, десятичное разложение числа $\frac{1372}{65}$ не может быть конечным, т. е. возникающие при делении остатки положительны (не равны нулю) на любом этапе деления. В то же время каждый остаток меньше 65, т. е. он равен одному из чисел 1, 2, 3, ..., 63, 64. Но тогда если мы будем рассматривать подряд остатки начиная с первого, заключённого в прямоугольник, то среди первых 65 из них обязательно должны найтись два равных между собой. Это и показывает, что мы должны получить в частном периодическую дробь.

Эти рассуждения проводятся для любой несократимой дроби $\frac{p}{q}$, знаменатель которой q имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5.

Если делить p на q уголком, то наступит такой этап, когда цифры делимого будут снесены. Если рассмотреть подряд все возникающие начиная с этого момента q остатков (все они положительны и каждый из них меньше q), то среди них всегда окажутся два равных между собой, а это и показывает, что процесс деления бесконечный периодический.

Напомним, что конечную десятичную дробь мы тоже превращаем в периодическую дробь (с периодом 0).

Итак, доказано, что **любое положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ разлагается в периодическую дробь.**

Верно и обратное утверждение: **любая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого положительного рационального числа $\frac{p}{q}$.**

Ниже на примерах мы покажем, как можно находить это число.

Пример 2. Запишем периодическую дробь 0,(8) в виде обыкновенной дроби.

Для этого обозначим искомую дробь через x. Тогда справедливо равенство

$$x = 0,(8). \tag{1}$$

Умножая это равенство на 10, получим

$$10x = 8,(8). \tag{2}$$

Вычитая равенство (1) из равенства (2), находим, что

$$10x - x = 8,$$

откуда

$$x = \frac{8}{9}.$$

Применив к дроби $\frac{8}{9}$ способ деления уголком, получим, что эта дробь действительно равна периодической дроби 0,(8).

Пример 3. Запишем периодическую дробь 2,35(7) в виде обыкновенной дроби.

Обозначим искомую дробь через x, тогда справедливо равенство

$$x = 2,35(7).$$

Умножая это равенство на 100 и на 1000, получим, что справедливы равенства:

$$100x = 235,(7), \tag{3}$$
$$1000x = 2357,(7). \tag{4}$$

Вычитая равенство (3) из равенства (4), находим, что

$$1000x - 100x = 2357 - 235,$$

откуда $x = \dfrac{2357 - 235}{900} = \dfrac{2122}{900}$.

Применив к дроби $\dfrac{2122}{900}$ способ деления уголком, получим, что эта дробь действительно равна периодической дроби 2,35(7).

Пример 4. Запишем периодическую дробь 0,(0108) в виде обыкновенной дроби.

Обозначим искомую дробь через x:

$$x = 0,(0108).$$

Умножим это равенство на 10 000:

$$10\,000x = 108,(0108).$$

Вычитая первое равенство из второго, получим

$$10\,000x - x = 108 - 0,$$

откуда $x = \dfrac{108 - 0}{9999} = \dfrac{108}{9999}$.

Применив к дроби $\dfrac{108}{9999}$ способ деления уголком, получим, что эта дробь действительно равна периодической дроби 0,(0108).

Рассуждая аналогично, получим, что

$$2,4(0) = \frac{240 - 24}{90} = 2,4, \quad 2,3(9) = \frac{239 - 23}{90} = 2,4.$$

Следовательно, 2,4 = 2,4(0) = 2,3(9).

Аналогично показывается, что

$$7,25 = 7,25(0) = 7,24(9),$$
$$0,031 = 0,031(0) = 0,030(9),$$
$$12,3018 = 12,3018(0) = 12,3017(9).$$

Таким образом, любую периодическую дробь с периодом 9 всегда можно заменить соответствующей конечной десятичной дробью.

Замечание. При делении числителя на знаменатель уголком десятичное разложение с периодом 9 получиться не может, поэтому периодические дроби с периодом 9 обычно не рассматривают.

88. Какие обыкновенные дроби разлагаются в периодические дроби: а) с периодом 0; б) с периодом, отличным от 0?

89. Может ли период десятичного разложения обыкновенной дроби $\dfrac{6}{7}$ содержать 8 цифр?

90. Покажите на примере, как периодическую дробь с периодом 9 можно превратить в конечную десятичную дробь.

91. Запишите периодические дроби в виде обыкновенных дробей:
а) 1,(0); 0,(3); 0,(7);
б) 0,1(2); 1,12(3); 7,5(4);
в) 0,(12); 1,0(12); 8,7(21);
г) 23,5(0); 23,5(1); 23,5(13); 23,5(127).

92. Найдите десятичное разложение обыкновенной дроби:
а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{17}{25}$; в) $\frac{689}{4950}$; г) $\frac{5}{16}$.

93. Запишите в виде периодической дроби:
а) $\frac{7}{40}$; б) 19; в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{3}{11}$;
д) $\frac{5}{9}$; е) $\frac{17}{99}$; ж) $\frac{8}{999}$; з) $\frac{2007}{9999}$.

2.5. Десятичное разложение рациональных чисел

Если перед натуральным числом поставить знак «+» (плюс), то получим равное ему число. Поэтому, например, пишут:

$$2 = +2, \quad +100 = 100.$$

Поставив же перед натуральным числом знак «−» (минус), получим противоположное ему число, называемое целым отрицательным числом. Например, числа

$$-2,\ -9,\ -123$$

— целые отрицательные.

Натуральные числа, целые отрицательные числа и число нуль образуют **множество целых чисел**.

Отметим, что сумма, разность и произведение целых чисел — всегда целое число, а частное двух целых чисел не всегда целое число.

Поставив перед обыкновенной дробью (положительным рациональным числом) знак «+», получим равную ей дробь. Поэтому, например, пишут:

$$\frac{123}{973} = +\frac{123}{973}; \quad +\frac{117}{91} = \frac{117}{91}.$$

Поставив перед положительной дробью знак «−», получим противоположную ей — отрицательную дробь, называемую отрицательным рациональным числом.

Примеры отрицательных рациональных чисел:

$$-\frac{1}{3};\ -\frac{7}{2};\ -\frac{9}{4};\ -2.$$

Знак «–», стоящий перед отрицательной дробью, можно записать или в числитель, или в знаменатель дроби. Поэтому, например, пишут:

$$-\frac{1}{3} = \frac{-1}{3}; \quad -\frac{7}{2} = \frac{7}{-2}.$$

Положительные дроби, отрицательные дроби и число нуль образуют **множество рациональных чисел.**

Сумма, разность, произведение и частное рациональных чисел являются рациональными числами (на нуль делить нельзя!).

Любое рациональное число может быть записано в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа и $q \neq 0$.

Ранее было показано, что любое положительное рациональное число разлагается в периодическую дробь.

Поставив перед ней знак «+», получим равную ей дробь. Поэтому, например, пишут:

$$+\frac{237}{99\,900} = 0{,}00(237) = +0{,}00(237).$$

Поставив же перед положительной периодической дробью знак «–», получим отрицательную периодическую дробь. Поэтому, например, пишут:

$$-0{,}00(237) = -\frac{237}{99\,900}.$$

Периодическую дробь в левой части этого равенства называют десятичным разложением числа, записанного в правой части.

Отметим, что число нуль также может быть записано в виде нулевой периодической дроби:

$$0 = 0{,}(0) = +0{,}(0) = -0{,}(0).$$

Итак,

каждое рациональное число может быть разложено в периодическую дробь, а каждая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого рационального числа.

94. а) Является ли любое целое число рациональным?
б) Является ли любое рациональное число целым?

95. В каком виде можно записать любое рациональное число?

96. а) В результате каких действий с целыми числами всегда получается целое число?
б) В результате каких действий с рациональными числами всегда получается рациональное число?

97. а) Может ли сумма (произведение) двух целых чисел быть рациональным (но не целым) числом?
б) Может ли сумма (произведение) двух рациональных чисел быть целым числом?

98. Сравните числа:
а) $\frac{3}{8}$ и $-\frac{5}{9}$; б) $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{4}{5}$; в) $-\frac{3}{7}$ и 0;
г) $\frac{8}{9}$ и 0; д) $-\frac{5}{28}$ и $-\frac{1}{7}$; е) $-\frac{13}{24}$ и $-\frac{17}{26}$;
ж) $-\frac{98}{97}$ и $-\frac{99}{98}$; з) $-\frac{97}{98}$ и $-\frac{98}{99}$; и) $-\frac{1}{3}$ и $\frac{-1}{3}$;
к) $\frac{2}{7}$ и $\frac{-2}{-7}$; л) $-\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{-5}$; м) $\frac{3}{4}$ и $-\frac{3}{4}$.

Выполните действия (**99—100**):

99. а) $-\frac{12}{25}+\frac{3}{50}$; б) $-\frac{11}{48}+\left(-\frac{3}{16}\right)$; в) $-\frac{5}{27}-\left(-\frac{5}{18}\right)$;
г) $-\frac{3}{7}\cdot\frac{8}{9}$; д) $\frac{24}{25}:\frac{4}{5}$; е) $\frac{71}{78}+\frac{17}{91}$;
ж) $\frac{50}{49}-\frac{15}{56}$; з) $-\frac{2}{5}\cdot\left(-32\frac{1}{2}\right)$; и) $-\frac{32}{77}:\frac{64}{55}$.

100. а) $-3{,}28+1{,}75$; б) $-4{,}8+(-0{,}48)$; в) $3{,}17-(-0{,}63)$;
г) $-0{,}48\cdot(-0{,}55)$; д) $-0{,}35:0{,}2$; е) $-0{,}35:0{,}03$;
ж) $0{,}25\cdot(-0{,}32)$; з) $-4{,}6-3{,}2$.

101. а) Любое ли рациональное число может быть разложено в периодическую дробь?
б) Любая ли периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого рационального числа?

102. Запишите пять отрицательных периодических дробей.

Запишите рациональные числа в виде периодических дробей (**103—104**):

103. а) $-\frac{3}{7}$; б) $\frac{9}{16}$; в) $-\frac{511}{90}$; г) $\frac{17}{99}$.

104. а) $-\frac{1}{2}$; 0; $-1{,}24$; б) $\frac{1}{3}$; $-\frac{4}{7}$; $-2\frac{5}{13}$;
в) $2\frac{24}{33}$; $-\frac{120}{210}$; $\frac{57}{16}$; г) $-\frac{21}{90}$; $1\frac{16}{90}$; $-3\frac{4}{7}$.

105. Запишите в виде рационального числа периодическую дробь:
а) $-0{,}(3)$; б) $-1{,}(2)$; в) $-2{,}(5)$;
г) $-0{,}(17)$; д) $-3{,}(18)$; е) $-1{,}(05)$;
ж) $2{,}(0)$; з) $-0{,}(0)$; и) $4{,}37(0)$.

§ 3. Действительные числа

3.1. Иррациональные числа

До сих пор мы рассматривали бесконечные десятичные периодические дроби, но существуют и **бесконечные десятичные непериодические дроби.**

Рассмотрим положительную бесконечную десятичную дробь

$$0{,}1011011101111\ldots,$$

в которой после запятой записаны группы единиц — по одной, по две, по три и т. д., а между группами единиц записано по одному нулю. У этой дроби никакая группа цифр не является периодом. Действительно, если предположить, что у этой дроби есть период, то он должен содержать хотя бы один нуль, но, какова бы ни была длина периода, найдётся группа единиц большей длины, не содержащая нуля. Следовательно, эта дробь непериодическая.

Это показывает, что данная дробь не может быть десятичным разложением какого-либо рационального числа. Её называют **иррациональным (нерациональным) числом.**

Вот ещё примеры положительных иррациональных чисел — бесконечных непериодических десятичных дробей:

$$0{,}01001000100001\ldots, \quad 17{,}12345678\ldots.$$

У первой дроби после запятой записаны цифры: нуль, единица, два нуля, единица, три нуля, единица, четыре нуля и т. д. У второй — после запятой записаны в возрастающем порядке числа натурального ряда.

Если перед числами поставить знак «+», то получим равные им числа, например:

$$0{,}01001000100001\ldots = +0{,}01001000100001\ldots;$$
$$17{,}123456789101112\ldots = +17{,}123456789101112\ldots.$$

Поставив перед положительной дробью знак «−», получим противоположную ей отрицательную дробь. Например, дроби

$$-0{,}01001000100001\ldots, \quad -17{,}12345678\ldots$$

есть отрицательные бесконечные непериодические дроби — отрицательные иррациональные числа.

Вообще, произвольную бесконечную непериодическую десятичную дробь называют **иррациональным числом.**

Если иррациональное число обозначить буквой, например:

$$a = 0{,}010010001\ldots,$$

то говорят, что правая часть этого равенства есть десятичное разложение числа a.

106. Запишите три положительные бесконечные непериодические дроби. Как называют определяемые ими числа?

107. Запишите три отрицательных иррациональных числа.

108. Какие из данных чисел являются рациональными, какие — иррациональными:
а) 0,275; 0,(2); 1,32323232...;
б) 2,7(1828); 3,01234567891011...; 1,15(45)?

109. Запишите четыре числа, являющиеся элементами множества:
а) натуральных чисел;
б) положительных чисел;
в) отрицательных чисел;
г) целых чисел;
д) рациональных чисел;
е) иррациональных чисел;
ж) чётных чисел;
з) простых чисел;
и) нечётных чисел;
к) чисел, больших 3;
л) составных чисел;
м) чисел, кратных 3.

110. Запишите два числа, одновременно являющиеся:
а) рациональными и отрицательными;
б) целыми и кратными 5;
в) целыми и положительными;
г) простыми и большими 50.

3.2. Понятие действительного числа

Рациональные и иррациональные числа называют **действительными числами.**

Таким образом, **любое действительное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби. Если число рациональное, то дробь периодическая, если число иррациональное, то дробь непериодическая.**

Число до запятой у положительной бесконечной десятичной дроби называют **целой частью этой дроби.** Первую цифру после запятой у бесконечной десятичной дроби называют **цифрой первого разряда** этой дроби, вторую цифру после запятой — **цифрой второго разряда**, третью — **цифрой третьего разряда** и т. д.

Для записи произвольной бесконечной десятичной дроби, отличной от нуля, пользуются буквами.

Пусть дана положительная бесконечная десятичная дробь. Целую её часть обозначим через α_0. Число α_0 — нуль или натуральное число. Цифру первого разряда обозначим через α_1, цифру второго разряда — через α_2, цифру третьего разряда — α_3 и т. д. В результате наша положительная десятичная дробь запишется следующим образом:

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots .$$

При этом число α_0 или хотя бы одна из цифр $\alpha_1, \alpha_2\ldots$ отличны от нуля. Иначе данное число было бы нулём.

Поставив перед положительной десятичной дробью знак «−», получим отрицательную десятичную дробь

$$-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots.$$

Числа (дроби)

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \text{ и } -\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

называют **противоположными числами.**

Если одно из противоположных чисел обозначено буквой a, то другое обозначают через $-a$.

Если a — положительное число, то $(-a)$ — отрицательное; если же a — отрицательное число, то $(-a)$ — положительное; но если $a = 0$, то и $(-a) = 0$.

Абсолютной величиной (или **модулем**) действительного числа a называют:

само число a, если a — положительное число;

нуль, если a — нуль;

число $(-a)$, если a — отрицательное число.

Абсолютная величина действительного числа a обозначается $|a|$. Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Например, пусть

$$a = 0{,}10110111\ldots,$$
$$b = -2{,}1234567891011\ldots,$$
$$c = 0{,}(0).$$

Тогда

$$|a| = 0{,}10110111\ldots,$$
$$|b| = 2{,}1234567891011\ldots,$$
$$|c| = 0.$$

111. Какое число называют:
а) рациональным; б) иррациональным; в) действительным?

112. Что называют целой частью положительной бесконечной дроби?

113. Что называют абсолютной величиной действительного числа?

114. Какие числа называют противоположными?

115. Как обозначают число, противоположное числу a?

116. Если число обозначили $-a$, то значит ли это, что оно отрицательное?

117. а) Любое ли иррациональное число является действительным числом?

б) Каждое ли действительное число является иррациональным числом?

в) Известно, что π — число иррациональное и что $\pi \approx 3{,}14$. Являются ли действительными числа π и 3,14?

г) Существует ли рациональное число, разлагающееся в бесконечную непериодическую дробь?

118. а) В каком случае верно равенство:

$$|a| = a; \ |a| = -a?$$

б) Найдите абсолютную величину (модуль) числа:

$$-2(3); \ -0{,}5777...; \ -12{,}0(12); \ 3{,}17(2); \ -0{,}(0).$$

в) Назовите число, противоположное числу:

$$2{,}5(3); \ -1{,}(72); \ -0{,}12(37).$$

3.3. Сравнение действительных чисел

Пусть заданы две бесконечные десятичные дроби (считаем, что они не имеют период 9).

При сравнении бесконечных десятичных дробей следует руководствоваться следующими правилами.

Правило 1. Две бесконечные десятичные дроби (т. е. действительные числа) равны между собой, если они имеют одинаковые знаки и их абсолютные величины имеют одинаковые целые части и одинаковые цифры соответствующих разрядов.

В других случаях бесконечные десятичные дроби не считаются равными.

Единственным исключением из этого правила является число 0, которое не изменяется, если поставить перед ним знак «−» или «+»:

$$0 = 0{,}000... = -0{,}000... = +0{,}000... .$$

Правило 2. Отрицательная бесконечная десятичная дробь меньше 0 и меньше любой положительной бесконечной десятичной дроби. Число 0 меньше любой положительной десятичной дроби.

Правило 3. Если целые части двух положительных десятичных дробей разные, то та дробь больше, у которой целая часть больше. А если целые части одинаковые, то надо обратиться к наименьшему разряду, для которого цифры данных дробей различны. Та из дробей больше, у которой цифра этого разряда больше.

Из двух отрицательных десятичных дробей та больше, у которой абсолютная величина меньше.

Если действительные числа (бесконечные десятичные дроби) a и b равны, то пишут: $a = b$. Если же a меньше b, то пишут: $a < b$ или $b > a$. Наконец, если a не равно b, то пишут: $a \neq b$.

Пример. Сравним числа $-3,1$ и $-3,(1)$.

Так как $|-3,1| = 3,1 = 3,1000...$, $|-3,(1)| = 3,(1) = 3,1111...$, то модули чисел $-3,1$ и $-3,(1)$ имеют одинаковые целые части и одинаковые цифры первого разряда, но цифра второго разряда первой дроби меньше цифры второго разряда второй дроби, поэтому модуль первой дроби меньше модуля второй: $3,1 < 3,(1)$. Так как эти дроби отрицательные, то по правилу сравнения получается, что

$$-3,1 > -3,(1).$$

119. В каком случае два действительных числа a и b равны ($a = b$)?

120. В каком случае два действительных числа a и b не равны ($a \neq b$)?

121. Сформулируйте правила сравнения действительного числа с нулём.

122. Как сравнивают:
а) положительные действительные числа;
б) отрицательные действительные числа?

123. Пусть $|a| = |b|$. В каком случае $a \neq b$?

124. В каком случае:
а) если $a > b$, то и $|a| > |b|$;
б) если $a > b$, то $|a| < |b|$?

125. Может ли число быть:
а) больше своей абсолютной величины;
б) равным своей абсолютной величине;
в) меньше своей абсолютной величины?
Если да, то приведите примеры.

126. Не выполняя всех вычислений, объясните, почему верно неравенство:

а) $0 \cdot \left(-5\frac{1}{3}\right) < 3,(4) \cdot 5,1$;

б) $(-12,98) \cdot 0 > 5,(8) \cdot (-4,6)$;

в) $2,(5) \cdot \left(-2\frac{1}{13}\right) < 3,(4) \cdot 5,(1)$;

г) $(5,(6) - 5,(6)) \cdot 13 > -6,7 \cdot 8,9$;

д) $(-3,(7) + 3,(7)) \cdot 8,98 < -8,1 \cdot \left(-4\frac{1}{7}\right)$.

127. Покажите справедливость двойного неравенства:
а) $0,75757 < 0,(75) < 0,75758$;
б) $3,023023 < 3,(023) < 3,023024$.

Сравните числа (**128—129**):

128. а) 2,42424242... и −2,42424242...; б) 0 и −10,(4);
в) 5,4444444... и 5,5444444...; г) 0,1(1) и 0,(2);
д) 0,333333 и $\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{9}$ и 0,(1);
ж) −4,313131... и −4,31311311131...; з) 0,(27) и $\frac{3}{10}$.

129. а) 5 и 5,(1); б) 0,(23) и 0,234;
в) 1,2456 и 1,24563; г) 1,2456 и 1,(3);
д) 0,545454 и 0,(54); е) 0,(4) и 0,(45).

130. Расположите числа в порядке возрастания:
а) −0,142536; −2,(7); 0,125; 0,1(25); б) 1,(5); 0,(12); −2,(778).

131. Расположите числа в порядке убывания:
$\frac{1}{9}$; −4,7(5); 0,1115; −4,7556; $\frac{1}{8}$; 0,124.

132. Верно ли двойное неравенство:
а) $106{,}727272 \leqslant 106{,}(72) < 106{,}727273$;
б) $-0{,}313132 < -0{,}(31) \leqslant -0{,}313131$?

133. Для чисел 2,(1) и 2,111 укажите хотя бы одно такое число, которое было бы больше одного из этих чисел и меньше другого.

134. Числа a и b отрицательные, и $|a| < |b|$. Сравните числа:
а) a и 0; б) $-b$ и 0; в) $-b$ и a; г) b и $-a$; д) $-b$ и $-a$; е) a и $|b|$.

3.4. Основные свойства действительных чисел

Принято считать, что сумма (разность, произведение и частное) действительных чисел есть действительное число, и притом единственное (кроме случая, когда в частном действительных чисел делитель нуль — делить на нуль нельзя!).

Действительные числа обладают следующими свойствами:

1. Для любых двух действительных чисел a и b имеет место только одно из соотношений:
$$a = b,\ a < b,\ a > b.$$
2. Для любых действительных чисел a и b, таких, что $a < b$, найдётся такое действительное число c, что и $a < c$ и $c < b$, т. е. $a < c < b$.
3. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (свойство транзитивности неравенств).
4. Если $a < b$, то $a + c < b + c$ для любого действительного числа c.
5. Если $a < b$ и c — положительное число, то $a \cdot c < b \cdot c$.

Для любых действительных чисел a, b и c справедливы равенства:
1) $a + b = b + a$ (переместительный закон сложения);
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательный закон сложения);
3) $a \cdot b = b \cdot a$ (переместительный закон умножения);
4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (сочетательный закон умножения);
5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (распределительный закон);
6) $a + 0 = a$;
7) $a + (-a) = 0$;
8) $a - b = a + (-b)$;
9) $a \cdot 1 = a$;
10) $a \cdot 0 = 0$;
11) $-a = (-1) \cdot a$;
12) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (если $a \neq 0$);
13) $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ (если $b \neq 0$).

Равенство 1) показывает, что два действительных числа можно складывать в любом порядке.

Равенство 2) показывает: чтобы к сумме $(a + b)$ прибавить c, можно к a прибавить сумму $(b + c)$ — результат тот же самый. Отметим, что выражение $(a + b) + c$ записывают и так: $a + b + c$, т. е. пишут: $(a + b) + c = a + b + c$.

Равенство 3) показывает, что два действительных числа можно умножать в любом порядке.

Равенство 4) показывает: чтобы произведение $a \cdot b$ умножить на c, можно a умножить на $b \cdot c$. Пишут также: $(ab)\,c = abc$.

Равенство 5) показывает, что если a умножить на сумму $(b + c)$, то получится такое же число, как в случае, если a умножить на b, затем a умножить на c и полученные произведения сложить.

Равенство 6) показывает, что прибавление нуля к любому числу не меняет последнего.

Равенство 7) утверждает, что сумма противоположных чисел есть число нуль.

Разность $a - b$ есть число, которое надо прибавить к b, чтобы получить a. Равенство 8) говорит о том, что это число можно записать в виде суммы a и $(-b)$, где $(-b)$ — число, противоположное числу b.

Равенство 9) утверждает, что умножение любого числа на единицу не меняет его.

Равенство 10) показывает, что умножение любого числа на нуль даёт нуль.

Равенство 11) утверждает, что число, противоположное числу a, равно произведению a на число (-1).

Если $a \neq 0$, то $\frac{1}{a}$ называют **числом, обратным** a. Очевидно, что и a есть число, обратное $\frac{1}{a}$, поэтому оба эти числа называют **взаимно обратными**.

Равенство 12) утверждает, что произведение двух взаимно обратных чисел равно 1.

Частное $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) есть число, которое надо умножить на b, чтобы получить a.

Равенство 13) показывает, что это число равно произведению a на $\frac{1}{b}$.

Подчеркнём ещё раз, что **делить на нуль нельзя**, поэтому запись $\frac{a}{0}$ бессмысленна для любого действительного числа a, в том числе и для $a = 0$.

В заключение отметим, что данное в п. 1.2 определение степени числа остаётся в силе для любых действительных чисел. Сформулированные там свойства степеней чисел можно выразить следующим образом. Пусть a и b — любые действительные числа, а m и n — произвольные натуральные числа, тогда справедливы равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n,$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Замечание. Действительные числа (т. е. бесконечные десятичные дроби) складывают, вычитают, умножают и делят приближённо. Дальше будет показано, как это делается.

135. Сформулируйте свойство транзитивности неравенств.

136. Сохранится ли неравенство, если:
а) к обеим его частям прибавить действительное число;
б) обе его части умножить на положительное число;
в) обе его части умножить на нуль или отрицательное число?
Приведите примеры.

137. Сформулируйте:
а) переместительный закон сложения;
б) переместительный закон умножения;
в) сочетательный закон сложения;
г) сочетательный закон умножения;
д) распределительный закон.

138. а) Что получится, если к числу прибавить 0?
б) Чему равна сумма противоположных чисел?
в) Можно ли разность $a - b$ записать в виде суммы?
г) Что получится, если число умножить на 1; –1; 0?
д) Какое число называют обратным к числу a ($a \neq 0$)?
е) Какие числа называют взаимно обратными?
ж) Чему равно произведение двух взаимно обратных чисел?

139. а) Что называют n-й степенью числа a?
б) Что называют основанием степени; показателем степени?
в) Чему равно произведение степеней с одинаковыми показателями?
г) Чему равно произведение степеней с одинаковыми основаниями?
д) Чему равен показатель степени при возведении степени числа в степень?

140. Укажите какое-либо число, заключённое между данными числами a и b:
а) $a = 2,3$; $b = 2,4$;
б) $a = 3,2$; $b = 3,(2)$;
в) $a = -3,15$; $b = -3,14$;
г) $a = -5,(3)$; $b = -5,(21)$.

141. Число c больше a, но меньше b. Верно ли, что $a < b$?

Верно ли неравенство (142—143):

142. а) $3,5 + 2,729 < 3,6 + 2,729$;
б) $-3,21 + 0,(4) < -3 + 0,(4)$;
в) $-5,6 + 3,2 < -5,1 + 3,(2)$;
г) $5 + 0,1 < 5,1 + 0,10110111...$?

143. а) $3,7 \cdot 0,8 < 3,8 \cdot 0,8$;
б) $-5,1 \cdot 0,(3) < -5 \cdot 0,(3)$;
в) $-4,7(1) \cdot 0,5 < -4,7 \cdot 0,5$;
г) $-3,(8) \cdot 0,5 < -3,8 \cdot 0,(5)$?

144. Верно ли равенство:
а) $3\frac{1}{3} + 0,(2) = 0,(2) + 3\frac{1}{3}$;
б) $(-5,1 + 3,(3)) + 7 = -5,1 + (3,(3) + 7)$;
в) $(-5,4 \cdot (-7)) \cdot 2 = -5,4 \cdot ((-7) \cdot 2)$?

145. Какими свойствами арифметических действий воспользовались при вычислениях:
а) $25 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 = 25 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 = 100 \cdot 21 = 2100$;
б) $1,5 \cdot 7 = (1 + 0,5) \cdot 7 = 1 \cdot 7 + 0,5 \cdot 7 = 7 + 3,5 = 10,5$;
в) $6\frac{2}{5} + 2\frac{2}{5} = 6 + \frac{2}{5} + 2 + \frac{2}{5} = 6 + 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 8\frac{4}{5}$?

Вычислите (146—147):

146. а) $3,(27) \cdot 5 - 3,(27) \cdot 4$;
б) $5,(21) \cdot 7 + 5,(21) \cdot 3$;
в) $3,(5) \cdot 7,3 - 7,3 \cdot 3,(5)$;
г) $2,(7) \cdot 5,41 - 5,41 \cdot 2,(7)$;
д) $13,(13) - 13,(13)$;
е) $-1 \cdot 3,(51)$;
ж) $0 \cdot 5,1234567...$;
з) $1 \cdot (-5,1234567...)$;
и) $1 \cdot \frac{17}{19}$;
к) $3 \cdot \frac{1}{3}$;
л) $-3,4 \cdot \frac{1}{-3,4}$;
м) $-5 \cdot \frac{1}{8}$;
н) $11,101101110... + (-11,101101110...)$.

147. а) $(3,2 + (-1,7)) + 1,7$;
б) $(5,9 + (-0,(7))) + 0,(7)$;
в) $(5,4 \cdot 1,7) \cdot \frac{1}{1,7}$;
г) $(-2,(95) \cdot 5,28) \cdot \frac{1}{5,28}$.

3.5. Приближения чисел

Если число a_1 мало отличается от числа a, то пишут:

$$a \approx a_1,$$

и говорят, что **число a приближённо равно числу a_1** или что **a_1 есть приближение числа a.**

Знак $\approx$ есть знак приближённого равенства.

Если при этом $a_1 < a$, то a_1 называют **приближением a с недостатком** или **приближением a снизу**. Если же $a_1 > a$, то a_1 называют **приближением a с избытком** или **приближением a сверху.**

Если случится, что $a_1 = a$, то a_1 можно назвать приближением a как снизу, так и сверху.

Действительные числа, задаваемые бесконечными десятичными дробями, приближают конечными десятичными дробями. Сама запись бесконечной десятичной дроби подсказывает, как эти приближения подбирать. Рассмотрим пример.

Пусть $a = 2{,}3(28)$.

Оборвём эту дробь на цифре второго разряда. Получим число 2,32, которое меньше, чем a.

Если у числа 2,32 увеличить цифру второго разряда на 1, то получим число 2,33, большее, чем a.

Таким образом,

$$2{,}32 < a < 2{,}33.$$

Это означает, что 2,32 есть приближение числа a снизу, а 2,33 есть его приближение сверху.

Пишут при этом: $a \approx 2{,}32$, $a \approx 2{,}33$ — и говорят:

2,32 есть **приближение** числа a **с точностью до одной сотой с недостатком** (снизу);

2,33 есть **приближение** числа a **с точностью до одной сотой с избытком** (сверху).

Вместо слов «с точностью до одной сотой» говорят ещё «с точностью до единицы второго разряда».

Так как третья цифра после запятой у числа a больше 5, то можно ещё сказать, что 2,33 есть приближение числа a с точностью до одной сотой **с округлением.**

Рассуждая аналогично, получим, что

$$2{,}328 < a < 2{,}329,$$
$$a \approx 2{,}328,\ a \approx 2{,}329,$$

где 2,328 есть приближение a с точностью до 0,001 снизу и в то же время приближение a с точностью до 0,001 с округлением;

2,329 есть приближение a с точностью до 0,001 сверху.

Подобным образом для числа $b = -2{,}3(28)$ имеем

$$-2{,}33 < b < -2{,}32.$$

Откуда

$$b \approx -2{,}33,\ b \approx -2{,}32,$$

и при этом

$-2{,}33$ есть приближение b с точностью до 0,01 снизу и в то же время с округлением;

$-2{,}32$ есть приближение b с точностью до 0,01 сверху.

Отметим, что, чем с большим числом разрядов мы будем брать приближение данного действительного числа, тем ближе будет это приближение к самому числу.

Введём понятие значащей цифры десятичной дроби.

Значащей цифрой десятичной дроби называют её первую (слева направо) отличную от нуля цифру, а также все следующие за ней цифры.

Например, в числе 235 000 все цифры значащие; в числе 0,302 цифры, стоящие после запятой, значащие; в числе 0,003004 цифры начиная с цифры 3 значащие.

Округлить число с точностью, например, до третьей значащей цифры — это значит округлить его до того разряда, где находится третья значащая цифра, заменив следующие цифры нулями. Например, приведённые ниже округления произведены с точностью до третьей значащей цифры:

$3{,}7523 \approx 3{,}7500 = 3{,}75;$

$0{,}010278 \approx 0{,}010300 = 0{,}0103;$

$0{,}035021 \approx 0{,}035000 = 0{,}0350;$

$-0{,}02339 \approx -0{,}0234;$

$1{,}(73) = 1{,}7373\ldots \approx 1{,}74;$

$0{,}012345\ldots \approx 0{,}0123;$

$236\,678 \approx 237\,000 = 2{,}37 \cdot 10^5;$

$235\,000 = 235\,000 = 2{,}35 \cdot 10^5.$

Теперь покажем, как надо приближённо складывать, вычитать, умножать и делить действительные числа.

Сумма (разность, произведение, частное) двух чисел считается приближённо равной сумме (разности, произведению, частному) их приближённых значений.

Чтобы правильно приближённо складывать, вычитать, умножать и делить числа, надо правильно их округлять. Как это делать, мы поясним на примерах.

Чтобы вычислить приближённо сумму (разность) двух чисел, надо округлить эти числа с одинаковой точностью, например до одной сотой, затем сложить (вычесть) полученные приближения.

Пример 1. Найдём приближённо сумму и разность чисел $a = 23{,}1834567$ и $b = -4{,}2375$, округлив их с точностью до одной сотой.

Решение. Округляя эти числа с точностью до одной сотой, находим, что $a \approx 23{,}18$, $b \approx -4{,}24$. Откуда и получаем ответ:

$$a + b \approx 18{,}94;\ a - b \approx 27{,}42.$$

Отметим, что аналогично выполняют сложение и вычитание чисел, округлённых с точностью до одной десятой, до одной тысячной, до десятка, до тысячи и т. д.

Сформулируем правило приближённого умножения и деления чисел, округлённых с точностью до третьей значащей цифры (аналогично выполняют приближённое умножение и деление чисел, округлённых с точностью до первой, второй, четвёртой и т. д. значащей цифры).

Чтобы вычислить приближённо произведение (частное) двух чисел, надо округлить эти числа с точностью до одной и той же значащей цифры, например до третьей значащей цифры, **перемножить (разделить) полученные приближения и результат округлить до той же** (третьей) **значащей цифры.**

Пример 2. Пусть $a = 135{,}78665$, $b = 0{,}0068751$.

Вычислим $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ приближённо, округляя числа a и b с точностью до третьей значащей цифры.

Решение. Округлив с точностью до третьей значащей цифры, имеем:

$$a \approx 136,\ b \approx 0{,}00688,$$

тогда

$$a \cdot b \approx 136 \cdot 0{,}00688 = 0{,}93568 \approx 0{,}936;$$

$$\frac{a}{b} \approx \frac{136}{0{,}00688} = \frac{13\,600\,000}{688} = 19\,767{,}4... \approx 19\,800;$$

$$\frac{b}{a} \approx \frac{0{,}00688}{136} = 0{,}00005058... \approx 0{,}0000506.$$

Замечание. Точность вычислений находится в противоречии с простотой вычислений. Бо́льшая точность связана с употреблением большего количества цифр, меньшая требует меньшего количества цифр.

Чем с большим количеством цифр брать приближения двух чисел, тем ближе будет сумма (разность, произведение, частное) этих приближений к сумме (разности, произведению, частному) этих чисел.

Например, пусть дано число $a = 1{,}445$ и требуется вычислить его квадрат.

Если округлим число и результат до первой значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1 \cdot 1 = 1$, что отличается от точного результата (2,088025) примерно на 52%.

Если округлим число и результат до второй значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96 \approx 2{,}0$, что отличается от точного результата примерно на 4,2%.

Если же округлим число и результат до третьей значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1{,}45 \cdot 1{,}45 = 2{,}1025 \approx 2{,}10$, что отличается от точного результата меньше чем на 0,6%.

148. Как читается запись $a \approx a_1$?

149. а) Какими числами приближают действительные числа?
б) Как получить более точные приближения действительного числа?
в) Какие цифры называют значащими в записи числа в виде десятичной дроби?
г) Что значит округлить число до второй значащей цифры?

150. Найдите приближение числа a с недостатком:
а) $a = 0,(2)$ с точностью до 0,001;
б) $a = 1,234567891011...$ с точностью до 0,01;
в) $a = 12,0(1)$ с точностью до 0,1.

151. Найдите приближение с избытком числа a:
а) $a = -0,(3)$ с точностью до единицы третьего разряда после запятой;
б) $a = -1,2777...$ с точностью до единицы второго разряда после запятой;
в) $a = -12,0(01)$ с точностью до единицы первого разряда после запятой.

152. Найдите приближение с точностью до 0,01 числа:
а) 127,(023); б) 0,1(27); в) −1,34(8); г) −0,56789101112... .

153. Укажите значащие цифры числа:
а) 3,52; б) 0,352; в) 0,03520; г) 7,405;
д) 4,203; е) 0,005; ж) 0,420; з) 7,0003;
и) 10,0050; к) 6,700; л) 0,00067; м) 0,0100.

154. Округлите число 1039,9301 до седьмой; шестой; пятой; четвёртой; третьей значащей цифры.

155. Вычислите приближённо сумму, округлив данные числа с точностью до 0,1:
а) $3,288 + 0,123$; б) $-1,236 + 2,555$;
в) $0,100100010... + 0,238$; г) $2,7(3) + 3,(42)$.

156. Вычислите приближённо разность, округлив данные числа с точностью до 0,01:
а) $1,4545 - 1,238$; б) $2,1641 - 3,1145$; в) $7 - 0,(3)$;
г) $1,(45) - 1,2$; д) $2,1264 - 3,(1)$; е) $5,(7) - 2,(5)$.

157. Выполните задания **155—156**, округлив данные в них числа с точностью до 0,001.

158. Вычислите приближённо произведение, округлив данные числа с точностью до второй значащей цифры:
а) $2,35 \cdot 3,251$; б) $-4,3205 \cdot 2,503$; в) $3 \cdot 2,(1)$;
г) $0,56 \cdot 0,(3)$; д) $0,(1) \cdot 0,(2)$; е) $12,(45) \cdot 10,(1)$.

159. Вычислите приближённо частное, округлив данные числа с точностью до второй значащей цифры:

а) $3,57 : 0,259$; б) $-3,28 : 40,12$;
в) $12 : 0,(1)$; г) $0,(2) : 2$;
д) $4,(2) : 1,(3)$; е) $45,6(12) : 10,(2)$.

160. Выполните задания **158—159**, округлив данные в них числа до третьей значащей цифры.

161. Даны числа $a = 5,(1)$ и $b = 2,123456...$. Сумма $a + b$ заключена между целыми числами $5 + 2 = 7$ и $6 + 3 = 9$:

$$7 < a + b < 9.$$

Здесь числа 5 и 2 — приближения чисел a и b с точностью до 1 снизу, а числа 6 и 3 — приближения чисел a и b с точностью до 1 сверху.

Получите более точные границы для суммы $a + b$, найдя приближения a и b с точностью до:

а) 0,1; б) 0,01; в) 0,001.

162. Длина окружности C вычисляется по формуле $C = 2\pi R$, где R — радиус окружности, π — иррациональное число, равное 3,1415926... . Определите границы для C при заданном радиусе 4,15 м с точностью до:

а) 0,1; б) 0,01; в) 0,001.

3.6. Длина отрезка

Рассмотрим несколько примеров измерения длины отрезка. За единичный отрезок (единицу длины) возьмём 1 дм (рис. 1). Обратите внимание: рисунки 1—5 даны в масштабе 1 : 2.

Рис. 1

Пример 1. Отрезок AB, изображённый на рисунке 2, имеет длину 2 дм. То есть на отрезке AB укладывается точно 2 дм. Пишут: $AB = 2$ дм.

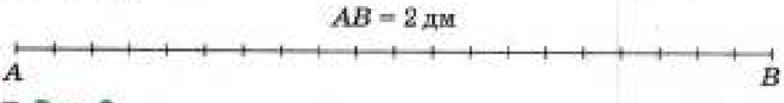


Рис. 2

Пример 2. На рисунке 3 в отрезке AB укладывается 2 дм с некоторым остатком, меньшим 1 дм. В этом случае говорят, что длина AB приближённо равна 2 дм с точностью до 1 дм с недостатком и пишут: $AB \approx 2$ дм.

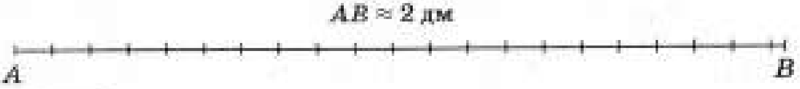


Рис. 3

Пример 3. На рисунке 4 в отрезке AB укладывается 2 дм с остатком, в котором содержится точно 1 см. В этом случае пишут: $AB = 2,1$ дм.

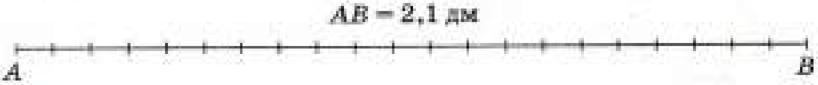


Рис. 4

Пример 4. На рисунке 5 в отрезке AB укладывается 2 дм с остатком, в котором содержится 1 см и остаток, меньший 1 см. В этом случае длина отрезка AB приближённо равна 2,1 дм с точностью до 0,1 дм с недостатком: $AB \approx 2,1$ дм.

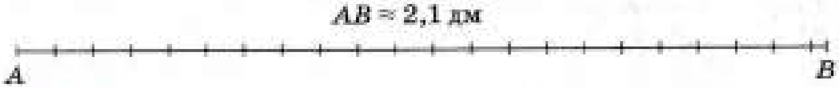


Рис. 5

Пример 5. Если в примере 4 во втором остатке укладывается точно 4 мм, то $AB = 2,14$ дм.

Пример 6. Если в примере 4 во втором остатке укладывается 4 мм с остатком, меньшим 1 мм, то говорят, что длина AB приближённо равна 2,14 дм с точностью до 0,01 дм с недостатком: $AB \approx 2,14$ дм.

Так же как в примерах 1—6, можно измерять длины отрезков любой другой единицей длины: 1 см, 1 м, 1 км, ...

Пример 7. Если $AB = 0,2305$, то это значит, что длина отрезка AB меньше длины единичного отрезка (единицы длины); в AB укладывается 0,2 этой единицы с остатком, в котором содержится 0,03 единицы с остатком, в котором, в свою очередь, укладывается точно 0,0005 единицы.

Если при измерении данного отрезка AB при помощи заданной единицы длины, её десятых, сотых, тысячных и т. д. долей на любом этапе измерения возникает остаток, то длина AB при помощи конечной дроби может быть выражена только приближённо. Точно же длина отрезка AB выражается бесконечной десятичной дробью:

$$AB = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots \qquad (1)$$

Говорят, что отрезок AB имеет длину

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots;$$

здесь a — число, выраженное дробью (1), где

α_0 — приближённая длина отрезка AB с точностью до 1 с недостатком;

α_0,α_1 — приближённая длина отрезка AB с точностью до 0,1 с недостатком;

$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2$ — приближённая длина отрезка AB с точностью до 0,01 с недостатком и т. д.

Пример 8. Если $AB = 3,(07) = 3,070707\ldots$, то

3 — приближённая длина отрезка AB с точностью до 1 с недостатком;

3,0 — приближённая длина отрезка AB с точностью до 0,1 с недостатком;

3,07 — приближённая длина отрезка AB с точностью до 0,01 с недостатком;

3,070 — приближённая длина отрезка AB с точностью до 0,001 с недостатком и т. д.

Отметим, что $3,(07) = 3\frac{7}{99}$. Поэтому данное число можно рассматривать как длину отрезка, в котором укладывается 3 единицы (три единичных отрезка) и ещё $\frac{7}{99}$ единицы.

Итак, пусть задан единичный отрезок, тогда произвольный отрезок AB имеет длину, равную некоторому положительному числу a. Верно и обратное утверждение: если задано любое положительное число a, то можно указать отрезок AB, длина которого равна этому числу.

На практике, чтобы начертить с помощью линейки этот отрезок AB, воспользовались бы его приближённой длиной, заданной десятичной дробью, например, приняли бы, что $AB \approx 3,07$. Ведь обычные измерительные приборы приспособлены к десятичной системе счисления — единица длины делится на 10, 100, 1000, ... равных частей.

163. Длина отрезка равна $a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$. Что обозначают через: а) α_0; б) α_0,α_1; в) $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2$?

164. Дан квадрат со стороной 1 см. Верно ли, что существует действительное число, выражающее длину диагонали этого квадрата?

165. Определите на глаз длину и ширину страницы тетради (в сантиметрах). Найдите при помощи линейки приближение длины и ширины страницы тетради (с недостатком) с точностью до 1; с точностью до 0,1, принимая за единицу измерения 1 см.

166. Определите на глаз размеры крышки парты (стола) в сантиметрах. Проверьте свой глазомер, определив при помощи линейки приближение (с недостатком) длины и ширины крышки парты (стола) с точностью до 1 см.

167. С какой точностью (0,001; 0,01; 0,1; 1; 1000) вы взялись бы измерить длину улицы, если единица измерения 1 м?

168. На рисунке 6 изображены отрезки AB и CD. Принимая за единицу измерения отрезок CD, измерьте на глаз отрезок AB с точностью до 1 с недостатком. Проверьте свой глазомер с помощью линейки.

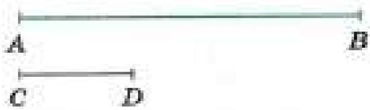


Рис. 6

3.7. Координатная ось

Зададим прямую, на которой выбрано **направление**, называемое **положительным**, и выбрана точка O, называемая **начальной точкой**. Зададим ещё отрезок, длину которого примем за единицу — **единичный отрезок**.

Прямую, на которой выбраны начальная точка, положительное направление и единичный отрезок, называют **координатной осью**.

На рисунке 7 координатная ось нарисована горизонтально, с положительным направлением, идущим вправо от точки O. Но, вообще говоря, координатная ось может быть расположена вертикально или ещё как-нибудь, и положительное направление на ней может быть выбрано так, как это удобно в каждом случае.

Рис. 7

Начальная точка O делит координатную ось на два луча. Один из них, идущий от точки O в положительном направлении, называется **положительным**, другой — **отрицательным**.

Каждой точке координатной оси поставим в соответствие действительное число x по следующему правилу.

Начальной точке O поставим в соответствие число нуль ($x = 0$); точке A, если она находится на положительном луче, поставим в соответствие число x, равное длине отрезка OA ($x = OA$); точке B, если она находится на отрицательном луче, поставим в соответствие отрицательное число x, равное длине отрезка OB, взятой со знаком «−» ($x = -OB$).

Определённую таким образом координатную ось называют **координатной осью Ox** или коротко **осью Ox**.

Число x, согласно указанному правилу соответствующее произвольной точке оси Ox, называют **координатой этой точки.**

Впрочем, в этих названиях буква x может быть заменена любой другой буквой, например y, z, t, ..., и тогда говорят об оси Oy, оси Oz, оси Ot и т. д.

Согласно указанному правилу:

1. **Каждой точке оси Ox соответствует действительное число — координата этой точки.**
2. **Две различные точки A и B оси Ox имеют разные координаты x_1 и x_2.**
3. **Каждое действительное число есть координата некоторой точки оси Ox.**

Иначе говоря, установлено **взаимно однозначное соответствие** между точками оси Ox и действительными числами.

Точку O называют ещё **началом координатной оси Ox.**

Положительный луч называют **положительной координатной полуосью**, а отрицательный луч называют **отрицательной координатной полуосью.**

Для краткости точку, имеющую координату x, называют точкой x.

Например, на рисунке 7 точку A называют точкой 2, а точку B — точкой (–2).

$|x|$ — это расстояние от точки x до начала координат. На рисунке 7 $OA = |2| = 2$, $OB = |-2| = 2$.

Замечание. В младших классах вводилось понятие координатной оси. Но там рассматривались только рациональные точки координатной оси, т. е. точки, имеющие рациональные координаты x, и прямая была «дырявая» — без иррациональных точек. Однако координата x произвольной точки координатной оси есть, вообще говоря, действительное число, т. е. оно может быть как рациональным, так и иррациональным числом. Этот вопрос и был выяснен выше на основании общего понятия длины отрезка, введённого в предыдущем пункте. Теперь координатная ось перестала быть «дырявой» — каждой её точке соответствует действительное число.

169. Начертите в тетради координатную ось с единичным отрезком в 2 клетки. Укажите на этой оси числа:

а) 2; 3; 4; 5; б) –1; –2; –3; –4;

в) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{7}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{2}$; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{4}{2}$; $-\frac{5}{2}$; $-\frac{6}{2}$; $-\frac{7}{2}$.

170. Начертите в тетради координатную ось с единичным отрезком в 10 клеток. Укажите на этой оси числа:

а) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9;

б) –0,1; –0,2; –0,3; –0,4; –0,5; –0,6; –0,7; –0,8; –0,9.

171. Начертите координатную ось и укажите на ней данные числа, выбрав удобный единичный отрезок и положение начала координатной оси:

а) $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{6}$;

б) $-1{,}2$; $-\frac{3}{5}$; $-1\frac{1}{5}$; $-0{,}5$; $-1{,}1$; $-\frac{4}{5}$;

в) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; 0,75; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{12}$;

г) $-1\frac{2}{3}$; $-2{,}25$; $-1\frac{3}{4}$; $-1{,}75$; $-1\frac{5}{12}$; $-1\frac{5}{6}$.

172. Укажите на координатной оси числа:

а) 1026; 1027; 1029;

б) –784; –786; –790;

в) 300; 400; 600;

г) –100; –200; –250;

д) –1000; –2000; –4000;

е) –0,24; –0,28; –0,22.

Дополнения к главе 1

1. Делимость чисел

Признаки делимости. В 5—6 классах уже изучались некоторые признаки делимости натуральных чисел. Справедливость этих признаков доказывалась на конкретных примерах. Теперь признаки делимости натуральных чисел можно доказать в общем виде.

Сначала докажем утверждение, которое понадобится далее.

Теорема 1

Если каждое из натуральных чисел a и b делится на натуральное число c, то их сумма и разность делятся на c.

Доказательство. Так как каждое из натуральных чисел a и b делится на натуральное число c, то существуют натуральные числа m и n, такие, что

$$a = cm \quad \text{и} \quad b = cn.$$

Но тогда сумму и разность чисел a и b можно записать так:

$$a + b = cm + cn = c\,(m + n),$$
$$a - b = cm - cn = c\,(m - n).$$

Это означает, что сумма и разность натуральных чисел a и b делятся на натуральное число c.

Напомним, что каждое многозначное число можно записать в виде суммы разрядных слагаемых:

$a = \overline{a_1a_0} = 10a_1 + a_0$ $(a_1 \neq 0)$ — для двузначного числа,

$a = \overline{a_2a_1a_0} = 10^2a_2 + 10a_1 + a_0$ $(a_2 \neq 0)$ — для трёхзначного числа,

$a = \overline{a_3a_2a_1a_0} = 10^3a_3 + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0$ $(a_3 \neq 0)$ — для четырёхзначного числа,

. . . .

$a = \overline{a_n\ldots a_1a_0} = 10^na_n + \ldots + 10a_1 + a_0$ $(a_n \neq 0)$ — для $(n + 1)$-значного числа, (1)

где каждая из цифр a_0, a_1, a_2, ... может быть равна одной из десяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, но цифра старшего разряда a_n не может быть нулём. Запись $\overline{a_n\ldots a_1a_0}$ есть условная запись правой части равенства (1).

Признаки делимости натуральных чисел можно доказать, пользуясь разложением натурального числа на разрядные слагаемые и теоремой 1.

Докажем признаки делимости на 9.

Теорема 2

Если сумма цифр $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ числа $\overline{a_n\ldots a_1a_0}$ делится на 9, то и само число делится на 9.

Доказательство. Для определённости докажем этот признак делимости для $n = 6$, т. е. для семизначного числа:

$$a = \overline{a_6\ldots a_2a_1a_0} = 10^6a_6 + \ldots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0.$$

Отметим, что приведённое ниже доказательство сохраняет силу при любом другом количестве цифр числа a.

Прежде всего заметим, что

$$10 = 9 + 1,\ 10^2 = 99 + 1,\ 10^3 = 999 + 1,\ \ldots,\ 10^6 = 999\,999 + 1,$$

поэтому число a можно записать так:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + (9 + 1)a_1 + (99 + 1)a_2 + (999 + 1)a_3 + (9999 + 1)a_4 + \\ &\quad + (99\,999 + 1)a_5 + (999\,999 + 1)a_6 = \\ &= (9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + 9999a_4 + 99\,999a_5 + 999\,999a_6) + \\ &\quad + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6). \qquad (2) \end{aligned}$$

Так как каждое слагаемое суммы в первых скобках делится на 9, то по теореме 1 и вся сумма делится на 9.

Если сумма во вторых скобках делится на 9, то по теореме 1 и вся сумма, т. е. число a, делится на 9. А это и требовалось доказать.

Верно и обратное утверждение:
если число $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ делится на 9, то и сумма его цифр

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

делится на 9.

Это утверждение также докажем для $n = 6$.

Из равенства (2) следует равенство

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 =$$
$$= a - (9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + 9999a_4 + 99\,999a_5 + 999\,999a_6).$$

Так как число a и сумма в скобках делятся на 9, то на основании теоремы 1 и их разность, т. е. число

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,$$

делится на 9, что и требовалось доказать.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Для нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел можно воспользоваться основной теоремой арифметики, т. е. разложить эти числа на простые множители и вычислить произведение всех их общих простых множителей, взяв каждый из них в наименьшей степени, встречающейся в этих разложениях.

Пример 1. Вычислим НОД (90, 84).

Так как $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, то

$$\text{НОД}(90, 84) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Далее будет рассмотрен и другой способ нахождения наибольшего общего делителя — с помощью алгоритма Евклида. Этот второй способ не требует предварительного разложения чисел на множители, а это очень важно, так как разложение на множители больших чисел является весьма трудной задачей.

Для нахождения наименьшего общего кратного (НОК) двух натуральных чисел можно воспользоваться основной теоремой арифметики, т. е. разложить эти числа на простые множители и вычислить произведение всех их простых множителей, взяв каждый из них в наибольшей степени, встречающейся в этих разложениях.

Из этого правила следует, что для вычисления НОК двух натуральных чисел можно умножить НОД этих чисел на все множители этих двух разложений, не вошедшие в НОД.

Пример 2. Вычислим НОК (90, 84).

Так как $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, то

$$\text{НОК}(90, 84) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260.$$

Для нахождения НОК двух натуральных чисел можно воспользоваться следующим равенством:

$$НОК(a, b) \cdot НОД(a, b) = a \cdot b.$$

Докажем сначала это равенство. Пусть $НОД(a, b) = d$, тогда $a = m \cdot d$, $b = n \cdot d$, где m и n не имеют общих простых делителей. Тогда $НОК(a, b) = m \cdot n \cdot d$ и

$$НОК(a, b) \cdot НОД(a, b) = (m \cdot n \cdot d) \cdot d = (m \cdot d) \cdot (n \cdot d) = a \cdot b,$$

что и требовалось доказать.

Вычислим НОК(90, 84), разделив произведение чисел 90 и 84 на их наибольший общий делитель 6:

$$НОК(90, 84) = 90 \cdot 84 : 6 = 1260.$$

Пример 3. Вычислим НОК (83, 90).

Так как НОД(83, 90) = 1, то

$$НОК(83, 90) = 83 \cdot 90 : 1 = 7470.$$

Алгоритм Евклида. Рассмотрим способ нахождения наибольшего общего делителя (НОД) натуральных чисел a и b.

Пусть даны натуральные числа a и b, $a \geqslant b$. Если a делится на b, т. е. $a = nb$, то

$$НОД(a, b) = b.$$

Если же a не делится нацело на b, то разделим a на b с остатком:

$$a = n_1 b + r_1, \tag{3}$$

где n_1 и r_1 — натуральные числа и $0 < r_1 < b$.

Теперь разделим с остатком b на r_1:

$$b = n_2 r_1 + r_2,$$

где n_2 — натуральное число, а r_2 — целое число, такое, что $0 \leqslant r_2 < r_1$.

Если $r_2 = 0$, то $b = n_2 r_1$ и число r_1 является делителем числа b, а в силу равенства (3) и делителем числа a. Значит, число r_1 — общий делитель чисел a и b. Так как любой общий делитель чисел a и b является в силу равенства (3) делителем числа r_1, то $НОД(a, b) = r_1$.

Если $r_2 > 0$, то разделим с остатком r_1 на r_2 и продолжим этот процесс, пока на k-м шаге не получится система равенств

$$\begin{cases} a = n_1 b + r_1, \\ b = n_2 r_1 + r_2, \\ r_1 = n_3 r_2 + r_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_{k-3} = n_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}, \\ r_{k-2} = n_k r_{k-1}, \end{cases} \tag{4}$$

т. е. пока не получится остаток $r_k = 0$. Это обязательно случится, потому что $r_1, r_2, \dots, r_{k-1}$ — натуральные числа,

$$r_1 > r_2 > \dots > r_{k-1}.$$

Просматривая цепочку равенств (4) снизу вверх, находим, что r_{k-1} есть общий делитель чисел a и b. Больше того, если просматривать цепочку равенств (4) сверху вниз, то окажется, что любой общий делитель a и b является делителем числа r_{k-1}, т. е.

$$\text{НОД}(a, b) = r_{k-1}.$$

Проведённый процесс и называют алгоритмом Евклида.

Если окажется, что $r_{k-1} = 1$, т. е. НОД $(a, b) = 1$, то числа a и b не будут иметь общего простого делителя. В этом случае говорят, что числа a и b **взаимно простые**.

Итак, НОД(a, b) равен последнему отличному от нуля остатку в алгоритме Евклида.

Рассмотрим применение алгоритма Евклида для натуральных чисел на примерах.

Пример 4. Вычислим НОД(133, 56).

Применим алгоритм Евклида:

$133 = 56 \cdot 2 + 21,$
$56 = 21 \cdot 2 + 14,$
$21 = 14 \cdot 1 + 7,$
$14 = 7 \cdot 2.$

$$\begin{array}{r|l} 133 & 56 \\ \cline{2-2} 112 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 56 & 21 \\ \cline{2-2} 42 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 21 & 14 \\ \cline{2-2} 14 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 14 & 7 \\ \cline{2-2} 14 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Справа показана запись последовательного деления.

Следовательно, НОД(133, 56) = 7.

Пример 5. Вычислим НОД(83, 90).

Применим алгоритм Евклида:

$90 = 83 \cdot 1 + 7,$
$83 = 7 \cdot 11 + 6,$
$7 = 6 \cdot 1 + 1,$
$6 = 1 \cdot 6.$

$$\begin{array}{r|l} 90 & 83 \\ \cline{2-2} 83 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 83 & 7 \\ \cline{2-2} 7 & 11 \\ \cline{1-1} 13 & \\ 7 & \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 7 & 6 \\ \cline{2-2} 6 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 1 \\ \cline{2-2} 6 & 6 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Следовательно, НОД(83, 90) = 1, т. е. числа 83 и 90 взаимно простые.

Алгоритм Евклида иногда применяется при решении геометрических задач.

Пример 6. Определим число квадратов, на которые можно разрезать прямоугольник:

а) 12×4; б) 17×5; в) 165×72,

используя алгоритм Евклида.

Решение. а) Применив алгоритм Евклида для чисел 12 и 4, получим, что прямоугольник 12×4 можно разрезать на три квадрата со стороной 4 (рис. 8).

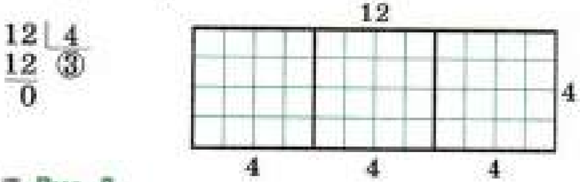


Рис. 8

б) Применив алгоритм Евклида для чисел 17 и 5, получим, что прямоугольник 17×5 можно разрезать на три квадрата со стороной 5, два квадрата со стороной 2 и два квадрата со стороной 1 — всего на 7 квадратов (рис. 9).

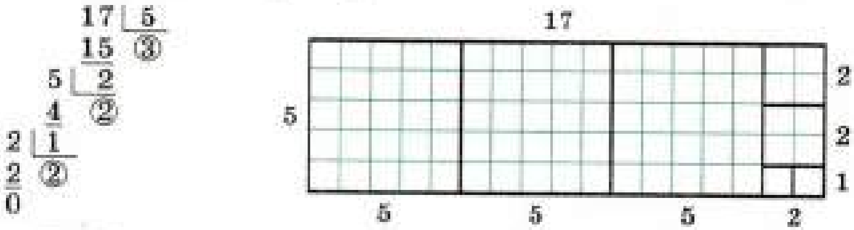
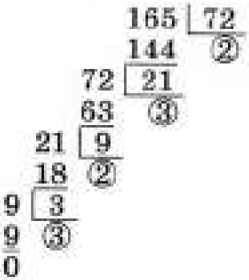


Рис. 9



в) Применив алгоритм Евклида для чисел 165 и 72, получим, что прямоугольник 165×72 можно разрезать на два квадрата со стороной 72, три квадрата со стороной 21, два квадрата со стороной 9 и три квадрата со стороной 3. Значит, данный прямоугольник можно разрезать на 10 квадратов.

Справа показана запись последовательного деления.

Деление с остатком целых чисел. Разделить с остатком целое число a на отличное от нуля целое число b — значит найти такие целые числа q и r, что

$$a = b \cdot q + r \tag{5}$$

и

$$0 \leqslant r < |b|. \tag{6}$$

Число q называют неполным частным, число r — остатком. Таким образом, в этом определении подразумевается, что остаток r — число неотрицательное.

Если $r = 0$, то говорят, что a делится на b нацело. И тогда число q называют частным.

Справедлива следующая теорема:

Теорема

Для любых целых чисел a и b ($b \neq 0$) существует, и притом только одна, пара целых чисел r и q, таких, что выполнены условия (5) и (6).

Таким образом, при делении целого числа a на целое отличное от нуля число b может получиться только один из $|b|$ остатков: 0, 1, 2, ..., $|b| - 1$.

Пример 7. Выпишем все целые числа, которые при делении на 7 дают остаток: а) 3; б) 0; в) 6.

Решение. а) Это все числа вида $a = 7m + 3$, где m — любое целое число.

б) Это все числа вида $a = 7m$, где m — любое целое число.

в) Это все числа вида $a = 7m + 6$, где m — любое целое число.

Деление с остатком целых чисел применяется для решения многих задач.

Задача. Найти все целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 2 дают остаток 1.

Решение. Все целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, можно записать в виде $a = 3m + 2$, где m — любое целое число. Из чисел вида $a = 3m + 2$ выберем те, которые при делении на 2 дают остаток 1. Ясно, что это будут числа a, соответствующие нечётным m, т. е. $m = 2n + 1$, где n — любое целое число.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют лишь числа вида $a = 3(2n + 1) + 2 = 6n + 5$, где n — любое целое число.

Ответ: $6n + 5$, где n — любое целое число.

Доказываем (173—176).

173. Докажите признак делимости (для $n = 5$ или $n = 6$):

а) число $a = \overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 2, если число a_0 делится на 2;

б) число $a = \overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 5, если число a_0 делится на 5;

в) число $a = \overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 10, если число $a_0 = 0$;

г) число $a = \overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 4, если или число $\overline{a_1 a_0}$ (при $a_1 \neq 0$) делится на 4, или число a_0 (при $a_1 = 0$) делится на 4;

д) число $a = \overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 25, если или число $\overline{a_1 a_0}$ (при $a_1 \neq 0$) делится на 25, или $a_1 = a_0 = 0$;

е) число $a = \overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 3, если сумма его цифр $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ делится на 3.

174. Докажите признак делимости: число $a = \overline{a_5 \ldots a_2 a_1 a_0}$ делится на 11, если сумма

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$$

делится на 11.

175. Придумайте и докажите признак делимости:
а) на 125; б) на 8.

176. Докажите обратное утверждение для каждого признака делимости.

177. Вычислите НОД и НОК чисел:

а) 231 и 217;	б) 639 и 221;	в) 237 и 215;
г) 242 и 642;	д) 679 и 485;	е) 1998 и 111;
ж) 999 и 666;	з) 1999 и 2000;	и) 25 и 27.

178. **Доказываем.** Докажите, что произведение:
а) двух последовательных целых чисел делится на 2;
б) трёх последовательных целых чисел делится на 6;
в) четырёх последовательных целых чисел делится на 24.

179. **Исследуем.** а) Найдите все целые числа, которые при делении на 4, на 3, на 2 дают остаток 1.
б) Найдите все целые числа, которые при делении на 4 дают остаток 3, при делении на 3 дают остаток 2, при делении на 2 дают остаток 1.

180. Определите число квадратов, на которые можно разрезать прямоугольник:
а) 18×5; б) 28×11; в) 157×44,
используя алгоритм Евклида.

2. Исторические сведения

Л. Эйлер

Потребности счёта привели человека к понятию натурального числа. Постепенно математики Вавилона, Египта, Китая, Греции ещё до новой эры заложили основы науки — теории чисел, изучающей свойства натуральных чисел, в частности вопросы распределения простых чисел среди натуральных.

В России и в Советском Союзе крупнейшими представителями теории чисел были Л. Эйлер, П. Л. Чебышёв, И. М. Виноградов.

Большой вклад в теорию чисел внёс величайший математик Леонард Эйлер (1707—1783). Современники считали Л. Эйлера общим учителем математиков второй половины XVIII в., но он был также выдающимся механиком и физиком. По происхождению Эйлер был швейцарцем, однако более 30 лет он прожил в России, где его избрали академиком — членом Петербургской академии наук. Свои основные научные работы Эйлер написал в Петербурге. Он так описывает роль России в своём творчестве: «Его королевское величество (Фридрих II) недавно меня спрашивал, где я изучил то, что знаю. Я, согласно истине, ответил, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской академии наук».

П. Л. Чебышёв

Л. Эйлер написал учебник «Полное введение в алгебру», по образцу которого в дальнейшем писались другие учебники алгебры.

В XIX в. многие задачи теории чисел были решены великим русским учёным академиком Пафнутием Львовичем Чебышёвым (1821—1894). Он внёс большой вклад и в другие направления математики, а также механики, в теорию вероятностей, теорию механизмов, теорию функций и т. д.

В XX в. крупнейшим представителем теории чисел был советский математик академик Иван Матвеевич Виноградов (1891—1983), директор математического Института Академии наук СССР.

Приведём примеры отдельных решённых и нерешённых проблем в теории чисел.

П. Л. Чебышёв показал, что *среди натуральных чисел от n до $2n$ $(n > 1)$ имеется хотя бы одно простое число.*

И. М. Виноградов доказал для достаточно больших чисел проблему Гольдбаха, остававшуюся нерешённой 200 лет: *любое нечётное число, большее 5, есть сумма трёх простых чисел*. Однако для всех нечётных чисел проблема Гольдбаха до сих пор не решена.

И. М. Виноградов

До сих пор не подтверждено также высказывание Эйлера (проблема Эйлера): *каждое чётное число, большее 4, можно представить как сумму двух простых чисел.*

Математиков давно уже занимает следующий вопрос. Пусть N — натуральное число, а $a(N)$ — количество простых чисел, не превышающих N. Надо возможно точнее оценить число $a(N)$. Существенный вклад в решение этого вопроса внёс П. Л. Чебышёв.

В связи с необходимостью измерять различные величины — длины, площади, объёмы, массы и др. — наряду с натуральными числами возникли дробные или положительные рациональные числа. Дробные числа использовались математиками ещё до новой эры. Результаты практических измерений обыкновенно даются рациональными числами, выражающими приближённо измеряемую величину. При этом широко употребляют конечные десятичные дроби.

По-видимому, впервые десятичные дроби появились в Китае, и связано это с десятичной системой мер, которая существовала здесь ещё во II в. до н. э.

В 1427 г. самаркандский математик и астроном Джемшид ибн Масуд аль-Каши подробно описал систему десятичных дробей и действий над ними. В Европе десятичные дроби стали известны через 100 с лишним лет после этого благодаря трудам нидерландского инженера и учёного С. Стевина. В русской литературе учение о десятичных дробях было впервые изложено в «Арифметике» Леонтия Филипповича Магницкого (1669—1739) — первом русском печатном учебнике по математике (1703).

Десятичные дроби благодаря простой записи и сходным с натуральными числами правилам действий получили широкое распространение в практических расчётах.

Древние греки за несколько столетий до новой эры обнаружили, что наряду с рациональными отрезками, т. е. отрезками, имеющими длины, выражаемые рациональными числами, имеются также нерациональные отрезки, длины которых выражаются рациональными числами только приближённо. Для точного выражения требуется введение новых чисел. Греки, например, умели доказывать, что *диагональ квадрата со стороной длины 1 не выражается рациональным числом.*

Ход их рассуждений был примерно таков.

Предположим противное, что длина диагонали есть рациональное число $\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Так как площадь квадрата $ACMN$ (рис. 10), построенного на диагонали AC квадрата $ABCD$, равна двум площадям квадрата $ABCD$, то

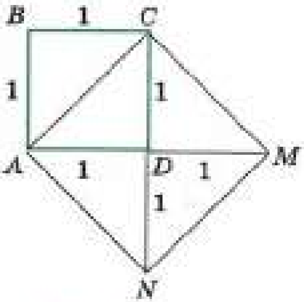


Рис. 10

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

т. е.

$$p^2 = 2q^2.$$

Так как правая часть этого равенства делится на 2, то p^2 делится на 2. Это означает, что p — чётное число:

$$p = 2p_1,$$

так как если p — нечётное число, то и p^2 — нечётное число. Сократив равенство

$$4p_1^2 = 2q^2$$

на 2, получим, что левая часть полученного равенства

$$2p_1^2 = q^2$$

делится на 2, но тогда q^2 делится на 2, т. е. q должно быть чётным числом:

$$q = 2q_1.$$

Это означает, что дробь $\frac{p}{q}$ сократимая, что противоречит условию.

Следовательно, наше предположение неверно, и поэтому длина диагонали не выражается рациональным числом. Она выражается иррациональным числом.

Таким образом, при решении математических задач стали появляться иррациональные (нерациональные) числа. Такими, например, являются числа, квадраты которых равны 2, 3, 17. Примеры таких чисел знал, а может быть, и впервые их открыл Пифагор — знаменитый греческий математик VI в. до н. э.

Важную роль в математике играет число, равное отношению длины окружности к её диаметру. Обозначение этого числа греческой буквой π («пи»)[1] получило в XVIII в. широкое распространение после работ Л. Эйлера.

Учёные вычисляли приближённо значение π с разной точностью. Так, великий греческий математик и механик Архимед (III в. до н. э.) доказал неравенства

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Д. аль-Каши выразил приближение π шестидесятеричной дробью

$$\pi \approx 3°8'29''44''' = 3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3}.$$

Но только в XVIII в. было доказано, что число π иррациональное.

Ещё во II—I вв. до н. э. китайские учёные использовали отрицательные числа для обозначения противоположных состояний: наличие — отсутствие, имущество — долг, приход — расход и т. д.

Отрицательные числа использовали и индийские математики в VII в. н. э.

В Европе первым к понятию отрицательного числа пришёл итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в XIII в. Когда при решении уравнений у него получались отрицательные ответы, он объяснял их как долг.

[1] *От* греческого слова *окружность*, начинающегося с буквы π.

Много веков отрицательные числа считались чем-то надуманным и мало применялись в математике. Широкое распространение они получили после введения в математику координатной оси. Ведь координатная ось имеет два направления, поэтому все её точки нельзя представить только положительными числами — нужны и отрицательные.

181. **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о жизни и вкладе в математику: а) Л. Эйлера; б) П. Л. Чебышёва; в) И. М. Виноградова.

ГЛАВА 2
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

При изучении главы 2 вам предстоит освоить новые объекты — одночлены, многочлены, алгебраические дроби, свойства операций над этими алгебраическими объектами. Особенно внимательно следует отнестись к формулам сокращённого умножения, владение которыми поможет вам в решении многих задач. Полученные знания помогут вам лучше подготовиться к решению линейных уравнений и их систем в 7 классе и к решению более сложных уравнений и их систем в старших классах.

§ 4. Одночлены

4.1. Числовые выражения

При решении многих задач приходится над заданными числами производить арифметические действия: сложение, вычитание, умножение и деление. Но часто, прежде чем доводить до конца каждое из этих действий, удобно заранее указать порядок (план), следуя которому надо производить эти действия. Этот план сводится к тому, что по данным задачи с помощью чисел, знаков действий и скобок составляется **числовое выражение.**

Приведём примеры числовых выражений:

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}-(3-5)\cdot\frac{3}{4};$$

$$(937-811):63+\frac{3-21}{9}-2\cdot(7-2^4:2);$$

$$(39-15):2^3+\frac{3\cdot 2^2}{3-7}.$$

Если в числовом выражении выполнить все указанные в нём действия, то в результате получим действительное число, про которое говорят, что оно равно данному числовому выражению. Это число называют ещё **значением числового выражения**.

Так, первое числовое выражение равно 2, второе равно тоже 2, третье же равно 0. Поэтому пишут:

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}-(3-5)\cdot\frac{3}{4}=2;$$

$$(937-811):63+\frac{3-21}{9}-2\cdot(7-2^4:2)=2;$$

$$(39-15):2^3+\frac{3\cdot 2^2}{3-7}=0.$$

Числовые выражения иногда используют для решения текстовых задач.

Задача 1. Путник шёл 3 ч со скоростью 4 км/ч и 2 ч со скоростью 5 км/ч. Определите среднюю скорость путника на пройденном участке пути.

Решение. Путник прошёл $3\cdot 4+2\cdot 5=22$ (км) за $3+2=5$ (ч). Поэтому его средняя скорость на этом участке пути равна

$$22:5=4{,}4 \text{ (км/ч)}.$$

Решение этой задачи можно записать короче с помощью числового выражения:

$$\frac{3\cdot 4+2\cdot 5}{3+2}=\frac{22}{5}=4{,}4 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 4,4 км/ч.

Задача 2. Первый кусок сплава массой 300 г содержит 20% олова, а второй кусок сплава массой 700 г содержит 40% олова. Определите процентное содержание олова в новом сплаве, полученном сплавлением этих кусков.

Решение. Первый кусок сплава содержит $0{,}2\cdot 300=60$ (г) олова, а второй кусок сплава содержит $0{,}4\cdot 700=280$ (г) олова. Тогда в новом сплаве массой $300+700=1000$ (г) содержится $60+280=340$ (г) олова. Олово составляет $\frac{340\cdot 100}{1000}=34$ (%) массы нового сплава.

Решение этой задачи можно записать короче с помощью числового выражения:

$$\frac{(0{,}2\cdot 300+0{,}4\cdot 700)\cdot 100}{300+700}=\frac{340\cdot 100}{1000}=34\ (\%).$$

Ответ: 34%.

Подчеркнём, что числовое выражение определяет, какие арифметические действия и в каком порядке надо произвести над данными числами. Скобки помогают установить порядок действий.

При этом, конечно, предполагается, что все действия возможно осуществить. Поясним эти слова.

Всегда возможно произвести сложение, вычитание и умножение любых чисел. А вот делить одно число на другое можно, только если делитель не равен нулю: на нуль делить нельзя. Если в данном выражении на некотором этапе вычислений требуется делить на нуль, то это **выражение не имеет смысла**.

Например, выражения

$$0{,}37 - \frac{3{,}1 + 0{,}172}{1{,}5 + (2-5):2}; \quad \frac{35{,}079}{\frac{1}{3} - 0{,}(3)}$$

не имеют смысла, потому что при выполнении указанных в них действий требуется делить на нуль.

Заметим, что числовое выражение может состоять из одного числа.

182. а) Какое числовое выражение имеет смысл?
б) Какое числовое выражение не имеет смысла?
в) Может ли числовое выражение состоять из одного числа?

183. Найдите значение числового выражения:

а) $2 : \left(-6\frac{7}{13} + 3\frac{17}{39}\right)$;
б) $\left(3{,}5 \cdot 24 - 5\frac{2}{3} : \frac{1}{18}\right) \cdot 5$;

в) $3 \cdot \left(5\frac{4}{9} - 6\frac{5}{18}\right)$;
г) $\left(-12\frac{2}{3}\right) : 3\frac{1}{6} + 13{,}5 : 4{,}5$;

д) $6 \cdot (-1{,}25) + (-4) : \left(-1\frac{1}{3}\right)$;
е) $\left(4{,}3 - 5\frac{4}{15}\right) \cdot 4\frac{4}{29} - 2{,}5 \cdot 2$.

184. Установите, какие из следующих выражений имеют смысл и какие — не имеют. Для выражений, имеющих смысл, найдите их числовые значения:

а) $\dfrac{4\frac{1}{3} + 5{,}4 - 0{,}2(6)}{0{,}0(23) - 0{,}1} : \left(-5 + 7\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3}\right)$;

б) $3\frac{1}{7} + 1\frac{1}{4} \cdot \left(75 : \frac{25}{3} - 14\right) \cdot \frac{4}{7}$;

в) $\left(\dfrac{3{,}(4) + 6\frac{5}{9}}{5\frac{7}{8} - 2\frac{1}{4} - 0{,}5} : \left(12\frac{8}{11} - 8\frac{50}{99}\right)\right) \cdot \left(2\frac{3}{8} - 1\frac{5}{8}\right)$.

185. Составьте числовое выражение, равное 100; 0,2; –4.

186. Имеет ли смысл данное числовое выражение:

а) $\dfrac{6{,}19}{6{,}24 - 3{,}12 \cdot 2}$; б) $\dfrac{7{,}8}{-5{,}64 - 3{,}1233}$;

в) $\dfrac{2{,}4 : 3}{0{,}6 - 1{,}8 : 3}$; г) $\dfrac{3{,}4 \cdot 1{,}4}{-1{,}8 - 3\frac{2}{3} \cdot (-2)}$?

187. Запишите:

а) квадрат числа –2;
б) удвоенное число 12;
в) куб числа 0,5;
г) утроенное число 5;
д) удвоенный квадрат числа 2;
е) утроенный куб числа –1;
ж) произведение чисел –5 и 4;
з) удвоенное произведение чисел 7 и 2;
и) произведение числа 4 и удвоенного числа 6;
к) произведение числа –5 и квадрата числа 3.

188. а) Турист шёл 1 ч со скоростью 5 км/ч и 4 ч со скоростью 4 км/ч. Определите среднюю скорость туриста на пройденном участке пути.

б) Турист шёл 1 ч со скоростью 4 км/ч и 4 ч со скоростью 5 км/ч. Определите среднюю скорость туриста на пройденном участке пути.

189. а) Первый кусок сплава массой 300 г содержит 40% олова, а второй кусок сплава массой 200 г содержит 30% олова. Определите процентное содержание олова в новом сплаве, полученном сплавлением этих кусков.

б) Первый кусок сплава массой 300 г содержит 30% олова, а второй кусок сплава массой 200 г содержит 40% олова. Определите процентное содержание олова в новом сплаве, полученном сплавлением этих кусков.

190. а) Зарплата сотрудника фирмы составляла 20 000 р. Сначала её повысили на 30%. Через некоторое время эту зарплату увеличили ещё на 20%. Определите новую зарплату сотрудника фирмы.

б) Цена товара составляла 30 р. Сначала её понизили на 20%. Через некоторое время эту новую цену уменьшили ещё на 10%. Определите окончательную цену товара.

в) В понедельник цена акции увеличилась на 20%, во вторник она увеличилась ещё на 30%. На сколько процентов за эти два дня увеличилась цена акции?

г) Во вторник цена акции увеличилась на 30%, в среду она уменьшилась на 30%. Как изменилась цена акции за эти два дня и на сколько процентов?

4.2. Буквенные выражения

Если в числовом выражении некоторые (или все) входящие в него числа заменить буквами (разные числа — разными буквами), то получится буквенное выражение.

Чаще всего используют буквы латинского алфавита.

Пример 1. Если в числовом выражении

$$\frac{5+3}{2}$$

заменить число 5 буквой a, число 3 буквой b и число 2 буквой c, то получим буквенное выражение

$$\frac{a+b}{c}.$$

Пример 2. Если в числовом выражении

$$\frac{(5-3)+(5-2)}{5-1}$$

заменить число 5 буквой x и число 3 буквой y, то получим буквенное выражение

$$\frac{(x-y)+(x-2)}{x-1}.$$

Вот ещё примеры буквенных выражений:

$$a+(-a)-(a+3), \quad x+(y+z), \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{x+a}{c-d}.$$

Буквенное выражение может состоять и из одной буквы, например: a, c, n, x.

Буквенные выражения иногда используют для решения однотипных текстовых задач. При этом решение задачи составлением буквенного выражения часто называют **решением задачи в общем виде**. Таким способом пользуются в геометрии и физике.

Задача 1. Два брата коллекционируют почтовые марки. У старшего брата в 3 раза больше марок, чем у младшего, а всего у них a марок. Сколько марок у каждого?

Решение. У младшего брата 1 часть всех марок, у старшего брата 3 такие же части, а всего на a марок приходится $1+3=4$ части. Тогда на 1 часть приходится $\frac{a}{4}$ марок, а на 3 части $\frac{3a}{4}$ марок. Итак, у младшего брата $\frac{a}{4}$ марок, у старшего брата $\frac{3a}{4}$ марок.

Ответ: $\frac{a}{4}$ марок и $\frac{3a}{4}$ марок.

Задача 2. Турист шёл a ч со скоростью 5 км/ч и b ч со скоростью 4 км/ч. Определите среднюю скорость туриста.

Решение. Турист прошёл $(5a + 4b)$ км за $(a + b)$ ч. Поэтому его средняя скорость на пройденном участке пути равна $\frac{5a + 4b}{a + b}$ км/ч.

Ответ: $\frac{5a + 4b}{a + b}$ км/ч.

Задача 3. Вкладчик положил в банк a р. Банк обязуется выплачивать ему ежемесячно $p\%$ дохода от первоначальной суммы вклада. Каков будет доход вкладчика через 7 месяцев?

Решение. За каждый месяц банк выплачивает вкладчику $a \cdot \frac{p}{100}$ р. дохода. Значит, за 7 месяцев его доход составит $\frac{7ap}{100}$ р.

Ответ: $\frac{7ap}{100}$ р.

Задача 4. Вкладчик положил в банк a р. Банк обязуется начислять на его счёт в конце каждого года $p\%$ дохода от суммы вклада, находившейся на счёте в течение этого года. Какая сумма будет на счёте у вкладчика в конце второго года?

Решение. К концу первого года сумма вклада (a р.) увеличится на $a \cdot \frac{p}{100}$ р. и составит $b = a + a \cdot \frac{p}{100} = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ (р.). В конце второго года сумма вклада (b р.) увеличится ещё на $p\%$ и составит

$$b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \text{ (р.)}.$$

Ответ: $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ р.

Буквенные выражения называют ещё **алгебраическими выражениями**, числа также называют алгебраическими выражениями.

Если два данных алгебраических выражения соединить знаком сложения, вычитания, умножения или деления, то получим снова алгебраическое выражение, которое называют соответственно **суммой**, **разностью**, **произведением** или **частным данных алгебраических выражений**. Впрочем, не для всяких двух выражений можно определить частное. Это связано с делением на 0.

Например, сумма, разность, произведение и частное двух алгебраических выражений $a + 1$ и $a - b$ есть, в свою очередь, алгебраические выражения, имеющие соответственно вид:

$$(a + 1) + (a - b),\ (a + 1) - (a - b),\ (a + 1) \cdot (a - b),$$
$$(a + 1) : (a - b), \text{ или } \frac{a + 1}{a - b}.$$

Знак умножения часто опускают. Например, произведение $(a + 1) \cdot (a - b)$ записывают и так: $(a + 1)(a - b)$.

191. а) Что называют буквенным выражением? Приведите примеры.
б) Может ли буквенное выражение состоять из одной буквы?
в) Можно ли называть число алгебраическим выражением?
г) Что называют суммой, разностью, произведением, частным двух данных алгебраических выражений? Приведите примеры.
д) Можно ли опускать знак умножения при записи произведения алгебраических выражений?

192. а) В числовом выражении $\frac{2 \cdot 5 - 5 : 3}{7 \cdot 5 - 1}$ замените число 5 буквой a. Запишите полученное алгебраическое выражение.
б) В числовом выражении $4 \cdot (6 \cdot 3 - 6) - 6 \cdot (4 \cdot 3 - 4)$ замените число 4 буквой a, число 6 — буквой b. Запишите полученное алгебраическое выражение.

193. Напишите алгебраическое выражение, с помощью которого вычисляется:
а) путь при равномерном движении, если скорость движущегося тела v, время движения t;
б) площадь прямоугольника длины a, ширины b;
в) периметр прямоугольника длины k, ширины t;
г) длина окружности радиуса r;
д) площадь круга радиуса R;
е) объём прямоугольного параллелепипеда с длиной рёбер a, b и c.

194. Напишите сумму, разность, произведение и частное двух алгебраических выражений $(a + b)$ и $(3 - c)$.

195. Алгебраическое выражение $2n$, где n — любое натуральное число, задаёт натуральные числа, делящиеся на 2 (чётные числа). Напишите алгебраическое выражение, задающее:
а) целые числа, делящиеся нацело на 5;
б) натуральные числа, делящиеся на 5 с остатком 3.

196. а) Два брата коллекционируют почтовые марки. У старшего брата в n раз больше марок, чем у младшего, а всего у них 150 марок. Сколько марок у каждого?
б) Разделите отрезок, длина которого a см, в отношении $b : c$.
в) Разделите отрезок, длина которого a см, так, чтобы одна его часть была в n раз больше другой.

197. а) Турист шёл 2 ч со скоростью x км/ч и 3 ч со скоростью y км/ч. Определите среднюю скорость туриста на пройденном участке пути.
б) Турист шёл a ч со скоростью 5 км/ч и b ч со скоростью 4 км/ч. Определите среднюю скорость туриста на пройденном участке пути.

198. Скорость катера относительно воды равна u км/ч, а скорость течения реки равна v км/ч. Расстояние между пристанями A и B равно 60 км. Определите время движения катера от A до B и обратно.

199. а) Первый кусок сплава массой 400 г содержит $p\%$ олова, а второй кусок сплава массой 100 г содержит $q\%$ олова. Определите процентное содержание олова в новом сплаве, полученном сплавлением этих кусков.
б) Первый кусок сплава массой x г содержит 60% олова, а второй кусок сплава массой y г содержит 40% олова. Определите процентное содержание олова в новом сплаве, полученном сплавлением этих кусков.

200. а) Вкладчик положил в банк a р. Банк обязуется выплачивать ему ежемесячно $p\%$ дохода от первоначальной суммы вклада. Каков будет доход вкладчика через год?
б) Вкладчик положил в банк a р. Банк обязуется начислять на его счёт в конце каждого года $p\%$ дохода от суммы вклада, находившейся на счёте в течение этого года. Какая сумма будет на счёте у вкладчика в конце третьего года?

4.3. Понятие одночлена

Одночленом называют алгебраическое выражение, являющееся произведением букв и чисел. Эти буквы и числа называют **множителями** данного одночлена.

Например, алгебраическое выражение

$$3abc$$

есть одночлен; его множителями являются число 3 и буквы a, b, c.

Заметим, что при записи этого одночлена опущены знаки умножения.

Вот ещё примеры одночленов:

$$x \cdot (-3) \cdot y \cdot 1 \cdot x, \quad 1 \cdot a \cdot (-1) \cdot b, \quad a \cdot 0 \cdot b \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot a.$$

Здесь при записи одночленов знаки умножения не опущены.
Число или одну букву также называют одночленом.

Например, алгебраические выражения

$$a,\ b,\ c,\ 1,\ \frac{1}{3},\ 0$$

есть одночлены.

Число 0 называют **нулевым одночленом.**

Сформулируем некоторые свойства одночленов.

Свойство 1. Два одночлена считают равными, если они отличаются друг от друга лишь порядком множителей.

Для записи равенства двух одночленов используют знак равенства.

Два одночлена $a3bc$ и $3cba$ равны, так как они отличаются лишь порядком множителей, поэтому пишут равенство

$$a3bc = 3cba. \qquad (1)$$

Свойство 2. Два одночлена считают равными, если один из них получен из другого заменой некоторых его числовых множителей их произведением. Например:

$$a \cdot 7 \cdot (-3) \cdot b = a \cdot (-21) \cdot b,$$
$$c \cdot 2 \cdot 4 \cdot b \cdot 3 \cdot 1 \cdot a = c8b3a.$$

Свойство 3. Одночлен считают равным нулю, если среди его множителей есть число нуль. Например:

$$a \cdot (-1) \cdot b \cdot 0 \cdot c = 0,$$
$$0 \cdot 3 \cdot c \cdot b = 0.$$

Таким образом, одночлен, среди множителей которого есть число нуль, является нулевым одночленом. Остальные одночлены называют ненулевыми.

Свойство 4. Два одночлена считают равными, если один из них получен из другого опусканием множителя 1. Например:

$$a \cdot 1 \cdot b \cdot c = abc,$$
$$1 \cdot abd = abd.$$

201. а) Что называют одночленом? Приведите примеры.
б) Что называют множителями одночлена? Приведите примеры.
в) Является ли одночленом число; буква?
г) Что называют нулевым одночленом? Приведите примеры.

202. Приведите примеры равенств одночленов.

203. Является ли одночленом выражение:
а) a; б) $a + b$; в) ba; г) $b2c$;
д) $\frac{ab}{a+b}$; е) $\frac{ax}{b}$; ж) $\frac{3}{4}xy$; з) $7a - 3$;
и) $-1,(26)$; к) $(a - b) \cdot 3$; л) $\frac{p}{b}axy$; м) 0?

204. Назовите числовые и буквенные множители одночлена:
а) $a9$; б) $0,6xy$; в) $c\frac{2}{3}$; г) $b4c$;
д) $x(-1)y$; е) a; ж) $5kb$; з) $0,21axy$.

205. Напишите все одночлены, получающиеся изменением порядка множителей одночлена:
а) $3ab$; б) $d(-2)3c$; в) $x7yz$; г) $a4$;
д) $ab3$; е) $2ak5$; ж) $a(-2)bc$.

206. Упростите запись одночлена:

а) $0ab$; б) $xy0z$; в) $1kpx$;

г) $ab1m$; д) $a5b(-3)c(-8)$; е) $6x\frac{1}{2}y\left(-\frac{1}{3}\right)z$.

4.4. Произведение одночленов

Произведение одночленов равно одночлену, множителями которого являются все множители данных одночленов.

Например, произведение одночлена $a3$ и одночлена bca есть одночлен $a3bca$, что записывают в виде равенства

$$a3 \cdot bca = a3bca.$$

Произведение k одинаковых одночленов, каждый из которых есть a, кратко обозначают a^k и называют **k-й степенью a.** Число k называют **показателем степени**, а букву a — **основанием степени.** Например, пишут:

$$aa = a^2,$$
$$aaa = a^3,$$
$$aaaa = a^4$$
$$\cdots\cdots$$

и говорят соответственно, что

произведение a на a равно a во второй степени, или a в квадрате;

произведение трёх множителей, каждый из которых есть a, равно a в третьей степени, или a в кубе;

произведение четырёх множителей, каждый из которых есть a, равно a в четвёртой степени и т. д.

Пишут также:

$$a^1 = a$$

и говорят, что **a в первой степени равно a.**

Если m и n — натуральные числа, то выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (1)$$
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n, \quad (2)$$
$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (3)$$

Равенство (1) означает, что при умножении степеней одной и той же буквы показатели степеней складывают, а основание оставляют прежним.

Равенство (2) означает, что при возведении в степень произведения букв надо возвести в эту степень каждую букву и результаты перемножить.

Равенство (3) означает, что при возведении степени буквы в степень надо взять показателем степени произведение показателей степеней, а основание оставить прежним.

Справедливость равенств (1), (2) и (3) подтверждается следующими примерами:

$$a^3a^2 = aaa \cdot aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2},$$
$$a^1a^3 = a \cdot aaa = aaaa = a^4 = a^{1+3},$$
$$(ab)^2 = ab \cdot ab = aa \cdot bb = a^2b^2,$$
$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = aaaaaa = a^6 = a^{2 \cdot 3}.$$

Сформулируем ещё три свойства одночленов.

Свойство 5. Два одночлена считают равными, если один из них получен из другого заменой произведения множителей, каждый из которых есть одна и та же буква, соответствующей степенью этой буквы. Например:

$$5a^2bab^3 = 5a^3b^4,$$
$$2a^2baa3b^2 = 2a^43b^3,$$
$$(-3)\,aaab = (-3)\,a^3b.$$

Свойство 6. Если перед одночленом поставить знак «+» (плюс), то получится одночлен, равный исходному. Например:

$$+abc = abc,$$
$$+(-7)\,ab = (-7)\,ab.$$

Свойство 7. Если перед одночленом поставить знак «−» (минус), то получится одночлен, равный исходному, умноженному на число (−1). Например:

$$-abc = (-1)\,abc,$$
$$-(-7)\,ab = (-1)(-7)\,ab.$$

Пользуясь свойством 7, получаем равенства:

$$-(-7ab) = (-1)((-1)\,7ab) = (-1)(-1)\,7ab = 7ab,$$
$$-(-a) = (-1)(-1)a = a.$$

Одночлен и такой же одночлен, но со знаком минус перед ним называют **противоположными одночленами.** Например, одночлены $3a^2bc$ и $-3a^2bc$ — противоположные одночлены. Чтобы получить одночлен, противоположный данному, нужно перед данным одночленом поставить знак минус, или, что всё равно, умножить его на число −1.

Например, одночлены a и $-a$, так же как $-a$ и $-(-a)$, — противоположные одночлены.

Отметим, что свойства 1—7 применяют для упрощения записи одночленов.

207. а) Что называют k-й степенью буквы a?
б) Что называют основанием степени; показателем степени?
в) Чему равна первая степень буквы a?

208. По какому правилу:
а) умножают степени одной и той же буквы;
б) возводят в степень произведение букв;
в) степень буквы возводят в степень?

209. а) Сформулируйте свойства одночленов.
б) Какие одночлены называют противоположными?

210. Запишите одночлен, противоположный данному:
а) $6ab$; б) $(-3)bc$; в) $8kcp$; г) p;
д) $-k$; е) 0; ж) $2{,}5$; з) $-18abx$.

211. Запишите произведение одночленов в виде степени, назовите основание и показатель степени:
а) $bbbb$; б) $aaaaa$; в) $ccccccc$; г) $kkkkkkkkk$.

212. Упростите запись одночлена, используя степень:
а) aba; б) $kpppkp$; в) $3abab$; г) $7xxyyyyx$;
д) $ababa$; е) $3a2a3a$; ж) a^3a^4; з) $a^2a^3a^5$.

213. Упростите запись одночлена, используя свойство степени:
а) a^2a^3; б) b^4b; в) k^5k^3; г) x^3x^{12};
д) a^3ba^2; е) $k^4n^5k^3n^2$; ж) $2x^3yx^2y^5$; з) $3a^{10}b^2a^{10}b^2$.

Найдите одночлен, равный произведению одночленов (214—217):

214. а) $3ab \cdot 2a$; б) $8bc^3 \cdot bc$;
в) $9ce^2 \cdot 6ce$; г) $7e^2k \cdot 6e^3k$;
д) $4ap^2 \cdot 5a^2p$; е) $6kp \cdot 7k^2p^2$;
ж) $3a^2bc \cdot 6abc$; з) $4bc^2e \cdot 6b^2ce$;
и) $7c^2ek \cdot 5c^3e^4k$; к) $6e^2k^5p \cdot 8e^3k^4p$;
л) $4k^6p^2x^3 \cdot 4k^2p^4x^4$; м) $9px^2y^3 \cdot 4p^4x^3y^2$.

215. а) $11pk^3 \cdot 4p^3x$; б) $15x^2y^3 \cdot 8x^4y$;
в) $3a \cdot (-6)a^2b$; г) $(-4)b^2 \cdot (-7)bc^2$;
д) $(-5)c^3k \cdot 5ck^2$; е) $(-7)k^2p^3 \cdot (-9)kp^3$;
ж) $(-5)p^2x^2 \cdot 8p^2x^5$; з) $25x^2y \cdot (-6)x^2y^2$.

216. а) $1\frac{1}{5}a^2b^3 \cdot 1\frac{1}{9}ab^2$; б) $\left(-1\frac{2}{3}\right)b^2c^3 \cdot \left(-\frac{2}{15}\right)b^2c^2$;
в) $\frac{1}{2}ck^2 \cdot \frac{2}{3}ck$; г) $1\frac{2}{3}k^3p^2 \cdot \left(-1\frac{1}{5}\right)kp^2$;
д) $\left(-2\frac{1}{4}\right)p^2x^2 \cdot 1\frac{1}{3}px^3$; е) $\left(-\frac{9}{11}\right)x^2y^3 \cdot \left(-1\frac{2}{9}\right)xy$;
ж) $\left(-1\frac{2}{3}\right)a^2x^3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)a^2x^4$; з) $\left(-2\frac{5}{6}\right)a^3c^2 \cdot 1\frac{2}{3}ac^2$.

217. а) $\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot a^2b \cdot 5b^2c \cdot (-2)ac^2$; б) $3ce \cdot 17ek^3 \cdot 2c^3k$;

в) $5b^2c^2 \cdot 7ce^3 \cdot (-6)be^3$; г) $(-5)e^2k^2 \cdot 6e8p$;

д) $7k^2p \cdot 5px \cdot 5k^2x^2$; е) $2px^2 \cdot 8x \cdot 12y$;

ж) $12ak^2 \cdot (-3)kx^2 \cdot 2ax$; з) $13a^3k \cdot 5k^3y \cdot ay^3$.

218. Представьте данную степень в виде произведения:

а) $(xy)^2$; б) $(ab)^2$; в) $(2x)^3$; г) $(3y)^2$;

д) $(2abc)^1$; е) $(3muk)^2$; ж) $(13xy)^9$; з) $(17cd)^{20}$.

219. Возведите в степень:

а) $(a^2)^2$; б) $(b^2)^3$; в) $(2a)^2$; г) $(3b)^3$;

д) $(4c^2)^2$; е) $(5ab)^2$; ж) $(7ab^2)^3$; з) $(9b^2c)^2$;

и) $(3c^2e^4)^4$; к) $(2a^2k^3)^5$; л) $\left(\frac{1}{2}a^2\right)^2$; м) $\left(\frac{3}{4}a^2\right)^2$;

н) $\left(-1\frac{1}{2}c^2\right)^2$; о) $\left(-1\frac{1}{3}e^3\right)^3$; п) $\left(1\frac{1}{7}ab\right)^2$; р) $\left(-\frac{1}{6}px^3\right)^3$.

220. Представьте данный одночлен в виде квадрата другого одночлена:

а) $25a^2$; б) $49b^2$; в) $16c^4$; г) $81e^6$;

д) $64k^8$; е) $\frac{1}{49}p^8$; ж) $2\frac{1}{4}a^{10}x^6$; з) $2\frac{7}{9}b^{12}y^{10}$.

221. Представьте данный одночлен в виде куба другого одночлена:

а) $8a^3$; б) $27b^3$; в) $125c^6$; г) $216e^9$;

д) $\frac{1}{27}a^9c^3$; е) $\frac{1}{125}b^6y^{12}$; ж) $15\frac{5}{8}a^{18}p^9$; з) $2\frac{10}{27}b^6c^{18}$.

Запишите в таблице произведения одночленов, стоящих в верхней строке и в левом столбце (**222—223**):

222.

	$6ab$	$3b^2c$	$4c^3p^2$	$8a^4x^2$	$5b^2y^2$
$3ab$					
$4bc^2$					

223.

	5	$7b$	$12a^2$	$11ax$
$4a$				
$12ab$				
$10ab^2$				

224. Запишите:

а) произведение куба a и квадрата b;

б) произведение квадрата a и удвоенного b;

в) произведение куба a и утроенного квадрата b;

г) удвоенное произведение квадрата a и куба a.

4.5. Стандартный вид одночлена

Говорят, что ненулевой одночлен, содержащий буквы, имеет **стандартный вид**, если он имеет только один числовой множитель, записанный на первом месте, а каждая его буква участвует в его записи лишь один раз в виде некоторой её степени; при этом буквы записаны в порядке алфавита.

Числовой множитель ненулевого одночлена, содержащего буквы и имеющего стандартный вид, называют **коэффициентом одночлена**.

Например, ненулевые одночлены

$$(-12)ab^2c, \quad \frac{1}{3}x^4y^2, \quad (-1)a^2b$$

имеют стандартный вид. Их коэффициенты соответственно равны числам -12, $\frac{1}{3}$, -1.

Если ненулевой одночлен имеет только буквенные множители, то считают, что его коэффициент равен 1.

Например, одночлены

$$a, \; ab, \; x^2yz^2$$

являются одночленами стандартного вида. Коэффициент каждого из них равен 1.

Если коэффициент ненулевого одночлена стандартного вида есть отрицательное число, то такой одночлен записывают ещё и так: сначала пишется знак минус, потом абсолютная величина коэффициента, а затем буквенные множители. Например, одночлены

$$-\frac{4}{3}x^4y^2, \; -a^2b^3$$

считаются одночленами стандартного вида: $-\frac{4}{3}$ — коэффициент первого из них, -1 — коэффициент второго. При этом пишут:

$$\left(-\frac{4}{3}\right)x^4y^2 = -\frac{4}{3}x^4y^2, \; -a^2b^3 = (-1)a^2b^3.$$

Любое действительное число считается одночленом, записанным в стандартном виде. Например, числа 3, -1, 5 являются одночленами стандартного вида.

Стандартный вид нулевого одночлена есть 0.

Следующие одночлены записаны не в стандартном виде:

$$3a^22bc, \; (-1)ba^2d^3, \; 7a^4ba^2b^3, \; 0 \cdot a^2b^2.$$

Любой одночлен можно привести к стандартному виду, пользуясь свойствами 1—7. Иначе говоря, для любого одночлена найдётся одночлен стандартного вида, которому он равен.

Рассмотрим примеры приведения одночленов к стандартному виду.

Пример 1. Приведём к стандартному виду одночлен $b^2a^2(-1)c3ab^34c^2$.

$$b^2a^2(-1)c3ab^34c^2 = (-12)a^3b^5c^3 = -12a^3b^5c^3.$$

Произведение всех числовых множителей здесь равно −12. Это коэффициент одночлена, записываем его на первом месте. Произведение степеней b равно $b^2 \cdot b^3 = b^5$; произведение степеней c равно $c \cdot c^2 = c^3$; произведение степеней a равно $a^2 \cdot a = a^3$. Располагаем буквы a, b, c в порядке латинского алфавита. В итоге получаем первое равенство. Затем, используя соглашение о записи одночлена с отрицательным коэффициентом, пишем второе равенство.

Пример 2. $a^35b0c = 0$.

Это нулевой одночлен, потому что среди его множителей имеется число 0. Его стандартный вид есть число 0.

Степенью ненулевого одночлена стандартного вида называется сумма показателей степеней всех его букв.

Например, одночлен $3a^2b$ — третьей степени, одночлен $3c$ — первой степени. Степень одночлена $2a^3b$ равна четырём.

Действительное, отличное от нуля число считается **одночленом нулевой степени**.

Например, одночлены

$$-5,\ 7,\ -0{,}3,\ \frac{7}{16}$$

имеют степень 0.

Число нуль — нулевой одночлен — это единственный одночлен, степень которого не определена.

225. а) Какой ненулевой одночлен называют одночленом стандартного вида?
б) Что называют коэффициентом ненулевого одночлена?
в) Каков стандартный вид нулевого одночлена?
г) Любой ли одночлен можно привести к стандартному виду?
д) Что называют степенью ненулевого одночлена стандартного вида?
е) Определена ли степень нулевого одночлена?

226. Укажите коэффициент одночлена, записанного в стандартном виде:
а) $10a$; б) $15a^2b$; в) $127b^3c^4$; г) a;
д) ce; е) $(-8)e^4k^7$; ж) $(-16)k^2p$; з) $20p^2x^5$;
и) $-x^3y^2$; к) $\frac{1}{2}ac$.

227. Даны одночлены стандартного вида, определите их коэффициенты и степени; укажите одночлены, различающиеся только коэффициентами:

а) $1\frac{1}{2}a$; б) b; в) $-c$, г) $4ab$;
д) $-2a$; е) $20b^2$; ж) $10a^2bc$; з) $7b$;
и) $5a^2bc$; к) $3a^2bc$; л) $-6{,}41a$; м) $8{,}3ab$;
н) $24b$; о) $\frac{3}{25}b^5$; п) $15p^2$; р) $2\frac{1}{4}b^2$.

228. Приведите одночлен к стандартному виду:

а) $(-2)b3$; б) $4a8$; в) $(-2)bb^24$;
г) $3a^2a^38$; д) $px^2(-1)p^3x^6$; е) $16x^4y^33x^2y$;
ж) $(-3)b^3c^2b^4(-4)$; з) $3e^2k^3(-4)ek^2$.

229. Запишите:

а) произведение a и квадрата b;
б) произведение куба a и удвоенного b;
в) удвоенное произведение a и квадрата b;
г) сумму квадратов a и b;
д) квадрат суммы a и b;
е) произведение квадрата a и квадрата b;
ж) сумму кубов a и b;
з) произведение b и куба a.

230. Приведите одночлен к стандартному виду, найдите его коэффициент и степень:

а) $3acb5$; б) $dcab$; в) $(-1)ac5b$; г) $cdab$;
д) ba; е) $7x0y$; ж) $-\frac{7}{13}$; з) 0;
и) $\frac{1}{500}xy(-1)yzx^2$; к) $\left(-\frac{4}{3}\right)xy^2(0{,}3)^2zx^4$.

4.6. Подобные одночлены

Ненулевые одночлены стандартного вида называют **подобными**, если они равны или если они различаются лишь своими коэффициентами.

Например, одночлены $3ab$ и $5ab$ подобны, так как они различаются лишь своими коэффициентами.

Чтобы узнать, подобны ли данные одночлены, их надо привести к стандартному виду.

Выясним, подобны ли одночлены $abab^2$ и $baab^2$.

Приведём их к стандартному виду: $abab^2 = a^2b^3$ и $baab^2 = a^2b^3$.

Одночлены подобны, потому что после приведения их к стандартному виду видно, что они равны.

Одночлены $-3a^2bc$ и $a^2(-2)b3c=-6a^2bc$ также подобны, потому что после приведения их к стандартному виду ясно, что они различаются лишь коэффициентами.

Среди одночленов a^2, b^2, a^3, 1, $3a^2b$, $3ab^2$ нет подобных — любые два из них не подобны.

По определению, **сумма подобных одночленов** равна одночлену, подобному каждому из них, с коэффициентом, равным сумме коэффициентов данных одночленов. Если сумма коэффициентов равна нулю, то и сумма одночленов равна нулю. Например:

$$3a^2b+2a^2b=(3+2)a^2b=5a^2b,$$
$$2x^3y^2+(-2)x^3y^2=(2-2)x^3y^2=0\cdot x^3y^2=0,$$
$$7xyz+3xyz+(-5)xyz=(7+3+(-5))xyz=5xyz.$$

По определению, **разность двух подобных одночленов** равна одночлену, подобному каждому из них, с коэффициентом, равным разности коэффициентов уменьшаемого и вычитаемого. Если разность коэффициентов равна нулю, то и разность одночленов равна нулю.

Например:

$$2abc^2-7abc^2=(2-7)abc^2=(-5)abc^2=-5abc^2,$$
$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}a=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)a=\frac{1}{6}a,$$
$$3ac-3ac=(3-3)ac=0ac=0.$$

Замену суммы подобных одночленов одночленом, равным этой сумме, называют **приведением подобных членов**.

Примеры приведения подобных членов:

$$\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)a=\left(\frac{4}{12}-\frac{6}{12}+\frac{3}{12}\right)a=\frac{1}{12}a,$$
$$\frac{2}{7}xy-\frac{6}{7}xy+\frac{4}{7}xy=\left(\frac{2}{7}-\frac{6}{7}+\frac{4}{7}\right)xy=0xy=0.$$

231. а) Какие одночлены называют подобными?
б) Как складывают (вычитают) подобные одночлены?

232. Приведите примеры равной нулю суммы (разности) подобных одночленов.

233. Как привести подобные члены?

Среди одночленов найдите подобные **(234—235)**:

234. а) a^2bc, $2abca$, a^3bc, $-3bca^2$; б) a^2b, $-aba^2$, $-3a^2b0$, $7a^2ba$.

235. а) $2a^3b$, $3a^4b^2$, $4a^3b$, $80a^4b^2$, a^3b, $-a^4b^2$, a, $6p^2x$, $-c$, $(-5)a^3b$, $6a^4b^2$, $-4p^2x$;
б) $0a^2b^3$, $-3a^3b^2$, $0ab$, $12a^2b^3$, $2a^3b^2$.

236. Найдите одночлен, равный сумме подобных одночленов:
а) $2x + 3x$; б) $3m + 5m$;
в) $a + 4a + a$; г) $3b + b + b$;
д) $2a + 4a + 6a$; е) $4ab + ab + 12ab$;
ж) $17a^2 + 13a^2 + 11a^2$; з) $15a^2b + 14a^2b + 7a^2b$;
и) $43ce^2 + (-17)ce^2 + 11ce^2$; к) $25b^2c^2 + (-27)b^2c^2 + 7b^2c^2$.

237. Найдите одночлен, равный разности подобных одночленов:
а) $7x - 2x$; б) $a - 3a$;
в) $10a - 18a$; г) $-4b - 2b$;
д) $3bc - 17bc$; е) $mk - 2mk$;
ж) $28a^2 - 17a^2$; з) $4b^2c - 12b^2c$;
и) $17a^2b^2 - 9a^2b^2$; к) $24b^2c^3 - (-17)b^2c^3$.

238. Найдите сумму подобных одночленов:
а) $a^2bc + 2abca + (-3bca^2)$; б) $(-aba^2) + 7a^2ba + a^3b$;
в) $7a^2 + (-3a^2) + (-4a^2)$.

239. Найдите разность подобных одночленов:
а) $3abc - 7abc$; б) $9a^3b^2 - 9a^3b^2$; в) $5a - 6a$; г) $7a - a$.

240. Приведите подобные члены:
а) $18a^2b - 4a^2b + 6a^2b$; б) $6a^3b^2 + 7a^3b^2 + (-2)a^3b^2$;
в) $4b^3c^4 + 8b^3c^4 - 14b^3c^4$; г) $0c^2e^5 + 4c^2e^5 - 16c^2e^5$;
д) $2{,}1a^2e - 1{,}6a^2e + 1{,}5a^2e$; е) $6{,}46a^4k + 2{,}14a^4k - 8{,}6a^4k$;
ж) $5{,}18a^2p^3 + 3{,}22a^2p^3 - 2{,}4a^2p^3$;
з) $7{,}14ax^2 + 4{,}36ax^2 - 12{,}8ax^2$.

§ 5. Многочлены

5.1. Понятие многочлена

Многочленом называют сумму одночленов. Одночлены, входящие в эту сумму, называют **членами многочлена**.

Примеры:
а) $a^2 + 2ab + b^2$ — многочлен, a^2, $2ab$, b^2 — его члены;
б) $a^3 + b^3$ — многочлен, a^3, b^3 — его члены;
в) $\frac{1}{3}a^2 + (-2b) + (-b^2)$ — многочлен, $\frac{1}{3}a^2$, $-2b$, $-b^2$ — его члены.

Многочлен $\frac{1}{3}a^2 + (-2b) + (-b^2)$ принято ещё записывать так: $\frac{1}{3}a^2 - 2b - b^2$.

Это выражение также называют многочленом, несмотря на то что в его записи участвует знак минус. Надо иметь в виду, что, называя данное выражение многочленом, считают, что это сумма одночленов $\frac{1}{3}a^2$, $-2b$ и $-b^2$.

В силу этого соглашения равны многочлены

$$\frac{1}{3}a^2 + (-2b) + (-b^2) \text{ и } \frac{1}{3}a^2 - 2b - b^2.$$

Для записи равенства двух многочленов употребляют знак равенства. Поэтому имеет место равенство

$$\frac{1}{3}a^2 + (-2b) + (-b^2) = \frac{1}{3}a^2 - 2b - b^2.$$

Подобным образом пишут:

$$x^3 - y^3 = x^3 + (-y^3), \quad (-x^2) + (-y^2) = -x^2 - y^2.$$

Одночлен также называют многочленом.

Поэтому выражения a^5, $-2ab$, $\frac{7}{3}$, $-\frac{5}{9}$, 0, a можно рассматривать не только как одночлены, но и как многочлены.

Число нуль называют нулевым многочленом.

241. а) Что называют многочленом; членами многочлена? Приведите пример многочлена и укажите все его члены.
б) Можно ли считать одночлен многочленом? Что такое нулевой многочлен?
в) Можно ли считать число 2,(5) многочленом?

242. Приведите примеры равенств многочленов.

243. Назовите члены многочлена:
а) $a + b + c$; б) $a^2 + ab + b^2$; в) $a^2 - 2ab + b^2$;
г) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; д) $x^3 - \frac{3}{7}x^2 + \frac{2}{3}x$; е) $-x^3 + \frac{2}{7}x + \frac{4}{3}$.

244. Выпишите все члены многочлена:
а) $2x^2 - 3xy - xy + 7y$; б) $-x^7 - x^5 - 2x^3 - 3x$;
в) $x^2 + \frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$; г) $-x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{11}$.

245. Запишите многочлен, членами которого являются одночлены:
а) a и c; б) $2x$ и y^2; в) $2a$, b^3 и (-2); г) x^3, $0{,}5y^2$, $(-x)$ и $(-5xy)$.

246. Запишите многочлен в виде суммы одночленов:
а) $a - b$; б) $2a - 3$; в) $-xy - y^2$; г) $-2x^2 - 0{,}5y$.

247. Является ли многочленом выражение:
а) $2a - 7{,}2$; б) $x^2 - 3x + 4$; в) $\frac{a}{b} - 4$;
г) $\frac{3m}{1-a}$; д) 7,823; е) 0?

5.2. Свойства многочленов

Многочлены преобразуют по определённым правилам, которые называют свойствами многочленов.

Свойство 1. Члены многочлена можно менять местами.

Иначе говоря, если один многочлен отличается от другого лишь порядком членов, то такие два многочлена считают равными.

Например, имеют место следующие равенства:

$$2a^2b + 3ab^2 = 3ab^2 + 2a^2b;$$
$$a^2 - b^2 = -b^2 + a^2;$$
$$x^2 - x + 1 = 1 - x + x^2 = -x + x^2 + 1.$$

Свойство 2. Прибавление к многочлену нуля (нулевого многочлена) не изменяет его.

Иначе говоря, если один из многочленов получен из другого прибавлением числа «нуль», то такие два многочлена считают равными.

Например:

$$a^4 + (-a^2) + 0 = a^4 + (-a^2);$$
$$0 + abc = abc;$$
$$2a - 3b + 0 - c = 2a - 3b - c.$$

Свойство 3. В многочлене можно приводить подобные члены.

Иначе говоря, если один из многочленов получен из другого заменой подобных членов их суммой, то такие два многочлена считают равными. Например:

а) $a^2 + ab - ab + b^2 = a^2 + 1ab + (-1)ab + b^2 = a^2 + (1 + (-1))ab + b^2 = a^2 + 0 \cdot ab + b^2 = a^2 + 0 + b^2 = a^2 + b^2;$

б) $a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - a^2b + ab^2 - b^3 = a^3 + \underline{\underline{(-2)a^2b}} + \underline{2ab^2} + \underline{\underline{(-1)a^2b}} + \underline{1 \cdot ab^2} - b^3 = a^3 + ((-2) + (-1))a^2b + (2 + 1)ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

Мы подчеркнули соответственно одной и двумя чертами две пары подобных членов, а затем привели подобные члены.

Многочлены можно упрощать, пользуясь их свойствами, как показано выше.

248. Сформулируйте свойства многочленов.

249. Заполните пропуски, применив свойство многочленов:

а) $a^2 + b = b + \ldots;$ б) $a + c + 0 = a + \ldots;$
в) $a + c^2 + c^2 = a + \ldots;$ г) $a + 0 + c = \ldots;$
д) $a + 2c + 3c = \ldots;$ е) $a + 2a + 3c = \ldots.$

250. Какими свойствами многочленов воспользовались при упрощении многочлена:
а) $a + b - a = a - a + b = 0 + b = b$;
б) $2x - y + x - 3y - 5x = 2x + x - 5x - y - 3y = (2 + 1 - 5)x - (1 + 3)y = -2x - 4y$?

Упростите многочлен (251—253):

251. а) $2a + 5b + 7a$; б) $2x + 3y + 10x$; в) $7a + b + 3a + b$; г) $a + 7b + b + 2a$; д) $2x + y + 3x + y + 4x$; е) $a + 2x + 5x + 2a + 9x$.

252. а) $12a + 5b - 4a$; б) $19x - 24y + x$; в) $17x - 4y + 5x + 4y$; г) $5a - 2y + 4a + 2y$; д) $40x + 15y - 40x - 16y$; е) $9a - 3b + 5a - 7b - 8a$; ж) $2b - 6y + b + 5y - 3b$; з) $a + 2x + a - 13x - 2a$.

253. а) $1{,}1x - 2{,}7y + 0{,}8x - x + 3y$;
б) $27a - 3{,}1b + 9a + 3{,}1a + 0{,}4b - a$;
в) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y - 2x + 1\frac{1}{4}y$;
г) $15a - 4x - 5{,}6a + 2{,}3x + a$;
д) $67{,}1a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{5}a + 2b + 2{,}5a - 7b$;
е) $\frac{1}{4}b - 7x - 3{,}2b + 2\frac{3}{4}x + b + 0{,}6x$;
ж) $xyx - 2x^2y + 2x - 3x$;
з) $ba^2 - 3a^3 + 7aba + 3a^2 - 8a^2b$.

5.3. Многочлены стандартного вида

Говорят, что многочлен имеет **стандартный вид**, если все его члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

Приведём примеры многочленов стандартного вида:

$$2,\ a,\ a - b,\ a^2 + 2ab^2 + b^2,\ \frac{1}{7} - a,\ 0.$$

Примерами многочленов нестандартного вида могут служить следующие многочлены:

$$a \cdot a - 5a + 6, \quad a^3 - 2ab + b^2 - 3ab - 11, \quad 3 - 5 + a^2.$$

У первого из них не все члены записаны в стандартном виде. У второго есть подобные члены — второй и четвёртый, и у третьего подобны первый и второй члены.

Многочлен стандартного вида, состоящий из двух членов, называют **двучленом**; многочлен стандартного вида, состоящий из трёх членов, называют **трёхчленом** и т. д.

Приведём примеры

двучленов: $\frac{1}{7}a^2 - 2b$, $ab - cd$;

трёхчленов: $3a - 2b - 7$, $x + yz - 2z^2$;

четырёхчленов: $a + b - c - d$, $-abc - acd - bcd - abd$.

Напомним, что одночлен также называют многочленом, состоящим из одного члена.

Любой многочлен можно привести к стандартному виду.

Для этого необходимо: 1) каждый его член привести к стандартному виду; 2) привести подобные члены.

Например:

$$a^3 + 2aba + b^2a + ba^2 - 2abb - b^2b = a^3 + \underline{2a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} + \underline{a^2b} - \underline{\underline{2ab^2}} - b^3 =$$
$$= a^3 + (2+1)a^2b + (1-2)ab^2 - b^3 = a^3 + 3a^2b - ab^2 - b^3.$$

В этом примере сначала все члены данного многочлена привели к стандартному виду, у полученного многочлена подчеркнули соответственно одной и двумя чертами две пары подобных членов и после приведения подобных членов получили многочлен стандартного вида.

Замечание. Если многочлен после приведения его к стандартному виду преобразуется в 0, то он *является нулевым многочленом*.

Например, рассмотрим многочлены $a - a$ и $3x^2 - x^2 - 2x^2$. Они записаны не в стандартном виде. После приведения к стандартному виду они преобразуются в 0:

$$a - a = 0, \quad 3x^2 - x^2 - 2x^2 = 0.$$

Следовательно, это нулевые многочлены.

Степенью ненулевого многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней одночленов, входящих в этот многочлен.

Например, многочлен

$$\frac{1}{3}a^2 - 2b + 7$$

записан в стандартном виде, он имеет степень 2, так как входящие в него одночлены имеют степени 2, 1 и 0, наибольшая из которых 2.

Многочлен $-x^3yz - x + y^2$ записан в стандартном виде, имеет степень 5, так как входящие в него одночлены имеют степени 5, 1 и 2. Очевидно, что $ab + c$ — многочлен второй степени и abc — многочлен третьей степени.

Многочлен $2x - 5$ имеет степень 1. Говорят ещё, что это многочлен первой степени относительно x.

Аналогично многочлен $2a - 3b + 7$ есть многочлен первой степени относительно a и b.

Любое действительное, отличное от нуля число есть многочлен нулевой степени. Нуль — единственный многочлен, степень которого не определена.

Если многочлен записан не в стандартном виде, то о его степени можно говорить только после приведения его к стандартному виду.

254. а) Какой многочлен называют многочленом стандартного вида? Приведите примеры.
б) Что называют двучленом, трёхчленом? Приведите примеры.
в) Любой ли многочлен можно привести к стандартному виду?
г) Что нужно сделать для того, чтобы привести многочлен к стандартному виду?
д) Что называют степенью ненулевого многочлена стандартного вида?
е) Определена ли степень нулевого многочлена?

255. Имеет ли многочлен стандартный вид:
а) $m - 3n + 2m$;
б) $a \cdot 2b - 3a^2 + b$;
в) $3xy - 3yx + 1$;
г) $a^2 + ab + b^2 + ab$;
д) $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 1$;
е) $ba - a^2b - a^3b$;
ж) $a^3b + ab^3 - a^2b^2 + 2bab^2$?

256. Приведите многочлен к стандартному виду, определите коэффициенты и степени его членов:
а) $b + b + ac + ac + ac$;
б) $2a^2 - 3b + b - 7a^2 - b$;
в) $xx + xx + x - 2x$;
г) $2a^3 + 4a^3 - 5a^2 + 5a^2$.

257. Приведите многочлен к стандартному виду, определите его степень:
а) $4a^2b + 5b^2a + baa + 3aba$;
б) $5a^3 - 7ax^3 - 2ax^3 - a^3x - ax^3$;
в) $3ax^2 - 3a^2x + 2a^2x^2 - 7a^2x^2 - a^2x$;
г) $6n^3 - 8p^2n^3 + p^2n^3 + 12n^3p^2 + 2n^3$;
д) $7a^3 - 8aba^2 + 3a^2 - 4b$;
е) $x^5 - 7y^2 + 3xyx^4 + 2x - 1$;
ж) $ac + 2abc - 7a^2 + 3ca - 3cab$.

258. Упростите выражение:
а) $2aa + a \cdot 3a + a^2$;
б) $2x^2 \cdot 3xy - 4x \cdot 5x^2y$;
в) $y^2 \cdot 2x - 3x^2 \cdot 2y + 2xy \cdot 2y - xy \cdot (-4x)$;
г) $xx \cdot (-2x) - y \cdot 3xy + 7x^2 \cdot (-2x) - 4y^2 \cdot 2x$.

259. Вместо букв C и D подберите одночлены так, чтобы выполнялось равенство:
а) $2a + C + a + 5b = 3a + 8b$;
б) $3x + C + y + D = 11x + 5y$;
в) $C - 2a + 3b - D = 10a - 4b$;
г) $C + D + x = 25x + 17y$.

5.4. Сумма и разность многочленов

Сумма многочленов равна многочлену, членами которого являются все члены данных многочленов.

Например, сумма двух многочленов

$$a^2 + ab \text{ и } b^2 + ac$$

равна многочлену

$$a^2 + ab + b^2 + ac.$$

Это можно записать в виде равенства

$$(a^2 + ab) + (b^2 + ac) = a^2 + ab + b^2 + ac.$$

Разность двух многочленов равна многочлену, членами которого являются все члены уменьшаемого и взятые с противоположными знаками все члены вычитаемого.

Например, разность двух многочленов

$$a^2 + ab \text{ и } b^2 + ac$$

равна многочлену

$$a^2 + ab - b^2 - ac.$$

Это можно записать в виде равенства

$$(a^2 + ab) - (b^2 + ac) = a^2 + ab - b^2 - ac.$$

Переход от левой части равенств

$$(a^2 + ab) + (b^2 + ac) = a^2 + ab + b^2 + ac$$

и

$$(a^2 + ab) - (b^2 + ac) = a^2 + ab - b^2 - ac$$

к правой называют **раскрытием скобок**.

При раскрытии скобок пользуются правилами:

если перед скобками стоит знак плюс, то скобки можно опустить, не меняя знаки слагаемых, заключённых в скобки;
если перед скобками стоит знак минус, то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключённого в скобки, на противоположный.

Если перед скобками нет никакого знака, то подразумевается, что стоит знак плюс.

Например:

$$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d,$$
$$(a - b) + (d - c) - (x - y) - (z - t) = a - b + d - c - x + y - z + t.$$

Переход от правой части этих равенств к левой называют **заключением в скобки**.

При заключении в скобки пользуются правилами:

чтобы заключить многочлен в скобки со знаком плюс перед ними, надо записать в скобках все его члены с теми же знаками;
чтобы заключить многочлен в скобки со знаком минус перед ними, надо записать в скобках все его члены с противоположными знаками.

Например:

$$a - b - c + d = (a - b) + (-c + d),$$
$$a - b - c + d = (a - b) - (c - d).$$

260. Сформулируйте: правила раскрытия скобок; правила заключения в скобки.

261. Запишите в виде числового выражения и вычислите:
а) сумму числа 0,5 и суммы чисел 1,7 и 1,2;
б) разность числа 17 и суммы чисел 7 и 5;
в) сумму числа 4 и суммы чисел 8,3 и 2,7;
г) разность числа 17 и разности чисел 7 и 5;
д) разность суммы чисел 1,6 и 1,7 и числа 2;
е) сумму разности чисел 2,8 и 1,1 и числа 2,2;
ж) разность разности чисел 20,5 и 10,7 и числа 5,7.

262. Запишите в виде многочлена:
а) сумму $a + 3c$ и $5ab - 2b$;
б) разность $a + 3c$ и $5ab - 2b$;
в) сумму $4a + c$ и суммы $2ab - 3b$ и $4m - n$;
г) разность $4a + c$ и суммы $2ab - 3b$ и $4m - n$;
д) сумму $4a + c$ и разности $2ab - 3b$ и $4m - n$;
е) разность $4a + c$ и разности $2ab - 3b$ и $4m - n$.

263. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:
а) $5a - (a + 1)$; б) $x - (6x - 5)$;
в) $2a - (7a + 5)$; г) $7 - 4x + (2x - 1)$;
д) $a + (a + 1)$; е) $(x - 1) + 6$;
ж) $a + b + (a - b)$; з) $(x - y) + (x - y)$.

264. Упростите выражение:
а) $7a + (2a + 3b)$; б) $9x + (2y - 5x)$;
в) $(5x + 7a) + 4a$; г) $(5x - 7a) + 5a$;
д) $(3x - 6y) - 4x$; е) $(2a + 5b) - 7b$;
ж) $3m - (5n + 2m)$; з) $6p - (5p - 3a)$.

265. Найдите многочлен, равный сумме многочленов:

а) $3a$ и $(a + 2b)$; б) $7x$ и $(2 - 3x)$;
в) $(3 - 2a)$ и $(-5a - 7)$; г) $(3x - y)$ и $(-2x + 4y)$.

266. Найдите многочлен, равный разности многочленов:

а) $(a + b)$ и $4a$; б) $6x$ и $(4 - 7x)$;
в) $(4b + 2)$ и $(5 - b)$; г) $(2x - 7a)$ и $(4a + x)$.

267. Раскройте скобки и упростите полученное выражение:

а) $(5a + 3) - (a + b)$; б) $(3x - 1) - (y - 2x)$;
в) $(2a + b) - (a + 2b)$; г) $(x - 2y) - (2x - 4y)$.

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида **(268—269)**:

268. а) $(5a^2 - 4a) - (2a^2 + 5a)$; б) $(3x - 5x^3) - (7x^3 - 4x)$;
в) $(a + b + c) + (a - b + c)$; г) $(x - y + n) + (x - y - n)$;
д) $(7a - 3b) - (5a + 3b) - (a - 5b)$;
е) $(8x - 5) + (3x - 7) - (9x - 11)$;
ж) $43x - 19y - (15x - 34y) + (9x - 7y)$;
з) $48a - (2a - 2b) - (14b - 28a) + (24b - 18a)$;
и) $5 - 7a - (8 - 6a) + (5 + a)$.

269. а) $(x^3 + 4x) + (x^3 - x + 1) - (x^2 - x)$;
б) $(a^3 + 5a^2 + 3a - a) - (a^3 - 3a^2 + a)$;
в) $(x^2 - 3x + 2) - (-2x - 3)$;
г) $(abc + 1) + (-1 - abc)$.

270. Вместо букв M и N подберите одночлены так, чтобы выполнялось равенство:

а) $(a + b + c) + (M - N + c) = 4a - 2b + 2c$;
б) $(7x - N) - (M + 2y) = 3x - 2y$;
в) $(M + N) - (2a - b) + (a - 4b) = 5a + 7b$;
г) $(a - M) - (N + 7b) - (2a + b) = -5a - 10b$.

271. Упростите:

а) $(2a^2b - 10b^3) - (4a^2b - 12b^3)$;
б) $(3xy^2 + 7x^2y) - (2xy^2 - 6x^2y)$;
в) $12ab - 30bc - 3cx - (15bc + 9cx)$;
г) $(10abc - 8bcx - 21cxy) - (-6abc + bcx - cxy)$;
д) $(0{,}6ab - 0{,}5bc + cx) - (2{,}5bc - 0{,}5ab - cx)$;
е) $\left(\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{2}{3}ab - \frac{5}{6}a^2b - 1\right) - \left(a^2b - \frac{1}{3}x^2y^2 + \frac{1}{12}ab - \frac{1}{4}\right)$.

272. При некоторых преобразованиях бывает необходимо изменить знак, стоящий перед скобками, на противоположный, например: $(a - b) = -(-a + b) = -(b - a)$.
Используя этот приём, измените знак, стоящий перед двучленом:

а) $(2a - 3b)$; б) $(x + y)$; в) $(-a - b)$; г) $(-7a + 3)$.

273. Даны многочлены: $A = a + b$, $B = 3a - 2b$, $C = a - 7b$. Найдите:
а) $A + B + C$; б) $A + B - C$; в) $A - B - C$; г) $-A - B - C$.

274. Заключите первые два члена многочлена в скобки со знаком минус перед ними, а последние — в скобки со знаком плюс перед ними:
а) $x^2 - y^2 + 2x - 1$; б) $9y^2 - 1 - x^2 - 6y$;
в) $-a^3 - 3a^2 + 4 - a$; г) $-x + y + x^2 - y^2$.

275. Дан многочлен $a + b - c - p$. Представьте его как:
а) сумму многочленов, чтобы одно из слагаемых было $(a + b)$;
б) разность многочленов, чтобы уменьшаемое было $(a + b)$;
в) разность многочленов, чтобы уменьшаемое было $(b - c)$.

5.5. Произведение одночлена и многочлена

Произведение одночлена и многочлена равно многочлену, членами которого являются произведения этого одночлена и каждого члена данного многочлена.

Например, произведение одночлена a и многочлена $a - b$ равно многочлену $aa - ab$. Это записывают в виде равенства

$$a(a - b) = aa - ab = a^2 - ab. \qquad (1)$$

В последнем равенстве мы привели многочлен к стандартному виду.

Равенство (1), написанное в обратном порядке, имеет вид:

$$a^2 - ab = a(a - b). \qquad (2)$$

В данном случае многочлен $a^2 - ab$ преобразован в произведение одночлена a и многочлена $a - b$.

Преобразование многочленов в произведение одночлена и многочлена называют **вынесением за скобки** общего множителя многочлена.

В равенстве (2) мы вынесли за скобки общий множитель (одночлен) a многочлена $a^2 - ab$.

Вот ещё пример вынесения за скобки общего множителя:

$$x^4y - x^2y^2 = x^2y(x^2 - y).$$

Данный многочлен и многочлен, полученный умножением его на число -1, называют **противоположными многочленами**.

Например, многочлены

$ab - 2b^3$ и $-ab + 2b^3$ — противоположные многочлены.

Легко видеть, что сумма противоположных многочленов равна нулю, например:

$$(ab - 2b^3) + (-ab + 2b^3) = ab - 2b^3 - ab + 2b^3 =$$
$$= (1 - 1)ab + (-2 + 2)b^3 = 0 \cdot ab + 0 \cdot b^3 = 0.$$

Легко проверить, что *разность двух многочленов есть сумма уменьшаемого и многочлена, противоположного вычитаемому.*

Наконец, отметим, что **если число 1 умножить на многочлен, то в результате получится тот же самый многочлен.** Например,

$$1 \cdot (a^2 + b^3) = 1 \cdot a^2 + 1 \cdot b^3 = a^2 + b^3.$$

276. а) По какому правилу умножают одночлен на многочлен?
б) Какие многочлены называют противоположными?
в) Каким свойством обладают противоположные многочлены?
г) Каким свойством обладает разность многочленов?
д) Изменится ли многочлен, если его умножить на 1?

Найдите многочлен, равный произведению одночлена и многочлена (277—279):

277. а) 3 и $(a + b)$; б) x и $(a - b)$; в) $(x + 1)$ и 5; г) $(a - b)$ и x.

278. а) $(a + 3)7$; б) $(x - y)10$; в) $a(x - y)$; г) $a(a + b)$; д) $(a + b - c)2$; е) $(a - b)(-6)$.

279. а) $(-2)(x + y)$; б) $(7 + 3y - x^2y)(-2xy)$; в) $3ab(a^2 - 2a + 1)$; г) $2a(x + y)$; д) $(x^2 + 2xy + y^2)(-12xy^3)$; е) $21a^2b^5(a^3 - 4ab^2 - b^2)$; ж) $(-abc)(ab + ac + bc)$; з) $-ac(a + 2c)$.

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида (280—281):

280. а) $2(a + b) + 4(a + b)$; б) $4(x - y) + 7(x - y)$; в) $4 - 2(x + 1)$; г) $2a - 3(b - a)$; д) $2(a - b) - 3(a + b)$; е) $a(x - y) - b(x + y)$; ж) $3a^2 - a(3a - 4b) - 2(b - 4a)$; з) $2ab(a + 2b) - 3ab^2(a - 4)$.

281. а) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$;
б) $a(b + c - bc) - b(c + a - ac) + c(b - a)$.

282. **Доказываем.** Пользуясь рисунком 11, докажите, что для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ верно равенство:
а) $a(b + c) = ab + ac$ (рис. 11, *а*);
б) $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ (рис. 11, *б*).

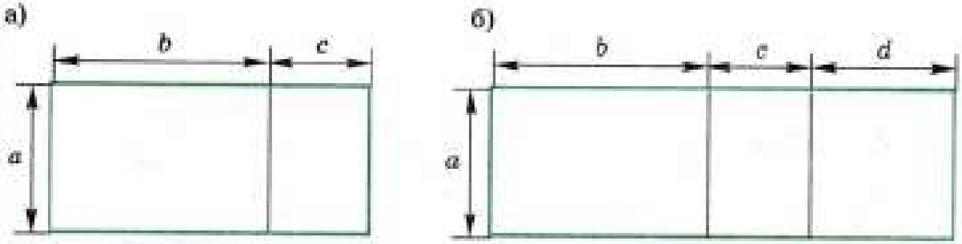


Рис. 11

Вынесите за скобки общий множитель многочлена **(283—286)**:

283. а) $3a + 3b$; б) $2x - 2y$; в) $5a + 10$;
г) $14 - 7y$; д) $12x + 6y$; е) $3a - 9b$;
ж) $5x + 5$; з) $4 - 4a$; и) $12a - 3$;
к) $18 + 36x$; л) $ab + bc$; м) $ax - ay$;
н) $2ab - 6a$; о) $6x + 8xy$; п) $12abx + 15a$.

284. а) $a^2 + ab$; б) $x^2 - x$; в) $a + a^2$;
г) $2xy - x^3$; д) $b^3 - b^2$; е) $a^4 + a^3b$;
ж) $x^2y^2 + y^4$; з) $4a^6 - 2a^3b$; и) $9x^4 - 12x^2y^4$.

285. а) $ax - bx + cx$; б) $8abx - 6acy - 10ak$;
в) $14acx - 21bcy - 7c$; г) $63xy - 84y^2 + 98ay$;
д) $15abx - 96y^2 + 12ab$; е) $20ax - 35bx - 40x^2$.

286. а) $a^2 - a^3 + a^4$; б) $x^3 + x^2 - x$;
в) $a^3 + 4b^2a$; г) $-5x^3y^2 - 5x^2y$;
д) $x^3y^4 - x^2y^2 + xy^3$; е) $2a^3b - 6ab^4 + 4a^2b^3$;
ж) $-2a^2b + 4ab^2 - 4b^3$; з) $16x + 8x^2 - 4x^3 + 2x^4$.

287. Напишите многочлен, противоположный данному:
а) $2a - 3bc + 2a^2$; б) $-3xy^2 - 5x^3 + y^4$;
в) $-3x + mn - 2y$; г) $3pq + 2p^2 - 3q^3$.

288. Подберите вместо букв M и N одночлены так, чтобы равенство было верным:
а) $2 \cdot (M - b) = 14a - 2b$;
б) $M \cdot (2a + 3b) = -6a - 9b$;
в) $N \cdot (2x - M) = 12x^2 - 18xy$;
г) $3a \cdot (N + M) = 15abc - 3ac^2$.

289. Упростите выражение:
а) $a - (b - (a + b) - a)$; б) $a - (b - (a - b - (a - b)))$;
в) $a - (a - (a - (a - b)))$; г) $b - (a - (a - (a - (a + b))))$.

290. **Доказываем.** а) Докажите, что $(n + 1)! - n \cdot n! = n!$.
б) Вычислите: $11! - (1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 10 \cdot 10!)$.

5.6. Произведение многочленов

Произведение двух многочленов равно многочлену, членами которого являются произведения каждого члена одного многочлена и каждого члена другого многочлена.

Таким образом, чтобы найти произведение многочленов, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные одночлены сложить.

Пользуясь этим правилом, найдём произведение двух многочленов $a + b$ и $a - b$:

$$(a+b)(a-b) = aa + ba + a(-b) + b(-b) = \\ = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2. \qquad (1)$$

В равенствах (1) полученный многочлен приведён к стандартному виду.

Очевидно, что произведение двух многочленов не зависит от того, будем ли мы умножать первый многочлен на второй или второй на первый.

Если надо найти произведение нескольких многочленов, то сначала находят произведение любых двух из них, затем полученный многочлен умножают на любой третий многочлен и т. д.

Например:

$$(a-b)(2a+b)(3a-2b) = (a2a - b2a + ab - bb)(3a-2b) = \\ = (2a^2 - ab - b^2)(3a - 2b) = \\ = 2a^23a - ab3a - b^23a + 2a^2(-2b) + ab2b + b^22b = \\ = 6a^3 - \underline{3a^2b} - \underline{3ab^2} - \underline{4a^2b} + \underline{2ab^2} + 2b^3 = \\ = 6a^3 - 7a^2b - ab^2 + 2b^3. \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2), если их записать в обратном порядке, имеют вид

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), \qquad (3)$$

$$6a^3 - 7a^2b - ab^2 + 2b^3 = (a-b)(2a+b)(3a-2b) \qquad (4)$$

и могут служить примерами разложения многочлена на множители.

Разложением многочлена на множители называют его преобразование в произведение двух или нескольких многочленов.

Любой многочлен можно разложить на два множителя, один из которых есть не равное нулю число.

Примеры:

$$x^2 + y^2 = 3\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2\right),$$

$$3a^2 - 2ab + b^2 = 5\left(\frac{3}{5}a^2 - \frac{2}{5}ab + \frac{1}{5}b^2\right).$$

Это — разложение на множители, один из которых имеет нулевую степень, а другой — ту же степень, что и исходный многочлен. Более интересны разложения на множители, каждый из которых имеет степень, бо́льшую нуля. Такими являются разложения (3) и (4).

Замечания. 1. Если нужно перемножить многочлены нестандартного вида, то естественно сначала привести их к стандартному виду, а потом уже применить правило умножения многочленов; результат будет тот же, но вычисления, как правило, значительно сократятся.

Например:

$$(a^2 - ab + ab - b^2)(2a - b - a) = (a^2 - b^2)(a - b) =$$
$$= a^3 - a^2b - ab^2 + b^3.$$

2. Произведение нулевого многочлена на любой многочлен есть нулевой многочлен. Например:

$$(a - a)(a^2 + ab + b^2) = 0 \cdot (a^2 + ab + b^2) =$$
$$= 0 \cdot a^2 + 0 \cdot ab + 0 \cdot b^2 = 0 + 0 + 0 = 0.$$

3. Если требуется доказать, например, что выражение $(a+b)(a-b)$ равно выражению $a^2 - b^2$, то задачу формулируют так: «Докажите, что верно равенство $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$». Или короче: «Докажите равенство $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$».

291. а) Чему равно произведение двух многочленов?
б) Зависит ли произведение двух многочленов от порядка множителей?
в) По какому правилу умножают три (и более) многочлена?
г) Что называют разложением многочлена на множители?
д) Следует ли приводить перемножаемые многочлены к стандартному виду?
е) Чему равно произведение многочленов, один из которых нулевой?

292. Как называют данное выражение:
а) $(a + b)2a$; б) $3a^2(a - b)$; в) $(x + y)(x + 1)$;
г) $(x + 2y)(x^2 - y)$; д) $(m + n)^2$; е) $(p - q)^2$?

293. Запишите произведение:
а) квадрата x и суммы x и y;
б) удвоенного a и разности a и 5;
в) суммы a и b и числа 7;
г) разности 3 и x и половины b;
д) квадрата a и суммы x и удвоенного y;
е) удвоенного квадрата a и разности 5 и b;
ж) разности a и b и их удвоенной суммы;
з) квадрата d и утроенной разности a и b;
и) квадрата разности a и b и числа 6.

Выполните умножение (**294—295**):

294. а) $(a + 1)(a + 1)$; б) $(x + 1)(x + 2)$;
в) $(2 + y)(y + 3)$; г) $(a + b)(a + b)$;
д) $(1 + x)(1 - x)$; е) $(a - 2)(3 - a)$;
ж) $(x - y)(x + y)$; з) $(a - b)(a - b)$;
и) $(2a + b)(a + 2b)$; к) $(3x + 2y)(3x + 2y)$.

295. а) $(5m + 7n)(2n + 4m)$;
б) $(12a + b)(3a + 5b)$;
в) $(2x - 3y)(2x + 3y)$;
г) $(5m - 2n)(3n - 5m)$;
д) $(-a - b)(2a - 3b)$;
е) $(-7x - 4y)(-5x + 7y)$;
ж) $(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)$;
з) $(mn^3 - m^2)(m - 1)$;
и) $(2x^3 - y^2)(y^2 + 2x^3)$;
к) $(xy^2 + 3a^2)(3xy + a^3)$.

Преобразуйте произведение многочленов в многочлен стандартного вида (296—300):

296. а) $(a + 1)(a + 1)(a + 1)$;
б) $(x - 1)(x - 1)(x - 1)$;
в) $(a + b)(a - b)(a + b)$;
г) $(m - n)(m - n)(m + n)$;
д) $(a + b + c)(a + 1)$;
е) $(a - b - c)(a - 1)$;
ж) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$;
з) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$;
и) $(x^3 + 2x - 3)(2 - 3x)$;
к) $(5m^2 - 3mn + n^2)(2n - m^2)$;
л) $(a + b + c)(a + b - c)$;
м) $(a - b + c)(a - b - c)$.

297. а) $-(a + b)(a + b)$;
б) $-(x - y)(x + y)$;
в) $-(x - y)(x - y)$;
г) $-(2m - n)(n - 3m)$;
д) $-(5a - 2b)(3b + 2a)$;
е) $-7(x + 8y)(y - 3x)$.

298. а) $(8x - 3)(4x + 5)$;
б) $8x - 3 \cdot 4x + 5$;
в) $(4a - 3) \cdot 2a - 3$;
г) $4a - 3\,(2a - 3)$.

299. а) $(0{,}1 - x)(x + 0{,}1)$;
б) $(1{,}2 - a)(1{,}2 + a)$;
в) $\left(\frac{1}{3} - m\right)\left(\frac{1}{2}m - 3\right)$;
г) $\left(\frac{1}{5}a - \frac{3}{7}b\right)(14a + b)$;
д) $(0{,}05y - 2{,}3x)(y - 0{,}2x)$;
е) $(2{,}5a + 3b)(0{,}1b - 4a)$;
ж) $\left(\frac{2}{3}m + 3n\right)\left(6m - \frac{1}{6}n\right)$;
з) $\left(1\frac{1}{2}x - y\right)\left(2\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}x\right)$.

300. а) $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$;
б) $(a - b + c)(a + b - c)$;
в) $(a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2)$.

301. **Доказываем.** Докажите равенство:
а) $(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$;
б) $2x^2 - 11x + 15 = (x - 3)(2x - 5)$.

302. Верно ли выполнены преобразования:
а) $(2x + 3y)(3x - 2y) = 6x^2 - 4xy + 9xy - 6y^2 = 6x^2 + 5xy - 6y^2$;
б) $(xy^2 + x^2y)(xy + 3) = x^2y^3 + 3xy^2 + x^3y^2 + 3x^2y$?

303. Вместо звёздочки подберите одночлен, чтобы выполнялось равенство:
а) $(a + *)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$;
б) $9 - 3a - 3a + a^2 = 9 - * + a^2$.

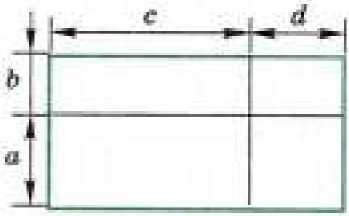


Рис. 12

304. **Доказываем.** Пользуясь рисунком 12, докажите, что для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ верно равенство $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$.

305. Разложите многочлен на множители:

а) $2x + 2y$; б) $6a - 3$; в) $ax - ab$;
г) $2a + 6ab$; д) $a^2 + a$; е) $3x^3y - xy^2$;
ж) $ax + bx + cx$; з) $5a^3 + 10a^2 + 15a$.

306. Составьте два многочлена, каждый из которых можно разложить на множители вынесением общего множителя $2x$ за скобки.

Разложите многочлен на множители (307—308):

307. а) $2a + 4b$; б) $ba - b$; в) $6x - 2$;
г) $yx + 2y$; д) $3a - 12b$; е) $7x - 28xy$.

308. а) $x(a + b) + y(a + b)$; б) $(a + b)a - b(a + b)$;
в) $m(n - 3) + 2(n - 3)$; г) $(x + y)3 - a(x + y)$;
д) $2a(1 - b) - 3(1 - b)$; е) $a(b + 3) - b(3 + b)$;
ж) $7x(x + 2y) - 2(2y + x)$; з) $a(a + b) + (a + b)$;
и) $2x(x + 2y) + 3y(x + 2y)$; к) $2x(a - 1) - (a - 1)$.

309. При преобразованиях бывает необходимо изменять знаки членов многочлена на противоположные, например:

$$(a + b) = (-1)(-a - b) = -(-a - b)$$

или

$$(a - b) = (-1)(-a + b) = -(b - a).$$

Используя этот приём, разложите на множители:

а) $a(x - y) + b(y - x)$; б) $x(a - b) + y(b - a)$;
в) $3(m - n) - a(n - m)$; г) $7a(a - b) - 5(b - a)$;
д) $a(a - b) + 4(b - a)$; е) $6(x - 1) - x(1 - x)$;
ж) $p(1 - p) - 3(p - 1)$; з) $x^2(y - 3) + 7(3 - y)$.

310. Разложите на множители:

а) $a(b - 1) - (1 - b)$; б) $(a + b) + 3a(a + b)$;
в) $2x(a - b) - (b - a)$; г) $3 + a + a(3 + a)$;
д) $(m - 2n) - x(2n - m)$; е) $a - b - x(b - a)$;
ж) $(x - 1)^2 + x(x - 1)$; з) $(x + 2)^2 - (x + 2)(x - 1)$;
и) $(2x - 1)^2 - x(2x - 1)$; к) $(3x - 1)^2 + (x + 2)(3x - 1)$;
л) $(x - 1)(x + 1) + (x - 3)(x + 1)$;
м) $(x - 2)(x + 2) - (x + 2)(x - 1)$;
н) $(x - 3)(2x + 3) - (3 - x)(x + 1)$.

311. Упростите выражение:

а) $(2x - 2a)(3a^2 - 4a + 5)$;
б) $(7x^2 - 2x + 4 - x^2)(2x - x - 1)$;
в) $(x^2 + 3x - 2)(2x^2 - x + 4)$;
г) $(2m^3 - 7m^2 + 4m)(3 - 8m + m^2)$;
д) $(2a + 1)(3 + a)(5a + 2)$;
е) $(x - 3)(2x - 1)(7 + 2x)$;
ж) $(2m - n)(3n + 2m)(m - 5n)$;
з) $(p - 8q)(4q - p)(p + 8q)$.

5.7. Целые выражения

Целым выражением называют такое алгебраическое выражение, в котором несколько многочленов соединены знаками сложения, вычитания и умножения.

Например, следующие выражения целые:

$$(a + b)(c - d) + (a - b) - (c - d),$$
$$-a(b - c)^2 + (d - c) - a^3 - 5,$$
$$-(a - b) - cd.$$

Считают, что многочлен также есть целое выражение.

Целые выражения можно упрощать, пользуясь правилами сложения, вычитания и умножения многочленов.

Как следует из этих правил, любое целое выражение можно преобразовать в многочлен стандартного вида. Следовательно, любое целое выражение равно некоторому многочлену.

Рассмотрим пример упрощения целого выражения:

$$15a^3b^2 - (3a^2b + a)(5ab - 2) =$$
$$= 15a^3b^2 - (3a^2b5ab - 3a^2b \cdot 2 + a5ab - a \cdot 2) =$$
$$= 15a^3b^2 - 15a^3b^2 + 6a^2b - 5a^2b + 2a =$$
$$= (15 - 15)a^3b^2 + (6 - 5)a^2b + 2a = 0 + a^2b + 2a = a^2b + 2a.$$

312. а) Что называют целым выражением? Приведите примеры.
б) Является ли целым выражением: число; одночлен; многочлен?
в) Любое ли целое выражение можно преобразовать в многочлен стандартного вида?
г) Может ли целое выражение равняться нулевому многочлену? Приведите примеры.

313. Какие из данных выражений являются целыми:

а) $7\left(2\frac{1}{2} - 5 \cdot 24\right)$; б) $7a^2bc$;
в) $3xy(2a + 3b)$; г) $(x - 2)(3y + 4) - \frac{2abc}{mn}$;
д) $\left(\frac{7}{8}a^2 - \frac{3}{5}ab^4\right)\frac{7}{12}a - 8b^4$; е) $2x(3 - x) + 4 - 8x$?

314. Упростите выражение:

а) $2(x - 1) + 3(2 - x)$; б) $2ab(3 - 2a) + 4b(3a - 7a^2)$;
в) $7m(m - n) - 3n(n + m)$; г) $(x - 2y) \cdot 2xy - 28x^2y$;
д) $x(x + 2y) - y(2x - 1)$; е) $x(x - 2y) - y(5 - 2x)$;
ж) $x^2(x + 2y) - y(2x^2 + 1)$; з) $x(x^2 - y^2) + y(xy - y^2)$;
и) $(x - y)^2(x + 1) - (x - y)^2x$; к) $(x + y)^2(x - 1) - (x - y)^2x$.

315. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень.
Чтобы избежать ошибок со знаком при вычислении, следует выполнить преобразования, например, так:

$$(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)=$$
$$=(x^2+2x+x+2)-(x^2+4x+3x+12)=$$
$$=(x^2+3x+2)-(x^2+7x+12)=$$
$$=x^2+3x+2-x^2-7x-12=-4x-10.$$

а) $2x+(x-1)(x+1)$;
б) $7p^2-(p+1)(p+2)$;
в) $(a+2)(a-1)-(a+1)(a-2)$;
г) $(p+2)(p-1)+(p+3)(p-5)$;
д) $(4-x)(2-x)-(x+2)(1-x)$.

Упростите целое выражение **(316—318)**:

316. а) $(5ab^2+4b^3)(3ab^3-4a^2)-18a^2b^3$;
б) $(7x^3y^2-xy)(-2x^2y^2+5xy^3)+12x^5y^4$;
в) $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)-x^2y(x-y)$;
г) $a^2(a^2-b^2)-(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)$;
д) $2-(-4x+1)(x-1)+2(6x-4)(x+3)$;
е) $6(x+1)(x+1)+2(x-1)(x^2+x+1)-2(x+1)$;
ж) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)$;
з) $3(3x-1)(2x+5)-6(2x-1)(x+2)$;
и) $(x^2+2)(x^2+2)-(x-2)(x+2)(x^2+4)$;
к) $5(a-2)(a+2)-\frac{1}{2}(8a-6)(8a-6)+17$.

317. а) $(a^2+1)(a^2+1)+(a-1)(a^2+1)-a^2$;
б) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)-(x^2-1)(x^2-1)(x^2-1)$;
в) $\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m^2-\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}m^3-\frac{1}{2}m^2\right)$;
г) $\left(\frac{1}{2}a-2b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+ab+4b^2\right)-\left(\frac{1}{8}a^3-8b^3\right)$;
д) $15x^3y^2-(5xy-2)(3x^2y+x)$;
е) $\frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c)-ab$;
ж) $(a+2b)(a+c)-(a-2b)(a-c)$.

318. а) $(x^2+y^2+x+y)(x+y+xy)$;
б) $(2a^2bc-3b^2c-7bc^2)(a^2c-b^3c^2+3bc^3-8c^2)$;
в) $(m^2-mn^2-mn-n^2)(m-mn-n^2+n)$;
г) $(0,1p^3-2p^2q-0,5pq^2+1,2p^3)(8p^2-0,2pq+5q^2)$.

5.8. Числовое значение целого выражения

Рассмотрим сначала целое выражение, в которое входит одна буква:

$$a^2 + 5a - 13. \tag{1}$$

Если вместо буквы a (где бы она ни стояла в этом выражении) подставить число 3, то получим числовое выражение

$$3^2 + 5 \cdot 3 - 13,$$

равное 11. Это число 11 называют **числовым значением целого выражения** (1) при $a = 3$. Далее для краткости слово «числовое» часто опускается, но подразумевается.

Значение этого же выражения при $a = 0$ равно -13, а при $a = -0{,}1$ равно $-13{,}49$ и т. д.

Рассмотрим теперь целое выражение

$$0{,}2a + 3b - ab + \frac{7}{4}, \tag{2}$$

в которое входит две буквы.

Если вместо буквы a, где бы она ни стояла в этом выражении, подставить число $(-0{,}1)$, а вместо буквы b, где бы она ни стояла в этом выражении, подставить число 2,5, то получим числовое выражение

$$0{,}2 \cdot (-0{,}1) + 3 \cdot 2{,}5 - (-0{,}1) \cdot 2{,}5 + \frac{7}{4},$$

равное числу 9,48. Это число называют **значением целого выражения** (2) при $a = -0{,}1$ и $b = 2{,}5$. При $a = 0$ и $b = 0$ значение этого выражения равно $\frac{7}{4}$, а при $a = -3$ и $b = 0$ оно равно $\frac{23}{20}$ и т. д.

Аналогично определяются значения целых выражений, содержащих три, четыре и более букв.

Пример 1. Значение выражения $\frac{1}{6}a - \frac{1}{15}b + c(a + b)$ при $a = 3$, $b = -5$, $c = 0{,}3$ равно

$$\frac{1}{6} \cdot 3 - \frac{1}{15} \cdot (-5) + 0{,}3(3 + (-5)) = \frac{7}{30}.$$

Пример 2. Значение выражения $x - y + t(z - x) + z(t + y)$ при $x = -0{,}1$, $y = -3{,}2$, $z = 1{,}7$, $t = 3{,}5$ равно

$$(-0{,}1) - (-3{,}2) + 3{,}5(1{,}7 - (-0{,}1)) + 1{,}7(3{,}5 + (-3{,}2)) = 9{,}91.$$

Подчеркнём, что для любого целого выражения при любых выбранных значениях входящих в него букв соответствующее числовое выражение имеет смысл, так как не содержит деления на нуль.

Задача 1. Докажем, что при любом значении x значение выражения $x^2 + 1$ не меньше 1.

Действительно, для любого числа x число x^2 — неотрицательное. Если к неотрицательному числу прибавить 1, то получится число, не меньшее 1, что и требовалось доказать.

Обычно задачу 1 формулируют так: «Докажем, что для любого числа x верно неравенство $x^2 + 1 \geqslant 1$». В дальнейшем мы так и будем формулировать аналогичные задачи.

Задача 2. Докажем, что для любых чисел x и y верно неравенство $x^2 + y^2 \geqslant 0$.

Действительно, для любого числа x число x^2 — неотрицательное, для любого числа y число y^2 — неотрицательное, а сумма неотрицательных чисел неотрицательна. Следовательно, для любых чисел x и y верно неравенство $x^2 + y^2 \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

319. Вычислите значение целого выражения:
а) $3x - 8$; б) $3x^2 + 4x + 1$; в) $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + x$
при $x = -10$.
Например, если $x = -2$, то $2x^2 - 7x + 5 = 2 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 5 = 2 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 5 = 8 + 14 + 5 = 27$.

320. Вычислите значение целого выражения:
а) abc; б) ab^2c^3; в) $3a^2(bc)^3$;
г) $(2ab)^3c^2$; д) $(a^2 - b^2) - 3c$; е) $7(a^3 - b^2)^2 + c^3$
при $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$.

321. Заполните таблицу:

x	1	3	0	-1	-5	0,5	$-\frac{1}{3}$
$x - 1$							
$x^2 - 1$							
$x^2 - 3x$							
$2x^2 - 3x + 7$							

322. Вычислите значение выражения:
а) x^2 при $x = 0,3$; $x = 0,01$; $x = 1,7$; $x = 0,001$; $x = 0,05$;
б) a^2 при заданных значениях a. Результаты запишите в таблицу:

a	7	1	-1	2	3	4	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{2}$
a^2										

323. Вычислите значение выражения:
а) $-x^2$; б) $(-x)^2$; в) $-x^3$; г) $(-x)^3$
при $x = -1\frac{1}{3}$.

324. При любых ли значениях a верно равенство:
а) $-a^2 = (-a)^2$; б) $-a^3 = (-a)^3$; в) $a^2 = a^3$; г) $a^2 + a^3 = 0$?

325. Вычислите площадь S квадрата со стороной:
а) 3 см; б) 5 см; в) 10 см;
г) 0,5 см; д) 2,1 м; е) 1,5 м.

326. Вычислите объём V куба, ребро которого равно:
а) 1 см; б) 3 см; в) 10 см;
г) 20 см; д) 0,5 м; е) 1,2 м.

Вычислите значение выражения (327—329):

327. а) $(3a^2b - 5x)(7a - 4bx^2)$ при $a = 1$, $b = 1$, $x = 1$;
б) $(2xy^2 - 3a)(4x - 5ya^3)$ при $x = 1$, $y = -1$, $a = 2$;
в) $(x^3yz^2 - 4xy^3)(3x^2y^3 - 5xy^2z^3)$ при $x = 2$, $y = -1$, $z = -1$;
г) $(a^2b^2c - 3b^5c^3)(5a^3bc^4 + 7ab^4c)$ при $a = -1$, $b = -1$, $c = -1$.

328. а) $(a + b + c)(a^2 + b^2)$ при $a = -3$, $b = -2$, $c = 4$;
б) $(a + b - c)(a^2 - b^2)$ при $a = 3$, $b = 2$, $c = -4$;
в) $(0,1 - x)(0,1 + y)(0,1 + z)$ при $x = 2$, $y = -1$, $z = 2$;
г) $(x + 0,1y)(0,1x + y)(0,1x + y)$ при $x = -2$, $y = 1$;
д) $\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)$ при $x = 4$;
е) $\left(\frac{1}{3}p + \frac{1}{2}q\right)\left(\frac{1}{3}p + \frac{1}{2}q\right)\left(\frac{1}{3}p + \frac{1}{2}q\right)$ при $p = 9$, $q = -1$;
ж) $(1 + x)(x + 2)(3 + x)(x + 4)$ при $x = -\frac{1}{3}$;
з) $(a - 1)(a + 1)(b - 1)(b + 1)$ при $a = -3$, $b = -5$;
и) $(m - n)(m + n)(n - m)(n + m)$ при $m = -0,5$, $n = 0,3$;
к) $(1 - x)(x - 2)(3 - x)(x - 4)$ при $x = 2$.

329. а) $a^2 + 5a - 13$ при $a = -3$;
б) $0,2a^2 + 3b - \frac{1}{5}a + \frac{7}{4}$ при $a = 1$, $b = -2$;
в) $x - y + (z - x) + z(t + y)$ при $x = 0$, $y = -1$, $z = -3$, $t = 2$;
г) $2x + 3y - z + 3$ при $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$;
д) $\frac{1}{3}a - \frac{1}{15}b + c(a + b)$ при $a = 3$, $b = -5$, $c = 0,3$;
е) $(a - b)(c - d)$ при $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, $d = 4$.

330. Верно ли, что значение выражения $-a$ отрицательно при любом значении a?

331. Укажите все значения a и b, для которых верно равенство:
а) $a + b = 0$; б) $a \cdot b = 1$; в) $a \cdot b = a$; г) $a \cdot b = -1$.

332. Доказываем. Докажите, что:
а) для любого числа x верно неравенство $x^2 - 5 \geqslant -5$;
б) для любых чисел x и y верно неравенство $x^2 + y^2 - 3 \geqslant -3$.

5.9. Тождественное равенство целых выражений

Выше рассматривались равенства одночленов, многочленов, целых выражений. Рассмотрим одно из таких равенств для одночленов:

$$2aaabb = 2ababa. \qquad (1)$$

Оно превращается в верное числовое равенство, если в нём заменить буквы числами. Ведь тогда в левой его части будет стоять произведение чисел, а в правой — то же произведение, но с переставленными множителями, а произведение чисел не зависит от порядка его множителей.

Когда говорят, что в равенстве буквы заменяются числами, то имеют в виду, что одна и та же буква, где бы она ни находилась в равенстве, заменяется одним и тем же числом.

Рассмотрим теперь равенство для многочленов

$$x + y = y + x. \qquad (2)$$

Оно превращается в верное числовое равенство, если в нём заменить буквы числами. Ведь тогда в левой части будет стоять сумма чисел, а в правой — та же сумма, но с переставленными слагаемыми, а сумма чисел не зависит от порядка её слагаемых.

Вообще если приравнять данный многочлен к многочлену, полученному из данного перестановкой его членов, то получится равенство между многочленами. Но если подставить в это равенство вместо букв любые числа, то получится верное числовое равенство, потому что сумма чисел не изменится, если в ней поменять местами слагаемые. Аналогичные рассуждения показывают, что равенства, получаемые при приведении подобных членов, при умножении одночлена на многочлен, многочлена на многочлен и т. д., превращаются в верные числовые равенства, если в них заменить буквы числами.

Равенство между буквенными выражениями называют **тождеством**, если оно превращается в верное числовое равенство при подстановке в него вместо букв любых чисел.

Все рассмотренные выше равенства между целыми выражениями есть тождества.

В частности, равенства (1) и (2) являются тождествами.

Часто для целых выражений A и B вместо слов «докажем равенство $A = B$» пишут «докажем тождество $A = B$».

Для доказательства тождеств используются изученные ранее свойства одночленов, многочленов и правила действий над ними.

Пример 1. Докажем тождество

$$(a^2 + b)(a^2 - b) = a^4 - b^2. \qquad (3)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства (3), применив сначала правило умножения многочленов, затем правило приведения подобных членов:

$$(a^2 + b)(a^2 - b) = a^4 + a^2b - a^2b - b^2 = a^4 - b^2.$$

Следовательно, левая часть равенства (3) равна правой, а это означает, что доказано тождество (3).

Пример 2. Докажем тождество

$$a^4 - 1 = (a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1). \qquad (4)$$

Доказательство. Преобразуем правую часть равенства (4), применив сначала правило умножения многочленов, затем правило приведения подобных членов:

$$(a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1) = a^4 - a^3 + a^3 - a^2 + a^2 - a + a - 1 = a^4 - 1.$$

Следовательно, правая часть равенства (4) равна левой, а это означает, что доказано тождество (4).

Пример 3. Докажем тождество

$$(a - 1)(a^2 + a + 1) = (a + 1)(a^2 - a + 1) - 2. \qquad (5)$$

Доказательство. Преобразуем обе части равенства (5):

$$(a - 1)(a^2 + a + 1) = a^3 - a^2 + a^2 - a + a - 1 = a^3 - 1,$$
$$(a + 1)(a^2 - a + 1) - 2 = a^3 + a^2 - a^2 - a + a + 1 - 2 = a^3 - 1.$$

Теперь очевидно, что левая и правая части равенства (5) равны, что и требовалось доказать.

Нулевые многочлены равны нулю тождественно, т. е. при любых числовых значениях входящих в них букв их числовое значение есть нуль. Такими многочленами являются, например, многочлены:

$$a - a, \quad 3x^2 - x^2 - 2x^2.$$

Остальные (ненулевые) многочлены могут обращаться в нуль только при определённых числовых значениях букв, но не тождественно, т. е. для каждого ненулевого многочлена существуют числовые значения букв, при которых многочлен не обращается в нуль. Вот примеры ненулевых многочленов:

$$a + b, \quad x - y, \quad a^2 + b^2 + 1.$$

Первый многочлен $a + b$ обращается в нуль лишь для значений a и b, удовлетворяющих равенству $a = -b$, но для остальных числовых значений a и b он не обращается в нуль.

Второй многочлен $x - y$ обращается в нуль лишь для значений x и y, удовлетворяющих равенству $x = y$, но он не обращается в нуль для остальных числовых значений x и y.

Третий многочлен $a^2 + b^2 + 1$ не обращается в нуль ни для каких числовых значений a и b.

333. а) Что называют тождеством?
б) Является ли тождеством верное равенство между целыми выражениями?
в) Приведите примеры тождественно равных целых выражений.
г) Приведите примеры многочленов, тождественно равных нулю.

334. Являются ли следующие выражения тождественно равными (объясните почему):
а) $(x + y)$ и $(y + x)$;
б) $c(3xy)$ и $3cxy$;
в) $(2a + 7 + a)$ и $(3a + 7)$;
г) $x(3x - 8)$ и $(3x^2 - 8x)$;
д) $(3m - 2n)$ и $(m - 2n + m)$;
е) $(2x - 3)$ и $(3x + 5)$;
ж) $(x + 1)(x - 1)$ и $x^2 - 1$;
з) $(x + 2)(x - 2)$ и $x^2 - 4$;
и) $(1 + y)(1 - y)$ и $1 - y^2$;
к) $(3 + y)(3 - y)$ и $9 - y^2$;
л) $(2x + 1)(2x - 1)$ и $4x^2 - 1$;
м) $(x + y)(x - y)$ и $x^2 - y^2$?

335. Являются ли следующие выражения тождественно равными (объясните почему):
а) $2 + x$ и $x + 2$;
б) $2a + 5$ и $a - 1 + a + 6$;
в) $x^2 - x + 3$ и $3 - x + x^2$;
г) $2(3x - 1)$ и $6x - 2$;
д) $x + y - 2x + 3y$ и $4y - x$;
е) $2a - b3 + 3b$ и $2a$;
ж) $3x + 4x + 5x + 1$ и $12x + 1$;
з) $5x - 2y + x$ и $-2y + 6x$;
и) $x^2 + 2y$ и $2(x^2 + y) - x^2$;
к) $3x(x - y)$ и $3y(y - x)$;
л) $(x - y)y$ и $(x - y)x$;
м) $(x + y)x$ и $(x - y)x$?

Доказываем (336—337).

336. Докажите тождество:
а) $a - b = -(b - a)$;
б) $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$;
в) $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$;
г) $(a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$;
д) $(m - n)(m^2 + mn + n^2) = m^3 - n^3$;
е) $(m + n)(m^2 - mn + n^2) = m^3 + n^3$;
ж) $(p + 1)(p + 1)(p + 1) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1$;
з) $(q - 1)(q - 1)(q - 1) = q^3 - 3q^2 + 3q - 1$.

337. Докажите тождество:
а) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$;
б) $ab(c - d) - cd(a - b) - ac(b - d) - bd(c - a) = 0$;
в) $(m - n)(2m + 3n)(m - 7) + 7(2m^2 + 2mn - 3n^2) =$
$= m(2m^2 + mn - 3n^2 + 7n)$;
г) $(a^3b - b^2)(a^2 - 2b)(a - 3b) + 3a^2b^2(a^3 - 2ab - b) +$
$+ 2b^2(a^4 - ab + 3b^2) = a^3b(a^3 - b)$;
д) $(a^2 - 4a + 4)(a^2 + 4a + 4) - a^2(a^2 - 8) = 16$;
е) $(4a^2 + 4a + 1)(4a^2 - 4a + 1) - 8a^2(2a^2 - 1) = 1$;
ж) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1) - a^8 = -1$;
з) $(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)(a^4 + 16) - a^8 = -256$.

§ 6. Формулы сокращённого умножения

6.1. Квадрат суммы

По определению

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b).$$

Пользуясь правилом умножения многочлена на многочлен, получаем

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2.$$

Равенство

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (1)$$

называют **формулой квадрата суммы.**

Так как в формуле (1) можно считать, что a и b — произвольные числа, то её обычно читают так:

квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого и второго чисел плюс квадрат второго числа.

Формула квадрата суммы часто применяется для упрощения вычислений, например:

$$51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 + 1^2 = 2601,$$
$$37^2 + 2 \cdot 37 \cdot 63 + 63^2 = (37 + 63)^2 = 10\,000.$$

Формула (1), если её читать справа налево, показывает, что многочлен $a^2 + 2ab + b^2$ можно разложить на множители, а именно представить как произведение двух одинаковых множителей $(a + b)$.

338. Запишите и прочитайте формулу квадрата суммы.

339. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида двумя способами:

а) $(m + n)^2$; б) $(2 + x)^2$; в) $(y + 4)^2$; г) $(1 + p)^2$;
д) $(2x + 1)^2$; е) $(2 + 3a)^2$; ж) $(2m + 5n)^2$; з) $(3x + 4y)^2$.

Например:

$$(2a + 3b)^2 = (2a + 3b)(2a + 3b) = 4a^2 + 6ab + 6ab + 9b^2 = \\ = 4a^2 + 12ab + 9b^2;$$

$$(2a + 3b)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a3b + (3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2.$$

340. Используя формулу квадрата суммы, преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(a^2 + b)^2$; б) $(x + y^3)^2$; в) $(m^2 + n^2)^2$;
г) $(p^3 + q^3)^2$; д) $(ab + c)^2$; е) $(x + yz)^2$;
ж) $(3m + n^3)^2$; з) $(2p + 3q^2)^2$; и) $(3ab^2 + 2c^3)^2$.

341. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $\left(\frac{1}{2} + a\right)^2$; б) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$; в) $(m + 0{,}2)^2$;
г) $(1{,}1 + p)^2$; д) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right)^2$; е) $\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}y\right)^2$;
ж) $(0{,}2m + 2{,}1n)^2$; з) $(0{,}4p + 0{,}3q)^2$; и) $\left(\frac{3}{5}ab + \frac{1}{2}c^2\right)^2$.

342. **Доказываем.** Пользуясь рисунком 13, докажите, что для $a > 0$, $b > 0$ верно равенство $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$.

343. Вычислите, применив формулу квадрата суммы:

а) 41^2; б) 91^2; в) 201^2;
г) 32^2; д) 72^2; е) 302^2.

344. **Доказываем.** Любое натуральное число, оканчивающееся цифрой 5, можно записать в виде $10a + 5$.
Например: $25 = 10 \cdot 2 + 5$.
Докажите, что для вычисления квадрата такого числа можно к произведению $a(a + 1)$ приписать справа 25.
Например: $25^2 = \underline{6}25$ $(2 \cdot 3 = \underline{6})$.

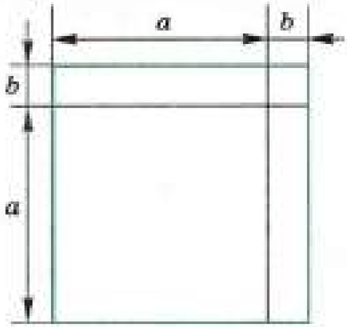


Рис. 13

345. Представьте многочлен в виде квадрата суммы:

а) $x^2 + 2xy + y^2$; б) $a^2 + 4ab + 4b^2$;
в) $9m^2 + 6mn + n^2$; г) $16p^2 + 40pq + 25q^2$;
д) $x^2 + 2x + 1$; е) $9 + 6a + a^2$;
ж) $16 + 8p + p^2$; з) $4m^2 + 9n^2 + 12mn$;
и) $x^4 + 2x^3y^3 + y^6$; к) $a^6 + 2a^3b^3 + b^6$.

346. Вместо букв C и D подберите одночлены так, чтобы выполнялось равенство:

а) $(a + C)^2 = D + 2ab + b^2$;
б) $(2x + C)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$;
в) $(C + 3m)^2 = 4n^2 + 12mn + 9m^2$;
г) $(C + D)^2 = 9p^2 + 30pq + 25q^2$.

347. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(a + b)^2 + (a + b)(a - b)$; б) $(a + 3)^2 + (x + 1)^2$;
в) $2(m + 1)^2 + 3(m + 2)^2$; г) $5(p + q)^2 + 3(p + 2q)^2$;

д) $(2a + 3b)^2 - (3a + 2b)^2$;
е) $2(3x + y)^2 - 3(2x + 3y)^2$;
ж) $(m + n)^2 + 2(m + n)(2m - n) + (2m - n)^2$;
з) $2(p + 3q)(p + 2q) - (p + 2q)^2 - (3q + p)^2$.

348. Запишите в виде многочлена выражение:
а) $(a + 2b)(a + 2b)$; б) $(2x + 3y)^2$;
в) $(3x + y)^2 + (x + 3y)^2$; г) $(x + 2)^2$.

349. Выясните, является ли многочлен квадратом какого-либо двучлена:
а) $a^2 + 4ac + 4c^2$; б) $1 + x^2 + 2x$;
в) $a^2c^2 + 2acd + d^2$; г) $9 + 6x + x^2$.

350. Используя приближённое равенство $(1 + x)^2 \approx 1 + 2x$, вычислите:
а) $1{,}002^2$; б) $1{,}0001^2$; в) $1{,}00003^2$; г) $1{,}000004^2$.

Замечание. Приближённое значение числа отличается от точного значения на величину x^2, которая будет мала при значениях x, близких к нулю.
Например:

$$1{,}001^2 = (1 + 0{,}001)^2 \approx 1 + 0{,}002 = 1{,}002.$$

6.2. Квадрат разности

Очевидны следующие равенства:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = aa - ba - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

откуда

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \qquad (1)$$

Это равенство называют **формулой квадрата разности.** Так как в формуле (1) можно считать, что a и b — произвольные числа, то её читают так:

квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого и второго чисел плюс квадрат второго числа.

Эта формула также часто применяется для упрощения вычислений, например:

$$49^2 = (50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 + 1 = 2401,$$
$$29^2 - 2 \cdot 29 \cdot 9 + 9^2 = (29 - 9)^2 = 400.$$

Формула (1), если её читать справа налево, показывает, что многочлен $a^2 - 2ab + b^2$ можно представить как произведение двух одинаковых множителей $(a - b)$.

Замечание. Формулу (1) можно получить как следствие формулы (1) предыдущего пункта, заменив в ней всюду b на $-b$:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

351. Запишите и прочитайте формулу квадрата разности.

352. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида двумя способами:

а) $(a-b)^2$; б) $(x-3)^2$; в) $(1-m)^2$; г) $(5+p)^2$;
д) $(2a-3)^2$; е) $(4-3y)^2$; ж) $(3m+2n)^2$; з) $(5p-2q)^2$.

353. Используя формулу квадрата суммы или разности, преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $(a-b^2)^2$; б) $(x^3-y)^2$; в) $(m^3-n^2)^2$;
г) $(p^4+q^3)^2$; д) $(a^3+ab)^2$; е) $(x^3-y^2z)^2$;
ж) $(2m-n^3)^2$; з) $(3p^2-2q^3)^2$; и) $(4a^2b-3ab^2)^2$.

354. Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $\left(\frac{1}{5}mn - m^3\right)^2$; б) $\left(-\frac{1}{2} + 3bc\right)^2$;

в) $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}y^4\right)^2$; г) $\left(-1\frac{1}{2}p^2 + \frac{2}{3}q\right)^2$;

д) $\left(1\frac{1}{3}ab^2 - 3a^2b\right)^2$; е) $\left(2m^3n^2 - 2\frac{1}{2}mn^3\right)^2$;

ж) $(0{,}1a + 3a^2b)^2$; з) $(1{,}2xy + 0{,}7x^2)^2$;
и) $(-0{,}5x^3y^2 + 0{,}3xy^3)^2$.

355. **Доказываем.** Пользуясь рисунком 14, докажите формулу квадрата разности для $a > 0$, $b > 0$, $a > b$.

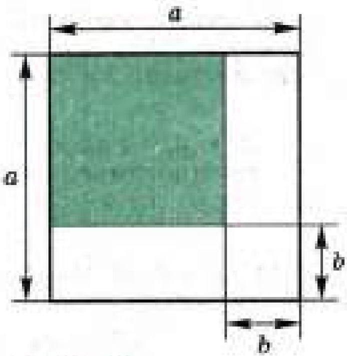


Рис. 14

356. Вычислите, применив формулу квадрата разности:

а) 49^2; б) 89^2;
в) 199^2; г) 38^2;
д) 98^2; е) 198^2.

357. Представьте многочлен в виде квадрата разности:

а) $a^2 - 2ab + b^2$; б) $4x^2 - 4xy + y^2$;
в) $9m^2 - 6m + 1$; г) $25 - 30c + 9c^2$;
д) $16p^2 - 56pq + 49q^2$; е) $100a^2 + 25b^2 - 100ab$;
ж) $x^4 - 6x^2y + 9y^2$; з) $16 + 9x^6 - 24x^3$.

358. **Доказываем.** Докажите тождество:
а) $(a-b)^2=(b-a)^2$; б) $(-a-b)^2=(a+b)^2$.

359. Вместо букв C и D подберите одночлены так, чтобы выполнялось равенство:
а) $(a-C)^2=a^2-4a+4$; б) $(C-y)^2=4x^2-D+y^2$;
в) $(C-D)^2=9m^2-12mn+4n^2$; г) $(C+3q)^2=D-24pq+9q^2$.

360. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:
а) $(m+n)^2+(m-n)^2$; б) $2(a-1)^2+3(a-2)^2$;
в) $5(x-y)^2+(x-2y)^2$; г) $4(m-2n)^2-3(3m+n)^2$;
д) $3(2a-b)^2-5(a-2b)^2$; е) $4(3x+4y)^2-7(2x-3y)^2$;
ж) $2(p-3q)^2-4(2p-q)^2-(2q-3p)(p+q)$;
з) $5(n-5m)^2-6(2n-3m)^2-(3m-n)(7m-n)$;
и) $(2p-q)^2-2(2p-q)(p-q)+(p-q)^2$.

361. Запишите в виде многочлена выражение:
а) $(x-2y)^2$; б) $(ab-c)^2$; в) $(5xy-2)^2$.

362. Выясните, является ли многочлен квадратом какого-либо двучлена:
а) $a^2-4ab+4b^2$; б) x^2-4x+4; в) a^4-2a^2+1.

363. Используя приближённое равенство $(1-x)^2\approx 1-2x$, вычислите:
а) $0{,}98^2$; б) $0{,}999^2$; в) $0{,}998^2$; г) $0{,}9997^2$.

Замечание. Приближённое значение числа отличается от точного значения на величину x^2, которая будет мала при значениях x, близких к нулю.

Например:

$$0{,}99^2=(1-0{,}01)^2\approx 1-2\cdot 0{,}01=0{,}98.$$

6.3. Выделение полного квадрата

Пример 1. Рассмотрим многочлен второй степени относительно x:

$$x^2+6x+5.$$

Этот многочлен можно преобразовать следующим образом:

$$x^2+6x+5=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+5=(x+3)^2-4.$$

Мы представили $6x$ в виде удвоенного произведения x и 3, прибавили к многочлену и вычли из него одно и то же число 3^2, далее применили формулу квадрата суммы для двучлена $x+3$.

Итак, получено равенство

$$x^2+6x+5=(x+3)^2-4,$$

показывающее, что многочлен второй степени x^2+6x+5 равен сумме квадрата двучлена $x+3$ и числа -4. В этом случае говорят, что из многочлена x^2+6x+5 выделен полный квадрат.

Пример 2. Рассмотрим многочлен второй степени относительно x:

$$x^2 - 8x.$$

Проведём преобразование:

$$x^2 - 8x = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 = (x - 4)^2 - 16.$$

Мы представили $8x$ в виде удвоенного произведения x и 4, прибавили к многочлену и вычли из него одно и то же число 4^2, наконец, применили формулу квадрата разности для двучлена $x - 4$.

Итак, получено равенство

$$x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16,$$

показывающее, что многочлен второй степени $x^2 - 8x$ равен сумме квадрата двучлена $x - 4$ и числа -16. Следовательно, из многочлена $x^2 - 8x$ выделен полный квадрат.

Аналогично рассуждая, можно выделить полный квадрат из любого многочлена второй степени относительно x с коэффициентом при x^2, равным 1, т. е. записать этот многочлен в виде суммы квадрата двучлена и числа. Приведём ещё примеры выделения полного квадрата из многочлена второй степени относительно x.

Пример 3.

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Пример 4.

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 9 = (x - 3)^2.$$

Можно выделить полный квадрат и из многочлена второй степени относительно x с коэффициентом при x^2, отличным от 1.

Пример 5.

а) $16x^2 + 24x + 1 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 1 = (4x + 3)^2 - 8.$

б) $3x^2 + 6x + 1 = 3(x^2 + 2x) + 1 = 3(x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2) + 1 =$
$= 3(x + 1)^2 - 2.$

Выделение полного квадрата часто используют для доказательства числовых неравенств.

Пример 6. Докажем, что для любого числа x верно неравенство:

а) $x^2 + 6x + 9 \geqslant 0$; б) $x^2 + 4x + 4{,}1 > 0$.

Доказательство. а) Так как

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

и для любого числа x имеем $(x + 3)^2 \geqslant 0$, то для любого числа x верно неравенство

$$x^2 + 6x + 9 \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

б) Так как

$$x^2 + 4x + 4,1 = (x + 2)^2 + 0,1$$

и для любого числа x имеем $(x + 2)^2 \geqslant 0$, то для любого числа x верно неравенство

$$x^2 + 4x + 4,1 > 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 7. Докажем, что для любых чисел x и y верно неравенство

$$x^2 + y^2 + 6x - 14y + 58 \geqslant 0.$$

Доказательство. Так как

$$x^2 + y^2 + 6x - 14y + 58 = (x + 3)^2 + (y - 7)^2$$

и для любого числа x верно неравенство $(x + 3)^2 \geqslant 0$, а для любого числа y верно неравенство $(y - 7)^2 \geqslant 0$, то для любых чисел x и y верны неравенства

$$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 \geqslant 0 \text{ и } x^2 + y^2 + 6x - 14y + 58 \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать. ●

364. Из любого ли многочлена второй степени с коэффициентом 1 при x^2 можно выделить полный квадрат?

365. Представьте выражение в виде степени с показателем 2:
а) 9; б) $16x^2$; в) $4a^2b^2$; г) $25p^2$; д) $m^4n^6k^{10}$; е) $49a^4b^6c^{12}$.

366. Представьте выражение в виде удвоенного произведения двух выражений:
а) $4xy$; б) $6ab$; в) $10m^2n$; г) $8pq^4$;
д) x; е) $-3ab$; ж) $-0,3pq$; з) $-2,7c$.

367. Прибавьте к двучлену такой одночлен, чтобы полученный трёхчлен являлся полным квадратом:
а) $x^2 + 2x$; б) $a^2 + 4ab$; в) $m^2 + 1$;
г) $9 + 6p$; д) $10y + 25$; е) $16x^2 + 8xy$.

Выделите полный квадрат из многочлена (368—370):

368. а) $a^2 + 2a + 2$; б) $x^2 - 2x + 3$; в) $m^2 - 2m - 1$;
г) $4 + 2q + q^2$; д) $x^2 + 6x + 1$; е) $a^2 - 4a + 1$;
ж) $m^2 - 6m + 9$; з) $16 + 8p + p^2$; и) $a^2 - 2a$;
к) $x^2 + 6x$; л) $m + m^2 + 1$; м) $3 + p^2 - p$.

369. а) $-3a + 3 + a^2$; б) $a^2 - 1 + 5a$; в) $m^2 - 2 + 11m$;
г) $-q + q^2 - 7$; д) $a^2 + \frac{1}{2}a + 4$; е) $x^2 - \frac{1}{3}x - 1$;
ж) $m^2 + 1$; з) $4 + p^2$; и) $x^2 - 5x$.

370. а) $4x^2 + 4x + 5$; б) $9x^2 + 6x + 7$;
в) $16x^2 + 8x - 1$; г) $25x^2 + 20x + 3$;
д) $4x^2 + 4x + 3$; е) $9x^2 + 18x + 4$;
ж) $2x^2 + 4x + 5$; з) $5x^2 + 20x + 1$;
и) $3x^2 - 12x + 16$; к) $6x^2 - 24x + 1$.

Доказываем (371—373):

371. Докажите, что для любого числа x верно неравенство:
а) $x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$; б) $x^2 + 4x + 4 \geqslant 0$;
в) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$; г) $x^2 - 8x + 16 \geqslant 0$.

372. Докажите, что для любого числа x верно неравенство:
а) $x^2 + 2x + 2 > 0$; б) $x^2 + 4x + 5 > 0$;
в) $x^2 - 6x + 11 > 0$; г) $x^2 - 8x + 17 > 0$.

373. Докажите, что для любых чисел x и y верно неравенство:
а) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 \geqslant 0$; б) $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 45 \geqslant 0$;
в) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 \geqslant 0$; г) $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 50 \geqslant 0$.

6.4. Разность квадратов

Рассмотрим произведение

$$(a + b)(a - b).$$

Применив правило умножения многочленов и приведя подобные члены, получим

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ba - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Итак, получено равенство

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}, \qquad (1)$$

которое называют **формулой разности квадратов.**

Оно читается так:

разность квадратов двух чисел равна произведению суммы этих чисел и их разности.

Формула (1) даёт разложение многочлена $a^2 - b^2$ на множители.

Формулу разности квадратов часто используют для упрощения вычислений. Например:

$$41 \cdot 39 = (40 + 1)(40 - 1) = 40^2 - 1 = 1600 - 1 = 1599.$$

374. Запишите и прочитайте формулу разности квадратов.

375. Заполните пропуски, применив формулу разности квадратов:
а) $(x - y) \cdot (x + y) = \dots$; б) $m^2 - n^2 = \dots$.

376. Представьте выражение в виде многочлена двумя способами:
а) $(p+q)(p-q)$; б) $(a-b)(a+b)$; в) $(c+d)(d-c)$;
г) $(y-x)(x+y)$; д) $(a-3)(3+a)$; е) $(2-b)(b+2)$;
ж) $(m+1)(m-1)$; з) $(7-n)(7+n)$.

377. Упростите выражение, используя формулу разности квадратов. Сначала представьте выражение в виде разности квадратов, затем упростите запись степени.
Например: $(3a-2b)(3a+2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$.
а) $(x+2y)(x-2y)$; б) $(2a+b)(2a-b)$;
в) $(3m-n)(3m+n)$; г) $(p-7q)(7q+p)$;
д) $(2a-3b)(2a+3b)$; е) $(5x+4y)(4y-5x)$;
ж) $(4p-1)(1+4p)$; з) $(5m+8n)(8n-5m)$;
и) $(4y-7x)(7x+4y)$; к) $(11a-13b)(11a+13b)$.

378. Вычислите, используя формулу разности квадратов:
а) $71\cdot 69$; б) $82\cdot 78$; в) $299\cdot 301$;
г) $498\cdot 502$; д) $3{,}01\cdot 2{,}99$; е) $10{,}2\cdot 9{,}8$.

379. Представьте выражение в виде квадрата:
а) 121; б) x^4; в) a^6; г) $4x^2y^6$;
д) $25m^2n^6$; е) $\frac{1}{4}p^2$; ж) $0{,}25x^4$; з) $2\frac{1}{4}x^4q^2$.

380. Представьте выражение в виде разности квадратов:
а) x^4-1; б) $4a^2-4$; в) m^6-25;
г) $16y^2-49x^2$; д) $9p^4-16q^6$; е) $36m^2-16n^2$.

Разложите многочлен на множители (381—382):

381. а) a^2-b^2; б) y^2-x^2;
в) $(2x)^2-1$; г) $9-(3m)^2$;
д) $16-p^4$; е) $25-a^6$;
ж) m^4-n^2; з) p^8-49;
и) $1-x^4$; к) a^4-b^4.

382. а) $4a^2-1$; б) $4a^2-9b^2$;
в) $9x^4-4$; г) x^4-16.

383. **Доказываем.** Пользуясь рисунком 15, докажите формулу разности квадратов для $a>0$, $b>0$, $a>b$.

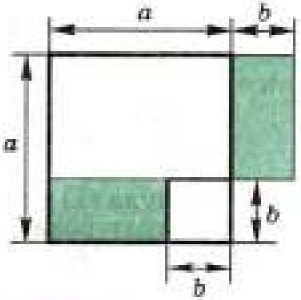


Рис. 15

384. Вместо букв C и D подберите одночлены так, чтобы выполнялось равенство:
а) $(2a-C)(2a+b^2)=4a^2-b^4$;
б) $(C+D)(x^2-y)=x^4-y^2$;
в) $(3m-C)(D+2n)=9m^2-4n^2$;
г) $(C+5q)(5q+D)=25q^2-16p^4$.

385. Упростите выражение:
а) $a(a-b)+b(a+b)+(a-b)(a+b)$;
б) $(m-n)(n+m)-(m-n)^2+2n^2$;
в) $(c-d)^2-(c+d)(d-c)+2cd$;
г) $(2a+5b)(5a-2b)-3(a+2b)(a-2b)$;
д) $(p+6)^2-4(3-p)(3+p)$;
е) $-(2+m)^2+2(1+m)^2-2(1-m)(m+1)$;
ж) $(x+y)^2-(x-y)^2$;
з) $(m-n)^2-(m+n)^2$.

386. **Доказываем.** Докажите тождество:
а) $(a-b)^2+(a-b)(b+a)=2a(a-b)$;
б) $2(x+5)^2-2(5-x)(5+x)=4x(x+5)$;
в) $2(c-3)^2-4(1-c)(c+1)=6(c-1)^2+8$;
г) $3(m-4)(4+m)-3(2-m)^2=12(m-5)$.

387. *Старинная задача.* Я купил столько коробок с мылом, сколько было кусков в коробке. Сестра купила на 3 коробки меньше, чем я, но в каждой было на 3 куска больше, чем в купленных мной. У кого больше кусков и на сколько?

Разложите на множители выражение (**388—389**):

388. а) $(3x+2)^2-x^2$; б) $(2x-5)^2-x^2$;
в) $(4x+3)^2-(x+1)^2$; г) $(5x-2)^2-(x-1)^2$.

389. а) $(3x+y)^2-(2x-3y)^2$; б) $(4x+3y)^2-(3x-4y)^2$;
в) $(5x-2y)^2-(2x-y)^2$; г) $(2x-4y)^2-(5x+y)^2$;
д) $(2x^2-y)^2-x^4$; е) $(x^2-2y)^2-y^4$;
ж) $(3x^2-2y)^2-4x^4$; з) $(4x^2+3y)^2-9y^4$.

6.5. Сумма кубов

Применяя правило умножения многочленов и приводя подобные члены, имеем

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3=a^3+b^3.$$

Итак, доказано равенство

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2). \qquad (1)$$

Это равенство называют **формулой суммы кубов**.

Многочлен a^2-ab+b^2 называют **неполным квадратом разности** a и b.

Формулу (1) читают так:

> **сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел и неполного квадрата их разности.**

Формула (1) даёт разложение многочлена a^3+b^3 на множители.

390. а) Запишите неполный квадрат разности a и b.
б) Запишите и прочитайте формулу суммы кубов.

391. Заполните пропуски, применив формулу суммы кубов:
а) $(x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) = \ldots$; б) $m^3 + n^3 = \ldots$.

392. Запишите:
а) куб a;
б) сумму x и y;
в) разность квадрата a и произведения a и b;
г) полный квадрат разности x и y;
д) неполный квадрат разности a и b;
е) сумму кубов m и n.

393. Укажите полные и неполные квадраты разности:
а) $a^2 - 5a + 25$; б) $x^2 - 2x + 1$; в) $9 - 3m + m^2$;
г) $49 - 14p + p^2$; д) $4k^2 - 4k + 1$; е) $4 - 4a + 4a^2$;
ж) $x^2 - 6x + 36$; з) $9 - 6y + y^2$; и) $\frac{1}{4}n^2 - n + 1$.

394. Запишите выражение в виде многочлена:
а) $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$; б) $(q + p)(p^2 - pq + q^2)$;
в) $(a + 1)(a^2 - a + 1)$; г) $(2 + x)(4 - 2x + x^2)$;
д) $(p^2 - 4p + 16)(p + 4)$; е) $(25 - 5m + m^2)(5 + m)$.

395. Упростите выражение:
а) $(a^3 + 1)(a^6 - a^3 + 1)$; б) $(2 + n^2)(n^4 - 2n^2 + 4)$;
в) $(x + y^2)(x^2 - xy^2 + y^4)$; г) $(p^3 + q^2)(q^4 - p^3q^2 + p^6)$;
д) $(a^4b^2 - 2a^2b + 4)(2 + a^2b)$; е) $(9n^2 - 3nm + m^2)(m + 3n)$;
ж) $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$; з) $(a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1)$;
и) $(4x^4y^2 - 6x^2ya + 9a^2)(3a + 2x^2y)$;
к) $(5p^3 + 2q^2)(4q^4 - 10p^3q^2 + 25p^6)$.

396. Представьте выражение в виде степени с показателем 3:
а) 125; б) 8; в) $27x^3$;
г) $64y^3$; д) m^3y^3; е) a^6b^3;
ж) x^3y^6; з) $\frac{1}{8}p^3$; и) $0{,}001c^6$.

397. Представьте выражение в виде суммы кубов:
а) $x^3 + 8$; б) $27 + a^3$; в) $1 + m^6$;
г) $p^9 + 64$; д) $x^6 + 8y^3$; е) $a^9 + 27b^3$;
ж) $8m^6 + n^9$; з) $64p^9 + q^{12}$; и) $\frac{1}{8} + x^6y^9$.

398. Разложите двучлен на множители:
а) $m^3 + n^3$; б) $a^3 + 1$; в) $b^3 + 8$; г) $x^3 + y^6$;
д) $p^6 + q^6$; е) $m^6 + n^{15}$; ж) $27a^3 + b^3$; з) $x^3 + 64y^3$;
и) $c^6 + 125d^3$; к) $8p^6 + q^{12}$.

399. Подберите одночлены A, B и C так, чтобы выполнялось равенство:

а) $m^3 + A = (m + B)(m^2 - mn + n^2)$;

б) $(x + A)(x^2 - 5x + 25) = x^3 + B$;

в) $(2x + 3y)(A - B + C) = 8x^3 + 27y^3$;

г) $(4a + 3b)(A - B + C) = 64a^3 + 27b^3$.

400. Упростите выражение:

а) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - 1)x$;

б) $(a^3 - b^3)(a^3 + b^3) + (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$;

в) $(3 + m)(m^2 - 3m + 9) - m(m - 2)^2$;

г) $(p^6 - q^3)(p^6 + q^3) - (p^8 - p^4q^2 + q^4)(p^4 + q^2)$.

401. **Доказываем.** Докажите тождество:

а) $(a^3 + 1)(a - 1) = (a^2 - a + 1)(a^2 - 1)$;

б) $m^3 + 1 = m(m + 1) + (1 - m)(1 - m^2)$;

в) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - a(a - 3)(3 + a) = 9a + 8$;

г) $m(m + n)(m - n) - (n + m)(m^2 - mn + n^2) = -n^2(m + n)$.

6.6. Разность кубов

Проведя рассуждения, как в п. 6.5, получим

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \qquad (1)$$

Это равенство называют **формулой разности кубов.**

Многочлен $a^2 + ab + b^2$ называют **неполным квадратом суммы** a и b.

Формулу (1) читают так:

разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел и неполного квадрата их суммы.

Формула (1) даёт разложение многочлена $a^3 - b^3$ на множители.

402. а) Запишите неполный квадрат суммы a и b.

б) Запишите и прочитайте формулу разности кубов.

403. Заполните пропуски, применив формулу разности кубов:

а) $(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = \dots$; б) $m^3 - n^3 = \dots$.

404. Составьте разность кубов выражений:

а) 5 и x; б) ab и a; в) a^2 и $3b$; г) $2x^3$ и $4y$.

405. Запишите неполный квадрат суммы выражений:

а) m и 4; б) $\frac{1}{2}$ и x^2; в) $2a$ и $3b$; г) mc и m^3.

406. Является ли выражение полным или неполным квадратом суммы:

а) $x^2 + x + 1$; б) $4 + 4x + x^2$; в) $a^2 + 6ab + 9b^2$;
г) $100 + 10x + x^2$; д) $\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + 1$; е) $4p + 1 + 4p^2$;
ж) $0,25m^2 + mn + n^2$; з) $4p^2 + \frac{1}{16}q^2 + pq$?

407. Запишите выражение в виде многочлена:

а) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
б) $(5 - a)(a^2 + 5a + 25)$;
в) $(2m - 5n)(4m^2 + 10mn + 25n^2)$;
г) $(7p + q)(49p^2 - 7pq + q^2)$;
д) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{9}y^2\right)$;
е) $(0,1a - 0,2b)(0,04b^2 + 0,02ab + 0,01a^2)$.

408. Упростите выражение:

а) $(3p - 10q)(100q^2 + 30pq + 9p^2)$;
б) $(7m + 2n)(4n^2 - 14mn + 49m^2)$;
в) $(ab - 3)(a^2b^2 + 3ab + 9)$;
г) $(km - n^2)(k^2m^2 + kmn^2 + n^4)$;
д) $\left(4y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2\right)\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)$;
е) $(1,21q^2 + 0,22pq + 0,04p^2)(0,2p - 1,1q)$;
ж) $\left(\frac{1}{9}m^4 + m^2nk + 9n^2k^2\right)\left(\frac{1}{3}m^2 - 3nk\right)$;
з) $\left(1\frac{1}{2}a^3 - 0,5b^2\right)\left(2\frac{1}{4}a^6 + \frac{3}{4}a^3b^2 + 0,25b^4\right)$.

409. Разложите двучлен на множители:

а) $m^3 - 1$; б) $p^3 - 27q^3$; в) $125x^3 - 8y^3$;
г) $64a^3 + 1000b^3$; д) $x^6 - y^6$; е) $m^{12} - 64$;
ж) $x^9 - x^6$; з) $c^6d^3 - k^3$.

410. Подберите одночлены A, B и C так, чтобы выполнялось равенство:

а) $x^3 + A = (x + B)(x^2 - 4x + 16)$;
б) $A - 8c^6 = (3a - B)(C + 6ac^2 + 4c^4)$;
в) $B - 125m^9 = (A - 5m^3)(a^2 + 5am^3 + 25m^6)$;
г) $64m^9 + A = (4m^3 + C)(16m^6 - B + 4a^8)$.

411. Упростите выражение:

а) $(x - 1)(x^2 + x + 1) - (1 + x)(1 - x + x^2)$;
б) $(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) + a^4(1 - a)(1 + a)$;
в) $2p^2(2 - p)(p^2 + 2p + 4) - 4(p - 5)(5 + p)$;
г) $n^3(2 + n^2)(n^2 - 2) - (m - n^3)(m^2 + mn^3 + n^6)$.

412. **Доказываем.** Докажите тождество:
а) $(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) = a^6 - b^6$;
б) $(a - 1)(a - 2)(a^2 + a + 1)(a^2 + 2a + 4) = a^6 - 9a^3 + 8$.

6.7*. Куб суммы

По свойству степени с натуральным показателем

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b).$$

Применяя теперь формулу квадрата суммы, правило умножения многочленов и приводя подобные члены, получаем

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Итак, доказано равенство

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (1)$$

которое называют **формулой куба суммы** и читают так:

куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа и второго плюс утроенное произведение первого числа и квадрата второго плюс куб второго числа.

Формула (1), если её читать справа налево, показывает, что многочлен $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ можно разложить на множители, а именно на произведение трёх одинаковых множителей $(a + b)$.

413. Запишите и прочитайте формулу куба суммы.

414. Заполните пропуски, применив формулу куба суммы:
а) $(x + y)^3 = \ldots$; б) $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 = \ldots$.

415. Запишите:
а) сумму a и b; б) квадрат суммы a и b;
в) куб суммы a и b; г) сумму квадратов a и b;
д) сумму кубов a и b; е) удвоенное произведение a и b;
ж) утроенное произведение a и b;
з) утроенное произведение квадрата a и b;
и) утроенное произведение a и квадрата b.

Запишите выражение в виде многочлена **(416—417)**:

416. а) $(x + y)^3$; б) $(x + 1)^3$; в) $(x + 2)^3$; г) $(3 + y)^3$.

417. а) $(a + b)^3$; б) $(a + 4)^3$; в) $(2a + 1)^3$;
г) $(2a + 3b)^3$; д) $(x + 3z)^3$; е) $(2b + 3)^3$.

418. Запишите выражение в виде степени двучлена:
а) $a^2 + 2ab + b^2$; б) $a^2 - 2ab + b^2$;
в) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; г) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$.

419. Выясните, является ли многочлен кубом какого-либо двучлена:
а) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$; б) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$;
в) $27 + 27b + 9b^2 + b^3$.

420. Упростите выражение двумя способами:
а) $(x + 3)^3 - (x + 2)^3$; б) $(x + 2)^3 - (x + 1)^3$.

6.8*. Куб разности

Рассуждая, как в п. 6.7, получим

$$(a - b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = \\ = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

т. е. придём к равенству

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \qquad (1)$$

Это равенство называют **формулой куба разности** и читают так:

куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа и второго плюс утроенное произведение первого числа и квадрата второго минус куб второго числа.

Переписав формулу (1) в виде

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3,$$

получим разложение многочлена $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ на множители, а именно на произведение трёх одинаковых множителей $(a - b)$.

421. Запишите и прочитайте формулу куба разности.

422. Заполните пропуски, применив формулу куба разности:
а) $(x - y)^3 = \dots$; б) $m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3 = \dots$.

423. Запишите:
а) разность a и b; б) квадрат разности a и b;
в) разность квадратов a и b; г) куб разности a и b;
д) разность кубов a и b.

Запишите выражение в виде многочлена (**424—425**):

424. а) $(x - y)^3$; б) $(x - 1)^3$; в) $(x - 2)^3$; г) $(x - 3)^3$.

425. а) $(a + b)^3$; б) $(a - b)^3$; в) $(a + 2)^3$; г) $(a - 2)^3$;
д) $(a + 3)^3$; е) $(a - 3)^3$; ж) $(a + 4)^3$; з) $(a - 4)^3$;
и) $(2a + b)^3$; к) $(a - 2b)^3$; л) $(3a + 2b)^3$; м) $(2a - 3b)^3$.

426. Запишите выражение в виде степени двучлена:

а) $a^2 - 2ab + b^2$; б) $a^2 + 4a + 4$;
в) $a^2 + 6a + 9$; г) $a^2 - 10a + 25$;
д) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; е) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$;
ж) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$; з) $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$.

427. Выясните, является ли многочлен кубом какого-либо двучлена:

а) $1 - 3x + 3x^2 - x^3$;
б) $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$;
в) $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$.

428. Упростите выражение двумя способами:

а) $(x - 1)^3 - (x + 1)^3$; б) $(x + 2)^3 + (x - 2)^3$.

429. Как получить формулу куба разности из формулы куба суммы?

6.9. Применение формул сокращённого умножения

Формулы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

называют **формулами сокращённого умножения.**

Отметим, что все эти равенства являются тождествами.

Они остаются справедливыми, если в них вместо a и b подставить любые целые выражения. Например, выражение

$$(a + b + c + d)^2$$

можно рассматривать как квадрат суммы двух целых выражений $(a + b)$ и $(c + d)$, поэтому справедливы равенства

$$(a + b + c + d)^2 = ((a + b) + (c + d))^2 =$$
$$= (a + b)^2 + 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Таким образом, получена формула

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Формулы сокращённого умножения часто применяются для упрощения выражений, например:

$$(a+1)(a-1)(a^4+a^2+1)+(a^2-a+1)(a+1)=$$
$$=(a^2-1)(a^4+a^2+1)+(a+1)(a^2-a+1)=(a^6-1)+(a^3+1)=$$
$$=a^6+a^3.$$

Здесь мы последовательно применили формулы разности квадратов, разности и суммы кубов. Отметим, что формулы сокращённого умножения применяются для разложения многочлена на множители. Мы расскажем об этом в следующем пункте.

430. Запишите известные вам формулы сокращённого умножения.

431. Перепишите формулы сокращённого умножения, используя буквы: а) x и y; б) m и n.

432. Для чего применяются формулы сокращённого умножения?

433. Упростите выражение:
а) $(a+1)^2-2(a+1)+1$;
б) $(m-n)^2+2n(m-n)+n^2$;
в) $(p-q)^2-2(p^2-q^2)+(p+q)^2$;
г) $(x+2y)^2+2(x^2-4y^2)+(2y-x)^2$.

Преобразуйте выражение в многочлен (**434—439**):

434. а) $(x+y+z)(x+y-z)$; б) $(x-y+z)(x-y-z)$;
в) $(x-y+z)(x+y+z)$; г) $(x-y-z)(x+y-z)$;
д) $(x-y-z)(x+y+z)$; е) $(-x-y-z)(x-y-z)$.

435. а) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$;
б) $(a-b+c+d)(a-b-c-d)$;
в) $(a+b-c+d)(a+b+c-d)$;
г) $(a-b-c+d)(a-b+c-d)$.

436. а) $(1+x)(1-x)(1+x^2)$; б) $(a-1)(1+a)(a^2+1)$;
в) $(m+n)(n-m)(m^2+n^2)$; г) $(3-p)(p^2+9)(p+3)$;
д) $(x+2)(4-x^2)(x-2)$; е) $(p+q)^2(p-q)^2$;
ж) $(a-b)(a-b)(a+b)(a+b)$; з) $(5+m)(m-5)(m-5)(m+5)$.

437. а) $(a+1)(a+2)(a^2+4)(a^2+1)(a-2)(a-1)$;
б) $(a+b+c)(a+b-c)-2ab$;
в) $(a-b)(a+b)(b^2+a^2)(a^4+b^4)$;
г) $(a+b)^3-3ab(a+b)$;
д) $3ab(a-b)+(a-b)^3$;
е) $(a^2-2)(a^2+2)-(2-a^2)^2$.

438. а) $(5-a)(3-a)-(a-4)^2$; б) $(x+3)^2+3(x-2)^2$;
в) $3(2-m)^2+2(2-m)^2$; г) $5(2p-3)^2+2(5-2p)^2$;
д) $4(3-5a)^2-5(a-3)(2a-3)$;
е) $(a+1)^2+2(a+1)-3(a-1)(a+1)$;

ж) $3 - 2(5 - x)(x - 5) - 2(5 + x)^2$;
з) $(x - y - z)(x - y - z) - (x - y)^2$;
и) $(x + y + z)(x - y - z) - (x + y - z)(x - y + z)$;
к) $(x + y - z)(x - y + z) - (x + y + z)(x - y - z)$.

439. а) $4(1 - a)^2 + 3(a + 1)^2$; б) $3(m - 2)^2 + 5(m + 1)$;
в) $(a - b)^2 - (a + b)^2$; г) $(a + b)^2 - (a - b)^2$;
д) $2(x - 1)^2 - 3(x + 1)^2$; е) $4(a - 2b)^2 - 9(2a - b)^2$;
ж) $3(2 - 3m)^2 - 3(2 - 3m)(3m + 2)$;
з) $2(1 - 5x)^2 - 2(5x + 1)(1 - 5x)$.

Доказываем. Докажите тождество **(440—442)**:

440. а) $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$;
б) $a^3 - 3ab(a - b) - b^3 = (a - b)^3$.

441. а) $(1 + x^6)(1 - x^3)(x^3 + 1) = 1 - x^{12}$;
б) $(m - n)(m^2 + n^2)(n + m) = m^4 - n^4$.

442. а) $(m^2 + 1)(n^2 + 1) = (mn - 1)^2 + (n + m)^2$;
б) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$.

443. Запишите выражение в виде степени двучлена:
а) $(a + b)^2 - 4ab$; б) $(a - b)^2 + 4ab$;
в) $(x + 2y)^2 - 8xy$; г) $(x - 3y)^2 + 12xy$.

Доказываем (444—445).

444. Докажите, что:
а) разность квадратов двух последовательных натуральных чисел является нечётным числом;
б) разность квадратов двух последовательных чётных чисел делится на 4;
в) разность квадратов двух последовательных нечётных чисел делится на 8.

445. Докажите, что:
а) если к произведению двух целых последовательных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа;
б) сумма квадрата разности двух чисел и их учетверённого произведения равна квадрату суммы этих чисел;
в) разность квадрата суммы двух чисел и их учетверённого произведения равна квадрату разности этих чисел.

446. Вычислите:
а) $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)$;
б) $\dfrac{(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) + 1}{2^{64}}$;
в) $\dfrac{(3 + 2)(3^2 + 2^2)(3^4 + 2^4)(3^8 + 2^8)(3^{16} + 2^{16})(3^{32} + 2^{32}) + 2^{64}}{3^{64}}$.

447. **Доказываем.** *Задача Ибн Сины.* Если число, будучи разделено на 9, даёт остаток 1 или 8, то квадрат этого числа, делённый на 9, даёт остаток 1. Докажите.

Доказываем (448—449).

448. *Задача Пифагора.* Докажите, что всякое нечётное натуральное число, кроме 1, есть разность квадратов двух последовательных натуральных чисел.

449. *Задача Диофанта.* Докажите, что произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, само представляется двумя способами в виде суммы двух квадратов:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2;$$
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2.$$

6.10. Разложение многочлена на множители

Напомним, что разложить многочлен на множители — это значит преобразовать его в произведение двух или нескольких многочленов.

Приведём некоторые способы разложения многочлена на множители.

1. Вынесение за скобки общего множителя многочлена.

Пример 1. Разложим на множители многочлен

$$2ab - 3ac + a^2. \qquad (1)$$

Все члены многочлена (1) имеют общий множитель a. Вынося его за скобки, получим разложение многочлена (1) на множители:

$$2ab - 3ac + a^2 = a(2b - 3c + a).$$

2. Применение формул сокращённого умножения.

Как уже отмечалось, сами формулы сокращённого умножения дают разложение на множители важных в математике многочленов.

Часто, прежде чем применить какую-либо формулу сокращённого умножения, многочлен надо преобразовать.

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$49x^4 - 16y^6. \qquad (2)$$

Так как $49x^4 = (7x^2)^2$, а $16y^6 = (4y^3)^2$, то многочлен (2) можно записать в виде разности квадратов выражений $7x^2$ и $4y^3$. Применяя затем формулу разности квадратов, получим разложение многочлена (2) на множители:

$$49x^4 - 16y^6 = (7x^2)^2 - (4y^3)^2 = (7x^2 + 4y^3)(7x^2 - 4y^3).$$

3. Выделение полного квадрата.

Иногда многочлен можно разложить на множители, если сначала выделить полный квадрат (см. п. 6.3), а затем воспользоваться формулой разности квадратов.

Пример 3.

$$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 8 = (x + 1)^2 - 9 = (x + 1)^2 - 3^2 =$$
$$= ((x + 1) + 3)((x + 1) - 3) = (x + 4)(x - 2).$$

Пример 4.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 5 + 5^2 - 5^2 + 9 = (x^2 - 5)^2 - 16 =$$
$$= (x^2 - 5)^2 - 4^2 = ((x^2 - 5) + 4)((x^2 - 5) - 4) = (x^2 - 1)(x^2 - 9) =$$
$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3).$$

Пример 5.

$$9x^2 - 9x - 4 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 =$$
$$= \left(3x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(3x - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(3x - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = (3x - 4)(3x + 1).$$

Пример 6.

$$x^4 + 64 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2 = (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 =$$
$$= (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x) = (x^2 - 4x + 8)(x^2 + 4x + 8).$$

4. Группировка членов многочлена.

Этот способ применяется чаще всего в сочетании со способом вынесения за скобки общего множителя.

Пример 7. Разложим на множители многочлен

$$2ax + 2ay + 3bx + 3by. \qquad (3)$$

Группируя первый и второй члены, а также третий и четвёртый, перепишем многочлен (3) в виде

$$2ax + 2ay + 3bx + 3by = (2ax + 2ay) + (3bx + 3by).$$

Теперь в скобках записаны многочлены, каждый из которых имеет свой общий множитель. Вынося каждый из этих множителей за скобки, получим

$$(2ax + 2ay) + (3bx + 3by) = 2a(x + y) + 3b(x + y).$$

Теперь, вынося за скобки общий множитель $(x + y)$, имеем

$$2a(x + y) + 3b(x + y) = (x + y)(2a + 3b).$$

Итак, многочлен (3) разложен на множители:

$$2ax + 2ay + 3bx + 3by = (x + y)(2a + 3b).$$

Способ группировки часто применяется также в сочетании с формулами сокращённого умножения.

Пример 8. Разложим на множители многочлен

$$a^3 + a^2 - b^3 - b^2. \qquad (4)$$

Группируя первый и третий члены, а также второй и четвёртый и применяя затем формулы разности кубов и разности квадратов, получим

$$a^3 + a^2 - b^3 - b^2 = (a^3 - b^3) + (a^2 - b^2) =$$
$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)(a + b).$$

Вынося теперь за скобки общий множитель $(a - b)$, получим разложение многочлена (4) на множители:

$$a^3 + a^2 - b^3 - b^2 = (a - b)(a^2 + ab + b^2 + a + b).$$

Отметим, что, если бы мы сгруппировали члены многочлена (4) как-нибудь иначе, нам не удалось бы разложить его на множители. Это говорит о том, что способ группировки — трудный способ, требующий определённых навыков и смекалки.

5. Применение различных способов разложения многочлена на множители.

Часто для разложения многочлена на множители надо применить (может, неоднократно) несколько из рассмотренных способов.

Пример 9. Разложим на множители многочлен

$$a^4 + a^2b + ab^3 + 2ab^2 + b^3. \qquad (5)$$

Объединяя первый и третий члены, а также второй, четвёртый и пятый, вынесем за скобки их общие множители:

$$a^4 + a^2b + ab^3 + 2ab^2 + b^3 = (a^4 + ab^3) + (a^2b + 2ab^2 + b^3) =$$
$$= a(a^3 + b^3) + b(a^2 + 2ab + b^2).$$

Применяя формулы суммы кубов и квадрата суммы, получаем

$$a(a^3 + b^3) + b(a^2 + 2ab + b^2) = a(a + b)(a^2 - ab + b^2) + b(a + b)^2.$$

Вынося за скобки общий множитель $(a + b)$, имеем

$$a(a + b)(a^2 - ab + b^2) + b(a + b)^2 = (a + b)(a(a^2 - ab + b^2) + b(a + b)) =$$
$$= (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 + ab + b^2).$$

Итак, многочлен (5) разложен на множители:

$$a^4 + a^2b + ab^3 + 2ab^2 + b^3 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 + ab + b^2).$$

Пример 10.

$$x^2 + 4x - y^2 + 6y - 5 = (x^2 + 4x + 4) - (y^2 - 6y + 9) =$$
$$= (x + 2)^2 - (y - 3)^2 = (x + 2 + y - 3)(x + 2 - y + 3) =$$
$$= (x + y - 1)(x - y + 5).$$

В заключение отметим, что разложение многочлена на множители (мы имеем в виду множители, имеющие степень, большую нуля) — трудная, не всегда выполнимая задача. Существуют многочлены, которые вообще не разлагаются на множители, имеющие степень больше нуля. Таким, например, является многочлен $a^2 + b^2$.

450. Какие методы можно применять для разложения многочлена на множители?

451. Разложите двучлен на множители:

а) $x^2 + 2x$; б) $4x^2 + 2$; в) $4 - 8x^2$;
г) $4 + 6x^2$; д) $15 + 3x$; е) $14x^2 + 7x^4$;
ж) $-3 + 12x$; з) $8x^2 + 4x^3$.

452. Верно ли выполнено разложение многочлена на множители:

а) $3x - 12x^2 = 3x(1 - 4x)$;
б) $8ab + 6a^2b^3 = 2ab(4 + 3ab^2)$;
в) $5m^3n^2 - 20mn^3 = 5mn^2(m^2 - 4n)$?

Вынесите общий множитель многочлена за скобки (453—454):

453. а) $ax + xb$; б) $am - ank$;
в) $x^2y + xy^2$; г) $p^2q^3 - p^3q$;
д) $a^2bc + ab^2c + abc^2$; е) $x^2y^2z^3 - xy^3z^2 + x^4y^3z^5$;
ж) $2mn^3 - 4m^2n - 6m^2n^3$; з) $6p^4q^3 + 8p^2q^3 - 10p^3q^2$;
и) $a^2 - 4a^4 + 5a^5$; к) $3x^2 - x^6 + 2x^8$.

454. а) $-\frac{1}{2}m^3 + 2m^2 - m$; б) $\frac{1}{3}pq^2 + \frac{1}{6}pq - p^2q$;
в) $\frac{1}{3}x^2y^3 + \frac{1}{4}x^3y^2 + \frac{1}{12}x^3y^3$; г) $0{,}2a^5b^3 - 1{,}2a^3b^4 + 0{,}7ab^3$;
д) $-0{,}12mn - 1{,}02m^2 - 0{,}04m^2n$; е) $\frac{1}{3}p^6q^7 + 0{,}5p^5q^8 + 1{,}1p^4q^9$.

455. Разложите многочлен на множители:

а) $16a^2bc^3 - 12ac^3 + 28b^2c^3 - 8abc^5$;
б) $12x^2yz + 18xy^3z^2 - 27x^5z^6 - 24xy^4z^4$;
в) $0{,}25m^2n^2k - 0{,}45m^3nk^2 - 1{,}5mn^3k^2 - 0{,}05m^5n^3k$;
г) $1{,}42x^2y^4z^3 - 2\frac{1}{2}xy^3z^2 - 0{,}2x^3y^2z + 3\frac{1}{3}xy^3z^2$;
д) $\frac{1}{3}a^2bx^3 - 1\frac{1}{2}ab^2x^2 + 0{,}3a^2x^3 - 1{,}1a^5b^3x^4$.

456. В многочлене $3a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a - \frac{1}{6}$ вынесите за скобки указанный множитель:

а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) -2.

457. Вместо букв C и D подберите одночлены так, чтобы выполнялось равенство:

а) $3a^2b - 9a^3b^5 = C(1 - 3ab^4)$;
б) $14m^3x^2 + 21m^5x^4 = C(2 + 3m^2x^2)$;
в) $6x^2y^3 - D = 3x^2y(C - 5x^4y^2)$;
г) $4m^3n^2 + C = D(2m^2 + 3n^4)$.

Представьте выражение в виде произведения (458—460):

458. а) $(a+b)a+(a+b)c=(a+b)(\ldots)$;
б) $(a+b)x-(a+b)y=(a+b)(\ldots)$;
в) $2(a+b)+(a+b)x=(a+b)(\ldots)$;
г) $x(a+b)-2(a+b)=(a+b)(\ldots)$;
д) $2x(a+b)+(a+b)=(a+b)(\ldots)$;
е) $(a+b)3x-2y(a+b)=(a+b)(\ldots)$.

459. а) $a(m+n)+(2m+2n)$; б) $(3x+3y)-(ax+ay)$;
в) $(ma-mb)+(a-b)$; г) $(ap-aq)-(bp-bq)$;
д) $(3x-6y)-(2y-x)$; е) $(ax-bx)+(3b-3a)$.

460. а) $a(x+y)+x+y$; б) $3(m-n)+bm-bn$;
в) $2ax-bx+2(b-2a)$; г) $(mx-2m)-2a+ax$;
д) $14x-6y-(7ax-3ay)$; е) $(10ak-18ab)-27cb+15ck$.

461. Вынесите за скобки общий множитель:
а) $(x+y)+a(x+y)-2(x+y)=(x+y)(\ldots)$;
б) $m(a-b)-n(b-a)+(3a-3b)=(a-b)(\ldots)$;
в) $(2m-6n)+(xm-3xn)-y(3n-m)=(m-3n)(\ldots)$;
г) $(6x-15y)-(5y-2x)+(2ax-5ay)=(2x-5y)(\ldots)$;
д) $(-am-bm)+(3a+3b)-(x^2a+x^2b)=(a+b)(\ldots)$.

Разложите на множители (462—465):

462. а) $(x+y)+(x+y)^2+(x+y)^3$;
б) $(3a-9b)-(a-3b)^2+(12b-4a)$;
в) $(-2m-8n)-(am+4an)+(5bm+20bn)$;
г) $(4x-y)^2-(y-4x)-(20x-5y)$.

463. а) $9a^2-4$; б) $25x^2-1$; в) $\frac{1}{4}m^2-16n^2$;
г) $100a^2-0{,}25b^2$; д) $x^{12}-y^2$; е) m^6-n^6;
ж) $2\frac{1}{4}-c^4$; з) $1\frac{9}{16}a^{10}-0{,}01b^2$; и) x^4-y^4.

464. а) $4x^2-4x+1$; б) $9a^2+6a+1$; в) $-m^2-2m-1$;
г) $6n-n^2-9$; д) $x^4-2x^2y+y^2$; е) $36a^4-12a^2b^2+b^4$;
ж) $\frac{1}{4}m^4-m^2n^3+n^6$; з) $0{,}01a^6+25b^4-a^3b^2$.

465. а) a^3-27; б) $27+8x^3$; в) $8m^3-n^3$;
г) $1+y^6$; д) x^9-125; е) $64a^3+b^6$;
ж) $\frac{1}{8}-m^{12}$; з) $\frac{8}{27}+n^3$; и) $0{,}125-27x^3$.

466. Вычислите, предварительно разложив выражение на множители:
а) 4^2-3^2; б) 24^2-23^2;
в) 17^2-3^2; г) 87^2-13^2;
д) $19^2+2\cdot19+1$; е) $37^2-2\cdot37\cdot7+49$;
ж) $46^2+16^2-46\cdot32$; з) $53^2+53\cdot34+17^2$.

467. Придумайте примеры на применение формул сокращённого умножения при вычислениях.

468. Преобразуйте данное целое выражение в произведение многочленов:
а) $(2m + n)(6m + 2n) - (m - 3n)(8n + 16m)$;
б) $(x - 1)(4x - 6y) + (x + 1)(18y - 12x)$;
в) $(2a + 1)(5a - 15) + (30 - 10a)(a - 2)$;
г) $2a(a + 2)^2 - 3b(a + 2)$;
д) $(x - 2)^2(x - 3) + (x - 2)(x - 3)^2$;
е) $3m(m + 2n) - 2n(m + 2n)^2$;
ж) $(p + 3q)^2(p - q) - (p + 3q)(p - q)^2$.

469. Разложите выражение на множители, используя формулы сокращённого умножения:
а) $(a + b)^2 - c^2$; б) $(a - b)^2 - c^2$;
в) $(x - y)^2 - (x + y)^2$; г) $(a + b)^2 - (x + y)^2$;
д) $(2x - y)^2 - (3x - 2y)^2$; е) $(m^2 - 4n)^2 - (m^2 - 2n)^2$;
ж) $(a + b)^2 + 2(a + b) + 1$; з) $(x - 2y)^2 + 4(x - 2y) + 4$;
и) $9a^2 - 6a(a + 1) + (a + 1)^2$; к) $16m^2 - 8m(3 - m) + (3 - m)^2$.

Представьте целое выражение в виде произведения многочленов (470—471):

470. а) $2a + 2b + ax + bx$; б) $ax - ay + 3x - 3y$;
в) $m^2 - mn + am - an$; г) $5a + 5b - ax - bx$;
д) $ax - ya + x - y$; е) $m^2 - mn - 2n + 2m$;
ж) $a^3 + 5a^2 + 5a + 25$; з) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 9x$.

471. а) $86x - 43y + 2ax - ay$; б) $10by - 25bx - 6ay + 15ax$;
в) $x^2 + xy - xz - yz$; г) $m^4 + 2 - m - 2m^3$;
д) $5a^2 - 5ab + 5b^2 - 5ab$; е) $y - y^2 - y^3 + y^4$;
ж) $b^3 + b^2c - b^2d - bcd$; з) $x^2y - z^2x + y^2x - yz^2$.

472. Разложите многочлен на множители, предварительно представив один из его членов в виде суммы:
а) $x^2 - 3x + 2$; б) $a^2 - 5a + 4$; в) $a^2 - 6a + 5$;
г) $x^2 - 3x - 4$; д) $m^2 - 3mn + 2n^2$; е) $m^2 - 7mn + 6n^2$.

473. Разложите многочлен на множители, предварительно выделив полный квадрат:
а) $a^2 + 8a + 15$; б) $x^4 + 4b^4$; в) $x^2 - 2xy - 3y^2$;
г) $m^2 + 7m + 10$; д) $p^2 - 5p + 6$; е) $3m^2 + 27m + 54$;
ж) $x^2 + x - 12$; з) $a^2 + 6a + 8$; и) $x^2 - x - 12$.

474. Верно ли выполнено разложение многочлена на множители:
а) $a^3 - 8 + 6a^2 - 12a = (a^2 + 8a + 4)(a - 2)$;
б) $x^2 + 2xy + y^2 - xc - yc = (x + y - c)(x + y)$?

475. Разложите на множители многочлен:
а) $ab + cb + ad + cd$; б) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$;
в) $a^4 - 16b^4$; г) $a^2 + 2ab + ac + b^2 + bc$;
д) $9y^2 - 6y + 1 - x^2$; е) $x^4 + 4x^2 - y^2 + 6y - 5$.

476. Доказываем. *Задача Софии Жермен.* Докажите, что при любых натуральных $a \neq 1$ каждое число вида $a^4 + 4$ является составным числом.

Разложите многочлен на множители (477—479):

477. а) $x^4 - 3x^2 + 2$; б) $b^2c^2 - 4bc - b^2 - c^2 + 1$;
в) $y^2 - 10y + 25 - 4x^2$; г) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$;
д) $x^{16} - y^{16}$; е) $x^4 - 3x^2 + 1$;
ж) $x^4 - 8x^2 + 4$; з) $x^4 - 7x^2 + 1$;
и) $x^4 + 12x^2 + 64$; к) $x^4 + x^2 - 2$.

478. а) $x^2 - y^2 - 10x - 12y - 11$; б) $x^2 - y^2 + 8x + 10y - 9$;
в) $4x^2 - y^2 - 4x - 6y - 8$; г) $x^2 - 4y^2 + 10x + 4y + 24$.

479. а) $9x - 6x^2 + x^3$; б) $36x + 12x^2 + x^3$;
в) $25x - 10x^2 + x^3$; г) $x^2 - 12x + 35$;
д) $x^2 - 6x + 8$; е) $x^2 - 11x + 10$;
ж) $x^8 + 3x^4 + 4$; з) $x^8 - 5x^4 + 4$;
и) $x^8 + x^4 + 1$; к) $x^3 - 3x^2 + 3x + 7$;
л) $x^3 + 3x^2 + 3x - 26$; м) $x^3 + 3x^2 + 3x - 7$.

§ 7. Алгебраические дроби

Мы уже говорили, что сумма, разность и произведение двух многочленов равны многочлену. Теперь рассмотрим частное двух многочленов.

7.1. Алгебраические дроби и их свойства

Будем обозначать многочлены большими буквами латинского алфавита A, B, C, D, ... **Алгебраической дробью** называют выражение $\frac{A}{B}$ — частное многочлена A и ненулевого многочлена B.

Многочлен A называют числителем алгебраической дроби $\frac{A}{B}$, а многочлен B — её знаменателем.

Выражения $\frac{a}{a+1}$ и $\frac{a^2 - b^2}{3}$ могут служить примерами алгебраических дробей. Заметим, что в числителе второй дроби стоит многочлен $a^2 - b^2$, а в знаменателе — число 3, которое можно рассматривать как многочлен.

Если многочлен A есть число a ($A = a$), а ненулевой многочлен B есть число b ($B = b$, $b \neq 0$), то частное $\frac{A}{B}$ есть число $\frac{a}{b}$:

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}.$$

Например, если $A = -5$, а $B = 3$, то алгебраическая дробь $\frac{A}{B}$ есть число $\frac{-5}{3}$.

Алгебраические дроби обладают свойствами, выраженными следующими равенствами:

$$\frac{A}{1} = A, \tag{1}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} \tag{2}$$

для любого ненулевого многочлена C,

$$-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}. \tag{3}$$

Равенство (1) означает, что частное многочленов A и 1 есть тот же многочлен A, т. е. любой многочлен A можно рассматривать как алгебраическую дробь $\frac{A}{1}$. Например, $x - 2y = \frac{x - 2y}{1}$.

Равенство (2) означает, что если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится равная ей алгебраическая дробь.

Замечания. 1. В правой части равенства (2) в числителе и в знаменателе дроби записаны на самом деле не многочлены, а целые выражения, равные произведениям многочленов. Но так как произведение многочленов можно преобразовать в многочлен, то такие выражения, как $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$, где A, B и C — многочлены, также называют алгебраическими дробями.

2. Далее в сочетании «алгебраическая дробь» иногда будем опускать прилагательное «алгебраическая», но его будем подразумевать.

Свойство, выраженное равенством (2), называют **основным свойством алгебраической дроби**.

Переход от дроби $\frac{A}{B}$ к дроби $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ называют **приведением дроби $\frac{A}{B}$ к новому знаменателю $B \cdot C$.**

Например, приведём дробь $\frac{x}{y}$ к знаменателю $3y$, а дробь $\frac{x+1}{x-1}$ — к знаменателю $(x - 1)^2$:

$$^{3/}\,\frac{x}{y} = \frac{3 \cdot x}{3 \cdot y} = \frac{3x}{3y},$$

$$^{x-1/}\,\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)} = \frac{x^2-1}{(x-1)^2}.$$

Равенство (2) можно записать и в обратном порядке:

$$\frac{A \cdot C}{B \cdot C} = \frac{A}{B}. \qquad (2')$$

Равенство (2′) означает, что **алгебраическую дробь можно сократить на ненулевой многочлен.** Например:

$$\frac{2x + x^2}{3x - x^2} = \frac{x(2 + x)}{x(3 - x)} = \frac{2 + x}{3 - x}, \quad \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

Равенство (3) означает, что если $\frac{A}{B}$ есть алгебраическая дробь, то выражение $\left(-\frac{A}{B}\right)$ также есть алгебраическая дробь, равная частному многочлена $(-A)$ и многочлена B или частному многочлена A и многочлена $(-B)$. Например:

$$-\frac{a - b}{c - a} = \frac{-(a - b)}{c - a} = \frac{-a + b}{c - a} \quad \text{или} \quad -\frac{a - b}{c - a} = \frac{a - b}{-(c - a)} = \frac{a - b}{-c + a}.$$

480. а) Что называют алгебраической дробью? числителем, знаменателем алгебраической дроби? Приведите примеры.
б) Сформулируйте свойства алгебраической дроби.

481. Является ли данное выражение алгебраической дробью:
а) $7a$; б) $x + y$; в) $\frac{x - 2ab}{x^2 + y^2}$; г) $\frac{x}{3a} - 7xy$?

482. Запишите три алгебраические дроби, используя данные выражения:
а) xy, $(a - b)$, $3mn^2$; б) $m^2 - n^2$, $-ab$, $4(x^2 - y)$.

483. Запишите алгебраическую дробь в виде многочлена, применив свойства алгебраических дробей:
а) $\frac{x - 1}{1}$; б) $\frac{3x + y}{1}$; в) $\frac{x^2 + 3xy - y^2}{1}$;
г) $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{1}$; д) $\frac{(x - y)6x}{3x}$; е) $\frac{15(x + y)}{5}$;
ж) $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y}$; з) $\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x - 2y}$.

484. Преобразуйте дробь так, чтобы знак, стоящий перед дробью, изменился на противоположный:
а) $\frac{1 - a}{a}$; б) $-\frac{x}{x - 3}$; в) $\frac{x - y}{x + y}$; г) $-\frac{a^2 + 1}{a - 2}$;
д) $\frac{a + b}{a^2 + b^2}$; е) $-\frac{1}{2x + 3y}$; ж) $\frac{-a - b}{x + y}$; з) $-\frac{-x - y}{-a - b}$.

485. Приведите дроби:

а) $\frac{5}{36}$, $\frac{2}{x^2}$, $\frac{11}{3x}$, $\frac{7}{9x^2}$, $\frac{1}{4x}$ к знаменателю $36x^2$;

б) $\frac{1}{20y}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{2x}$, $\frac{3}{5xy}$ к знаменателю $20x^2y$.

486. Подберите одночлен или многочлен A так, чтобы равенство было верным:

а) $\frac{4a}{6a^3} = \frac{2}{A}$; б) $\frac{12x^2y}{48xy} = \frac{x}{A}$;

в) $\frac{3a^2(x+y)}{12ab(x+y)} = \frac{A}{4b}$; г) $\frac{7mn(x-y)^2}{14(x-y)^3} = \frac{mn}{A}$.

Сократите дробь (**487—494**):

487. а) $\frac{4}{8}$; б) $\frac{8}{12}$; в) $\frac{45}{210}$; г) $\frac{256}{924}$; д) $\frac{2a}{6}$;

е) $\frac{14a}{21ab}$; ж) $\frac{x^5}{x^7}$; з) $\frac{8m^3n}{12mn^2}$; и) $\frac{24a^5b^8c}{36a^7b^4c}$; к) $\frac{48x^2y^4z^2}{56xy^5z^4}$.

488. а) $\frac{2(x+y)}{4ax}$; б) $\frac{a+b}{a+b}$; в) $\frac{2(x-1)}{5(x-1)}$;

г) $\frac{3a(a-b)^2}{6a(a-b)^2}$; д) $\frac{4x(x-y)^3}{16x^2y(x-y)}$; е) $\frac{25m^2n(a-b)}{35mn^2(a-b)^2}$;

ж) $\frac{2p(p-q)(p^2+q^2)}{4q(p-q)(p^2+q^2)}$; з) $\frac{8a(a+b)^2(a-b)}{18a(a-b)(a+b)}$.

489. а) $\frac{x-y}{y-x}$; б) $\frac{2(a-b)}{3(b-a)}$; в) $\frac{4mn(m-n)}{2m(n-m)}$; г) $\frac{6a^2b^3(3-a)}{14ab^3(a-3)}$.

490. а) $\frac{2x+2y}{4}$; б) $\frac{3a+3b}{6a}$; в) $\frac{4m-4n}{8mn}$;

г) $\frac{12ab}{6a-6b}$; д) $\frac{2a-2b}{4a+4b}$; е) $\frac{6x+6y}{3x-3y}$.

491. а) $\frac{ax-bx}{cx+dx}$; б) $\frac{ac+bc}{mc+nc}$; в) $\frac{x^2}{x^2+xy}$;

г) $\frac{ab}{a-ab}$; д) $\frac{m^2n}{m^2n-mn^2}$; е) $\frac{ax-bx}{xy+x^2}$;

ж) $\frac{p^2-p}{ap-bp}$; з) $\frac{x^2-xy}{2xy+2x^2}$.

492. а) $\frac{3xy}{3x^2a-3x}$; б) $\frac{4m^2n}{6mn^2-8m^2n}$; в) $\frac{3a^2+4ab}{9a^2b+12ab^2}$;

г) $\frac{4xy-x^2}{4x^2y-x^3y}$; д) $\frac{2mn-6m^2}{12m^2n-4mn^2}$; е) $\frac{16p^2q^3-24p^2q^4}{12p^2q^3-8p^3q^2}$.

493. а) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; б) $\frac{x-1}{x^2-1}$; в) $\frac{m^2-n^2}{2m+2n}$; г) $\frac{xm+xn}{m^2-n^2}$;
д) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; е) $\frac{a^2-b^2}{b^2+2ab+a^2}$; ж) $\frac{n^2-m^2}{(n-m)^2}$; з) $\frac{p-p^2}{p^2-1}$;
и) $\frac{x+x^2}{x^3-x}$; к) $\frac{a^3-2a^2}{4-a^2}$.

494. а) $\frac{3m-3n}{m^3-n^3}$; б) $\frac{1-a^3}{1+a+a^2}$; в) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$; г) $\frac{2p^2-2p+2}{p^3+1}$;
д) $\frac{a^2-4a+4}{a^2-4}$; е) $\frac{3x^2+6xy+3y^2}{12y^2-12x^2}$; ж) $\frac{m^2-n^2}{n^3-m^3}$; з) $\frac{2p^3-2q^3}{4q^2-4p^2}$;
и) $\frac{6a^2-6b^2}{3a^3+3b^3}$; к) $\frac{(x^3-y^3)(x+y)}{x^2-y^2}$.

495. Составьте дробь, которая сокращалась бы на:
а) 2; б) $3ab$; в) $a+5$; г) $-7m$; д) $a(x-2y)$; е) p^2-q^2.

7.2. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю

Пользуясь основным свойством дроби, можно привести к общему знаменателю любые дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$. Причём в качестве общего знаменателя всегда можно взять произведение знаменателей данных дробей:

$$^{D/}\frac{A}{B}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D},\qquad ^{B/}\frac{C}{D}=\frac{C\cdot B}{D\cdot B}.$$

Пример 1. Дроби $\frac{1}{x-1}$ и $\frac{1}{x+1}$ имеют общий знаменатель $(x-1)\cdot(x+1)=x^2-1$. Поэтому

$$^{x+1/}\frac{1}{x-1}=\frac{1\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x^2-1},$$

$$^{x-1/}\frac{1}{x+1}=\frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x^2-1}.$$

Но может случиться, что многочлены B и D имеют общий множитель R, т. е. $B=B_1\cdot R$, $D=D_1\cdot R$, где B_1 и D_1 — многочлены. Тогда в качестве общего знаменателя можно взять произведение $B_1\cdot D_1\cdot R$, которое содержит меньше множителей, чем произведение $B\cdot D=B_1\cdot R\cdot D_1\cdot R$:

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{B_1\cdot R}=\frac{A\cdot D_1}{B_1\cdot D_1\cdot R}\quad\text{и}\quad\frac{C}{D}=\frac{C}{D_1\cdot R}=\frac{C\cdot B_1}{B_1\cdot D_1\cdot R}.$$

Пример 2. Для дробей $\frac{1}{x^2-1}$ и $\frac{1}{(x-1)^2}$ в качестве общего знаменателя можно взять произведение знаменателей $(x^2-1)(x-1)^2$. Но если разложить знаменатели данных дробей на множители, то выяснится, что они имеют общий множитель $x-1$:

$$x^2-1=(x-1)\cdot(x+1);$$
$$(x-1)^2=(x-1)\cdot(x-1).$$

Теперь видно, что в качестве общего знаменателя двух данных дробей проще взять произведение

$$(x-1)(x+1)(x-1)=(x-1)^2(x+1).$$

Тогда

$$^{x-1/}\frac{1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x^2-1)(x-1)}=\frac{x-1}{(x-1)^2(x+1)},$$

$$^{x+1/}\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x+1}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Следовательно, при приведении дробей к общему знаменателю бывает полезно разложить на множители их знаменатели.

Иногда для приведения двух дробей к общему знаменателю достаточно поменять знак знаменателя одной из данных дробей, изменив одновременно знак числителя или знак самой дроби.

Пример 3. Для приведения дробей $\frac{3}{x-1}$ и $\frac{x}{1-x}$ к общему знаменателю поменяем знак числителя и знаменателя второй дроби:

$$\frac{x}{1-x}=\frac{-x}{x-1}.$$

496. Верно ли, что любые две алгебраические дроби можно привести к общему знаменателю, равному произведению знаменателей данных дробей?

Приведите к общему знаменателю дроби (**497—502**):

497. а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$; б) $\frac{3}{4}$ и $\frac{6}{7}$; в) $\frac{8}{9}$ и $\frac{5}{-9}$;

г) $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{-7}$; д) $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6}$; е) $\frac{13}{14}$ и $\frac{6}{7}$;

ж) $\frac{7}{9}$ и $\frac{5}{-3}$; з) $\frac{1}{5}$ и $\frac{3}{-10}$; и) $\frac{3}{10}$ и $\frac{4}{15}$;

к) $\frac{5}{12}$ и $\frac{1}{16}$; л) $\frac{8}{14}$ и $\frac{5}{-21}$; м) $\frac{7}{24}$ и $\frac{1}{-18}$.

498. а) $\frac{x}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{x}{5}$ и $\frac{-3}{7}$; в) $\frac{2x}{5}$ и $\frac{5}{-6}$;
г) $\frac{2}{3}$ и $\frac{7x}{-4}$; д) $\frac{5}{3x}$ и $\frac{7}{6}$; е) $\frac{11}{2x}$ и $\frac{3}{7}$;
ж) $\frac{4}{x}$ и $\frac{3}{-x}$; з) $\frac{1}{5x}$ и $\frac{13}{-10x}$; и) $\frac{3}{x}$ и $\frac{x}{3}$.

499. а) $\frac{x}{x-2}$ и $\frac{1}{2-x}$; б) $\frac{x}{5+x}$ и $\frac{3}{x+5}$;
в) $\frac{4x}{x-1}$ и $\frac{2-7x}{1-x}$; г) $\frac{2x}{3x+6}$ и $\frac{5}{x+2}$;
д) $\frac{15}{2x-8}$ и $\frac{7}{x-4}$; е) $\frac{3-x}{5-x}$ и $\frac{5}{2x-10}$.

500. а) $\frac{x}{3x-x^2}$ и $\frac{4}{3-x}$; б) $\frac{1}{2+x}$ и $\frac{x-1}{x^2-4}$;
в) $\frac{3}{4+6x}$ и $\frac{5x}{9x+6}$; г) $\frac{5x}{3-x}$ и $\frac{2}{x^2-9}$.

501. а) $\frac{x}{4x+x^2}$ и $\frac{4}{3x+12}$; б) $\frac{13x}{25-x^2}$ и $\frac{x-1}{10+2x}$;
в) $\frac{x-3}{4-x^2}$ и $\frac{5x}{x^2-4}$; г) $\frac{2}{(x-3)^2}$ и $\frac{1+x}{x^2-9}$.

502. а) $\frac{3x}{x^2+4x+4}$ и $\frac{x-4}{5x+10}$; б) $\frac{1+x}{x^2+2x+4}$ и $\frac{x-1}{x^3-8}$;
в) $\frac{x}{9+3x+x^2}$ и $\frac{5}{x^3-27}$; г) $\frac{12}{(x-3)^2}$ и $\frac{2+x}{(3-x)^2}$.

7.3. Арифметические действия с алгебраическими дробями

Алгебраические дроби с общим знаменателем $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{B}$ складывают и вычитают по правилам:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}, \qquad (1)$$

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}. \qquad (2)$$

Если же дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ имеют разные знаменатели, то их сначала приводят к общему знаменателю, а затем складывают или вычитают по правилам (1) и (2).

В качестве общего знаменателя всегда можно взять произведение $B \cdot D$, и тогда сложение и вычитание производят по правилам:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}, \qquad (1')$$

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D - C \cdot B}{B \cdot D}. \qquad (2')$$

Умножение и деление дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ производят по правилам:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}, \qquad (3)$$

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}. \qquad (4)$$

В случае деления предполагается, что C — ненулевой многочлен (так же как B и D).

Примеры.

1) $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x-1} = \frac{1+x}{x-1}$;

2) $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} = 1$;

3) $\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{2(x+2) + x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+4}{x^2-4}$;

4) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x+3} = \frac{x(x+3) - 3(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+9}{x^2-9}$;

5) $\frac{x^2}{x^3-y^3} - \frac{x - y/x}{x^2+xy+y^2} = \frac{x^2}{x^3-y^3} - \frac{x^2-xy}{x^3-y^3} = \frac{x^2-(x^2-xy)}{x^3-y^3} = \frac{xy}{x^3-y^3}$;

6) $\frac{a-4}{a+3} \cdot \frac{a+3}{a} = \frac{(a-4)(a+3)}{(a+3)a} = \frac{a-4}{a}$;

7) $\frac{a-5}{a+7} : \frac{a-5}{8} = \frac{(a-5) \cdot 8}{(a+7)(a-5)} = \frac{8}{a+7}$.

В примерах 3) и 4) знаменатели данных дробей разные и не имеют общих множителей. В качестве общего знаменателя этих дробей взято произведение их знаменателей. В примере 5) в качестве общего знаменателя взят многочлен $x^3 - y^3$, так как $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$.

Докажем свойства, вытекающие из правил действий с алгебраическими дробями.

1. **Если B — ненулевой многочлен, то**

$$\frac{0}{B} = 0.$$

Действительно, можно заменить в числителе 0 на $0 \cdot B$, а в знаменателе B на $1 \cdot B$. Тогда, пользуясь основным свойством алгебраических дробей, можно сократить полученную дробь на ненулевой многочлен B. В результате получим число 0 (нулевой многочлен):

$$\frac{0}{B} = \frac{0 \cdot B}{1 \cdot B} = \frac{0}{1} = 0.$$

2. $\dfrac{1}{A \cdot B} = \dfrac{1}{A} \cdot \dfrac{1}{B}$.

Действительно, $\dfrac{1}{A \cdot B} = \dfrac{1 \cdot 1}{A \cdot B} = \dfrac{1}{A} \cdot \dfrac{1}{B}$.

3. $\dfrac{A}{B} = A \cdot \dfrac{1}{B}$.

Действительно, $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A \cdot 1}{1 \cdot B} = \dfrac{A}{1} \cdot \dfrac{1}{B} = A \cdot \dfrac{1}{B}$.

В частности, если B — число, например 7, то

$$\frac{A}{7} = \frac{1}{7} \cdot A.$$

Следовательно, алгебраическую дробь $\dfrac{A}{7}$ можно рассматривать как многочлен $\dfrac{1}{7} \cdot A$. Конечно, в этом примере число 7 можно заменить на любое другое не равное нулю число.

4. $\dfrac{A}{B} - \dfrac{C}{D} = \dfrac{A}{B} + \left(-\dfrac{C}{D}\right)$.

Действительно,

$$\frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right) = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D} = \frac{A \cdot D + B \cdot (-C)}{B \cdot D} = \frac{A \cdot D - B \cdot C}{B \cdot D} = \frac{A}{B} - \frac{C}{D}.$$

5. $\dfrac{A}{B} - \dfrac{A}{B} = 0$.

Действительно, $\dfrac{A}{B} - \dfrac{A}{B} = \dfrac{A - A}{B} = \dfrac{0}{B} = 0$.

503. По каким правилам складывают, вычитают, умножают и делят алгебраические дроби?

504. Докажите равенство:

а) $\dfrac{A}{B} - \dfrac{C}{D} = \dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{-D}$; б) $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{A}{B} - \dfrac{C}{-D}$.

Выполните действия (505—509):

505. а) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3}$; б) $\dfrac{a}{7} - \dfrac{b}{7}$; в) $\dfrac{2x}{5} - \dfrac{3y}{5}$;

г) $\dfrac{5m}{4} + \dfrac{3n}{4}$; д) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{3x}{4}$; е) $\dfrac{7a}{8} - \dfrac{3a}{8}$.

506. а) $\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}$; б) $\frac{2a}{3}-\frac{1-a}{3}$; в) $\frac{a+b}{5}+\frac{a}{5}$;
г) $\frac{y}{7}-\frac{x-y}{7}$; д) $\frac{2+x}{3}+\frac{2x-8}{3}$; е) $\frac{2a}{8}-\frac{a+1}{8}$.

507. а) $\frac{1}{a}+\frac{2}{a}$; б) $\frac{a}{x}+\frac{3}{x}$; в) $\frac{a}{b}-\frac{2a}{b}$;
г) $\frac{3x^2}{a}+\frac{2x^2}{a}$; д) $\frac{x+4}{a}+\frac{2x}{a}$; е) $\frac{x+1}{x}-\frac{x+3}{x}$.

508. а) $\frac{3}{a+b}+\frac{5}{a+b}$; б) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-1}$; в) $\frac{a+3}{a+b}+\frac{a-3}{a+b}$;
г) $\frac{m+1}{m+n}-\frac{3-m}{m+n}$; д) $\frac{2x-4}{x-3}-\frac{3x+5}{x-3}$; е) $\frac{7p-1}{p+1}-\frac{7-p}{p+1}$.

509. а) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x}{1-x}$; б) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{y-x}$; в) $\frac{2a}{a-b}-\frac{3a}{b-a}$;
г) $\frac{4m-1}{n-m}+\frac{m-4}{m-n}$; д) $\frac{2p+q}{p-2q}+\frac{p+3q}{2q-p}$; е) $\frac{8a+b}{1-a}-\frac{2a-3b}{a-1}$.

510. Подберите одночлен A так, чтобы равенство было верным:
а) $\frac{2}{3}=\frac{A}{3}$; б) $\frac{7}{10}=\frac{28}{A}$; в) $\frac{3}{8}=-\frac{A}{32}$;
г) $-\frac{1}{5}=\frac{15}{A}$; д) $\frac{5}{a}=\frac{A}{ab}$; е) $\frac{6x}{y}=\frac{A}{6xy^2}$.

511. Подберите целое выражение B так, чтобы равенство было верным:
а) $\frac{1}{2}=\frac{a+b}{B}$; б) $\frac{x}{3}=\frac{B}{3(x+y)}$; в) $\frac{a}{3}=\frac{B}{6a+6}$;
г) $\frac{a-b}{3}=\frac{a^2-b^2}{B}$; д) $\frac{x}{a}=\frac{B}{a^2-a}$; е) $\frac{m-1}{m}=\frac{m^3-1}{B}$.

512. Запишите выражение в виде дроби:
а) $a+\frac{a}{2}$; б) $x-\frac{x}{3}$; в) $\frac{x}{7}-2x$; г) $2+\frac{a}{3}$; д) $1+\frac{1}{a}$; е) $\frac{1}{b}-a$.

Преобразуйте в алгебраическую дробь (513—528):

513. а) $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$; б) $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}$; в) $\frac{2m}{3}-\frac{4}{5}$;
г) $\frac{4m}{3}+\frac{2n}{5}$; д) $\frac{3p}{4}+\frac{2p}{3}$; е) $\frac{a^2}{4}-\frac{2a}{3}$;
ж) $\frac{7x^2}{3}+\frac{13x^2}{5}$; з) $\frac{6xy}{7}-\frac{5xy^2}{9}$.

514. а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; б) $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}$; в) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$;
г) $\frac{5a}{7}-\frac{b}{x}$; д) $\frac{1}{2a}-\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{a}-\frac{1}{bc}$.

515. а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}$; б) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$; в) $\frac{1}{m+n}-\frac{1}{n}$;

г) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}$; д) $\frac{2}{a-b}+\frac{3}{a+b}$; е) $\frac{4}{p-q}-\frac{3}{p+q}$;

ж) $\frac{2a}{a-2b}+\frac{3a}{a+b}$; з) $\frac{3x}{x-y}-\frac{2x}{2x-y}$; и) $\frac{5m}{2m-n}-\frac{3m}{n-m}$;

к) $\frac{4p}{q-2p}-\frac{2p}{2p+q}$; л) $\frac{7}{2x-y}-\frac{5}{y-2x}$; м) $\frac{5x}{x-3y}+\frac{4x+3y}{3y-x}$.

516. а) $\frac{x}{8}-\frac{x}{4}$; б) $\frac{a}{6}+\frac{a}{8}$; в) $\frac{m^2}{3}-\frac{2m}{2}$;

г) $\frac{a-1}{10}+\frac{a}{15}$; д) $\frac{2x+3}{6}+\frac{x-1}{8}$; е) $\frac{a-3}{10}-\frac{2-a}{15}$.

517. а) $\frac{1}{4x}-\frac{1}{3x}$; б) $\frac{1}{m}+\frac{5}{4m}$; в) $\frac{2}{p}+\frac{3}{pq}$;

г) $\frac{a}{xy}-\frac{b}{x}$; д) $\frac{m}{n^2}-\frac{1}{mn}$; е) $\frac{a}{3b^2}+\frac{8}{2ab}$.

518. а) $\frac{m}{ab}+\frac{m}{ac}$; б) $\frac{2a}{mn}-\frac{5a}{mb}$; в) $\frac{2a-3b}{m}+\frac{4a-5b^2}{mb}$; г) $\frac{x-y}{xy}-\frac{x-z}{xz}$.

519. а) $\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}$; б) $\frac{7}{m^4}-\frac{3a}{m^2}$; в) $\frac{1}{a^5b^3}+\frac{1}{ab^7}$;

г) $\frac{4}{x^4b^3}-\frac{3}{x^2b^5}$; д) $\frac{3a}{x^7y^5z}-\frac{3b}{xy^4z^5}$; е) $\frac{m^7n}{a^4b^3c^9}+\frac{3mn^2}{a^3b^6c^4}$.

520. а) $\frac{1}{2a-2}+\frac{2}{4a-4}$; б) $\frac{7a}{3x+3}-\frac{a}{6x+6}$;

в) $\frac{2m}{4m+4n}+\frac{4n}{8m+8n}$; г) $\frac{2p}{10p-10q}-\frac{3q}{15p-15q}$;

д) $\frac{2x}{ax+bx}+\frac{3y}{ay+by}$; е) $\frac{y}{ax-bx}-\frac{x}{ay-by}$;

ж) $\frac{1}{2x^2y-xy}+\frac{2}{y-2xy}$; з) $\frac{3}{3m^2n-6mn^2}-\frac{2}{4mn-2m^2}$;

и) $\frac{15}{10p^3q-15p^2q^2}-\frac{6q}{9pq^3-6p^2q^2}$; к) $\frac{3b}{2a^3b-8a^2b^2}-\frac{5a}{12a^3b-3a^4}$.

521. а) $\frac{2a}{a^2-9}+\frac{3}{a-3}$; б) $\frac{5}{m+n}-\frac{4n}{m^2-n^2}$;

в) $\frac{x}{4-9x^2}+\frac{1}{3x+2}$; г) $\frac{1}{2p+4q}-\frac{q}{4q^2-p^2}$;

д) $\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{b}{a^3-b^3}$; е) $\frac{m^2+n^2}{m^3+n^3}-\frac{1}{2(m+n)}$;

ж) $\frac{x^2-2xy}{(x-2y)^2}+\frac{1}{2y-x}$; з) $\frac{2(p+q)}{p^3-q^3}+\frac{3}{q^2-p^2}$.

522. а) $3 - \frac{7}{m-2}$; б) $1 - \frac{x-y}{x+y}$; в) $\frac{(a+b)^2}{b} - 2a$;
г) $\frac{(a-b)^2}{2a} + b$; д) $a + b - \frac{a^2+b^2}{a-b}$; е) $\frac{a^2+b^2}{a+b} + a - b$.

523. а) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$; б) $\frac{x}{y} : \frac{a}{b}$; в) $\frac{4a}{7b} \cdot \frac{21}{a}$;
г) $\frac{5}{8} : \frac{15q}{16p}$; д) $\frac{5ax}{6by} \cdot \frac{3x}{5y}$; е) $\frac{7}{a} \cdot \frac{5ax}{14by}$;
ж) $\frac{8a^2y}{5bx} : \frac{3ay}{4b^2x}$; з) $\frac{25x^2y^3}{36ab} : \frac{35x^3y}{24b^2}$.

524. а) $a \cdot \frac{a}{b}$; б) $\frac{a}{x} : a$; в) $\frac{a}{7x} \cdot 5x$;
г) $ab : \frac{a}{b}$; д) $8a : \frac{20a^2b}{3x}$; е) $18p^3 \cdot \frac{5x}{9p^2}$.

525. а) $\frac{a+1}{7x} \cdot \frac{2x}{a+1}$; б) $\frac{2m}{m-n} : \frac{3mn}{m-n}$;
в) $\frac{4p}{p-3} \cdot \frac{p-3}{2p^2}$; г) $\frac{x+y}{8a} : \frac{x+y}{16a^2b}$;
д) $\frac{2x+2y}{3} \cdot \frac{6}{x+y}$; е) $\frac{4a}{a^2b} : \frac{5ab}{3a-3b}$;
ж) $\frac{m-3n}{6m} \cdot \frac{3mn}{4m-12n}$; з) $\frac{2p-4q}{3p^2} : \frac{3p-6q}{4pq}$;
и) $\frac{ax-ay}{cd} \cdot \frac{cx+cy}{x-y}$; к) $\frac{mk}{am-an} : \frac{ka-k}{2m-2n}$.

526. а) $\frac{a^2-b^2}{2a^2b} \cdot \frac{4ab^2}{a+b}$; б) $\frac{(x-y)^2}{3x^2y^3} : \frac{x-y}{6xy^2}$;
в) $\frac{mn-m^2}{2m} \cdot \frac{8n}{n^2-m^2}$; г) $\frac{2a-4}{b+1} : \frac{a^2-4}{(b+1)^2}$;
д) $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^2-xy}{2x^2-2y^2}$; е) $\frac{16-m^2}{m^2-3m} : \frac{m^2+4m}{m^2-9}$.

527. а) $\frac{p^2-q^2}{p^2} \cdot \frac{pq+q^2}{(p+q)^2}$; б) $\frac{a^2-9b^2}{a^2-ab} : \frac{a^2+3ab}{a-b}$;
в) $\frac{3x^2-3y^2}{x^2+xy} \cdot \frac{x+y}{6x-6y}$; г) $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2} : \frac{4m-4n}{3m+3n}$.

528. а) $\frac{m^3+n^3}{2m} \cdot \frac{4mn}{m^2-mn+n^2}$; б) $\frac{2a}{a^3-b^3} : \frac{6ab}{a^2-b^2}$;
в) $\frac{m^3-n^3}{m^3+n^3} : \frac{(m-n)^2}{m^2-n^2}$; г) $\frac{x^2+xy}{6x^2-6y^2} \cdot \frac{3x^3+3y^3}{x^2-xy}$;
д) $\frac{p^2-4q^2}{(p+2q)^2} : \frac{p^3-8q^3}{4q^2+2pq+p^2}$; е) $\frac{12a^2+6ab}{8a^3-b^3} \cdot \frac{4a^2+2ab+b^2}{3a^2-6ab}$.

529. Упростите выражение:

а) $\frac{0}{2x}$; б) $\frac{0}{m-n}$.

530. Представьте алгебраическую дробь в виде произведения алгебраических дробей:

а) $\frac{1}{2x}$; б) $\frac{1}{a^2}$; в) $\frac{2}{m^3n^3}$; г) $\frac{3}{(x-y)^2}$;

д) $\frac{a}{a^2-b^2}$; е) $\frac{m}{m^3+n^3}$; ж) $\frac{1}{p^3-p}$; з) $\frac{3}{2a^2+2ab}$.

531. Представьте алгебраическую дробь в виде многочлена:

а) $\frac{m}{5}$; б) $-\frac{a}{4}$; в) $\frac{2x}{7}$;

г) $-\frac{5y}{8}$; д) $\frac{x-1}{3}$; е) $\frac{2x-3}{2}$;

ж) $\frac{x^2-3x}{10}$; з) $\frac{m^2-mn+n^2}{8}$; и) $\frac{(a-1)\cdot 3}{5}$;

к) $\frac{(p-q)(p+4)}{4}$.

532. Дробь $\frac{p}{q}$ несократима. Будет ли несократимой дробь:

а) $\frac{q}{p}$; б) $\frac{p+q}{q}$; в) $\frac{q}{p+q}$; г) $\frac{p}{p+q}$?

7.4. Рациональные выражения

Рациональным выражением называют выражение, в котором несколько алгебраических дробей соединены знаками арифметических действий. Причём это выражение не должно содержать деления на нулевой многочлен.

Алгебраическую дробь также называют рациональным выражением. Приведём примеры рациональных выражений:

$$\frac{x+2}{(x-3)^3}+1; \quad \frac{a}{5}-5\cdot\frac{a(b-1)^3+\frac{1}{a}}{b+5\cdot\frac{b}{a}}.$$

Мы исключаем из рассмотрения как не имеющие смысла выражения, которые содержат деление на нулевой многочлен. Например, выражения

$$\frac{a+2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}}; \quad \frac{\frac{1}{a}}{c^3-c^3} \text{ и } \frac{4+x^2+y^2}{4y^2-(y+y)^2}$$

не имеют смысла, так как содержат деление на нулевой многочлен.

Рациональные выражения можно упрощать, пользуясь правилами, которым подчинены алгебраические дроби. При этом надо учесть, что для рациональных выражений приняты те же правила порядка действий, что и для числовых выражений.

Пример 1. Упростим выражение

$$\frac{1+\frac{1}{a}}{\frac{6}{b}+\frac{3}{a}+\frac{3}{ab}}-\frac{\frac{ab}{3}}{2a+b+1}.$$

Сначала, применяя правила сложения алгебраических дробей, преобразуем числитель и знаменатель первой дроби:

1) $1+\frac{1}{a}=\frac{a}{a}+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}$;

2) $\frac{6}{b}+\frac{3}{a}+\frac{3}{ab}=\frac{6a}{ab}+\frac{3b}{ab}+\frac{3}{ab}=\frac{6a+3b+3}{ab}$.

Теперь разделим числитель первой дроби на её знаменатель и сократим полученную дробь:

3) $\frac{a+1}{a}:\frac{6a+3b+3}{ab}=\frac{(a+1)ab}{a\cdot(6a+3b+3)}=\frac{(a+1)b}{6a+3b+3}$.

Разделим числитель второй дроби на её знаменатель:

4) $\frac{ab}{3}:(2a+b+1)=\frac{ab}{3(2a+b+1)}=\frac{ab}{6a+3b+3}$.

Теперь из результата третьего действия вычтем результат четвёртого действия:

5) $\frac{(a+1)b}{6a+3b+3}-\frac{ab}{6a+3b+3}=\frac{ab+b-ab}{6a+3b+3}=\frac{b}{6a+3b+3}$.

Таким образом показано, что

$$\frac{1+\frac{1}{a}}{\frac{6}{b}+\frac{3}{a}+\frac{3}{ab}}-\frac{\frac{ab}{3}}{2a+b+1}=\frac{b}{6a+3b+3}.$$

Пример 2. Упростим выражение

$$A=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left((x-y)^2+xy\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left((x+y)^2-xy\right).$$

Выполним последовательно следующие преобразования:

$$A=\frac{x+y}{xy}(x^2-xy+y^2)+\frac{y-x}{xy}(x^2+xy+y^2)=$$

$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy}+\frac{(y-x)(x^2+xy+y^2)}{xy}=$$

$$=\frac{x^3+y^3}{xy}+\frac{y^3-x^3}{xy}=\frac{x^3+y^3+y^3-x^3}{xy}=\frac{2y^3}{xy}=\frac{2y^2}{x}.$$

Пример 3. Упростим выражение

$$A = \frac{a^2}{xy} + \frac{(a+x)^2}{x^2 - xy} - \frac{(a+y)^2}{yx - y^2}.$$

Выполним последовательно следующие преобразования:

$$A = \frac{a^2}{xy} + \frac{(a+x)^2}{x(x-y)} - \frac{(a+y)^2}{y(x-y)} = \frac{a^2(x-y) + (a+x)^2 y - (a+y)^2 x}{xy(x-y)} =$$

$$= \frac{a^2x - a^2y + a^2y + 2axy + x^2y - a^2x - 2axy - xy^2}{xy(x-y)} =$$

$$= \frac{x^2y - xy^2}{xy(x-y)} = \frac{xy(x-y)}{xy(x-y)} = 1.$$

533. а) Что называют рациональным выражением?
б) Какие выражения не имеют смысла?

Упростите рациональное выражение (534—539):

534. а) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)abc$; б) $5x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 3\right)$;

в) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \cdot \frac{ab}{c}$; г) $3x^3\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} + \frac{4}{x}\right)$.

535. а) $\left(\frac{a+x}{a} - \frac{x-y}{x}\right) \cdot \frac{a^2}{x^2 + ay}$; б) $\left(\frac{a}{a-1} + 1\right) : \left(1 - \frac{a}{a-1}\right)$;

в) $\left(m - \frac{1}{1+m}\right) \cdot \frac{m+1}{1 - m - m^2}$; г) $\left(a + \frac{a^2}{c}\right) : \left(b + \frac{bc}{a}\right)$;

д) $\left(\frac{a+x}{x} - \frac{2x}{x-a}\right) : \frac{a^2 + x^2}{x-a}$; е) $\left(\frac{x^2+1}{2x-1} - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1-2x}{x+2}$;

ж) $\left(\frac{n}{n+x} - \frac{n}{n-x}\right) : \left(\frac{n}{n-x} + \frac{n}{n+x}\right)$;

з) $\frac{3}{5x} - \frac{3}{x+y} \cdot \left(\frac{x+y}{5x} - x - y\right)$.

536. а) $\left(a^2 - \frac{1}{b^2}\right) : \left(a - \frac{1}{b}\right)$; б) $\left(\frac{3a^2}{4b^2} - \frac{b^2}{3}\right) : \left(\frac{3a}{2b} + b\right)$;

в) $\left(4x^2 - \frac{1}{9b^2}\right) : \left(2x - \frac{1}{3b}\right)$.

537. а) $\frac{x+y}{x} - \frac{x}{x-y} + \frac{y^2}{x^2 - xy}$; б) $\frac{1}{m+2} + \frac{1}{m-2} - \frac{4}{m^2 - 4}$;

в) $\frac{3x^2 + 3xy}{4xy + 6ay} \cdot \left(\frac{x}{ax + ay} + \frac{3}{2x + 2y}\right)$;

г) $\left(\frac{c-d}{c^2 + cd} - \frac{c}{d^2 + cd}\right) : \left(\frac{d^2}{c^3 - cd^2} + \frac{1}{c+d}\right)$.

538. а) $\frac{a-1}{2a}\cdot\left(\frac{a+3}{a+1}-\frac{a^2-5}{a^2-1}\right)$; б) $\left(\frac{c+3}{c-3}-\frac{c}{c+3}\right)\cdot\frac{c-3}{c+1}$;

в) $\left(\frac{14+a^2}{a^2-4}-\frac{a-4}{a+2}\right)\cdot\frac{a-2}{6}$; г) $\left(\frac{a}{a-4}-\frac{a-4}{a+4}\right)\cdot\frac{a+4}{4}$;

д) $\left(\frac{y+1}{y-1}-\frac{y-1}{y+1}\right)\cdot\frac{y+1}{4y}$; е) $\left(\frac{1+a}{1-a}-\frac{1-a}{1+a}\right):\frac{2a}{1-a}$;

ж) $\frac{4y}{y-1}\cdot\left(\frac{y}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8y}\right)$; з) $\left(\frac{a}{8}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6a}\right):\frac{a+1}{12a}$.

539. а) $\frac{a^3-b^3}{a-b}\cdot\frac{a}{a^2+ab+b^2}-(a-b)$; б) $\frac{ab}{a^2-b^2}:\frac{a+b}{a^2-b^2}+\frac{a^2}{a+b}$.

540. Какие из выражений не имеют смысла:

$$\frac{x-y}{x^2-y^2};\quad \frac{7-\frac{x-a}{a^3-2a^2+a^2}}{x^2+a^2};\quad \frac{a^2+b^2-2ab}{(x-5)^2-x^2-25+10x};\quad \frac{1}{a-\frac{1}{a}-\frac{a^2-1}{a}}?$$

7.5. Числовое значение рационального выражения

Рассмотрим для примера рациональное выражение

$$\frac{a^2+1}{a-1}+2a. \qquad (1)$$

Если подставить в него вместо буквы a число 3, то получим числовое выражение $\frac{3^2+1}{3-1}+2\cdot 3$, равное числу 11. Число 11 называют **числовым значением выражения** (1) при $a = 3$.

Далее для краткости слово «числовое» часто опускается, но подразумевается.

При $a = -1$ значение выражения (1) равно -3.

Подобным образом можно вычислить значение выражения (1) при любых значениях a, за исключением $a = 1$. Ведь при $a = 1$ выражение (1) не имеет смысла, так как содержит деление на нуль:

$$\frac{1^2+1}{1-1}+2\cdot 1.$$

Говорят, что выражение (1) определено для всех числовых значений a, кроме $a = 1$.

В качестве второго примера рассмотрим рациональное выражение

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}. \qquad (2)$$

Зададим два числа. Первое из них подставим в выражение (2) вместо x, а второе — вместо y. Если при этом значение знаменателя окажется не равным нулю, то получится числовое выражение, равное некоторому числу. Это число называют **значением дроби (2) при заданных значениях** x и y. Мы видим, что дробь (2) имеет значения для любых значений x и y, если только они отличны друг от друга.

Говорят, что **дробь (2) определена** для всех значений x и y, отличных друг от друга ($x \neq y$).

Обратим внимание на то, что знаменатель дроби (2) есть ненулевой многочлен. Однако его значение при равных между собой значениях x и y обращается в нуль. Но имеется много пар чисел x и y, для которых знаменатель не обращается в нуль. Для каждой такой пары эта дробь имеет числовое значение, т. е. определена.

Подобным образом определяются числовые значения любых рациональных выражений.

Например, выражение

$$\frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2} - xyz$$

определено для всех числовых значений x, y и z, кроме $x = y = z = 0$.

Выражение

$$\frac{1 + \dfrac{d + a}{(c - d)^2}}{a^2 + b^2 + 1}$$

определено для всех числовых значений a, b, c и d, кроме тех, для которых $c = d$.

Алгебраическая дробь $\frac{A}{B}$ определена для всех числовых значений входящих в неё букв, исключая те, для которых знаменатель B обращается в нуль.

Например, дробь

$$\frac{x - y - z - t}{2x - 3y}$$

определена для всех числовых значений x, y, z и t, за исключением таких, для которых $2x - 3y = 0$.

Задача 1. Докажем, что для любого числа x верно неравенство $\frac{3}{x^2 + 2x + 4} \leqslant 1$, и определим, при каком значении x левая часть неравенства равна правой.

Так как для любого числа x верны равенство $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$ и неравенство $(x + 1)^2 + 3 \geqslant 3$, то для любого числа x верно неравенство $\frac{3}{x^2 + 2x + 4} \leqslant 1$, что и требовалось доказать. Так как $(x + 1)^2 + 3 = 3$ лишь при $x = -1$, то левая часть неравенства равна правой лишь при $x = -1$.

Задача 2. Докажем, что для любых чисел x и y верно неравенство $\dfrac{5}{x^2+y^2-4x+10y+34} \leqslant 1$, и определим, при каких значениях x и y левая часть неравенства равна правой.

Так как для любых чисел x и y верны равенство

$$x^2+y^2-4x+10y+34=(x-2)^2+(y+5)^2+5$$

и неравенство

$$(x-2)^2+(y+5)^2+5 \geqslant 5,$$

то для любых чисел x и y верно неравенство

$$\frac{5}{x^2+y^2-4x+10y+34} \leqslant 1,$$

что и требовалось доказать. Так как $(x-2)^2+(y+5)^2+5=5$ лишь при $x=2$ и $y=-5$, то левая часть неравенства равна правой лишь при $x=2$ и $y=-5$.

541. При каких числовых значениях букв алгебраическая дробь не определена?

542. Заполните таблицу, вычислив числовые значения выражений при данных значениях x:

x	0	−2	3	10^2	10^3	$-\frac{1}{2}$	0,6
$\frac{x}{x-1}$							
$\frac{x+1}{2x-3}$							

543. При каких числовых значениях a и b выражение $\frac{a}{b}$:

а) равно нулю; б) не имеет смысла?

544. При каких числовых значениях x значение алгебраической дроби равно нулю:

а) $\dfrac{x-2}{5}$; б) $\dfrac{x+4}{x}$; в) $\dfrac{2-x}{x+3}$; г) $\dfrac{2x+5}{3-x}$; д) $\dfrac{x^2+x}{x+1}$?

545. Запишите алгебраическую дробь, значение которой равно нулю при x, равном:

а) 3; б) −2; в) 0,5; г) $\frac{1}{3}$.

546. Найдите значения выражения при $x = 0$, $x = -2$, $x = 2^3$:

а) $\frac{x}{2}$; б) $\frac{10}{x}$; в) $\frac{2-3x}{7x}$; г) $\frac{x-2}{2-3x}$.

547. Заполните таблицу:

a	4	−10	6	0	−1	$-\frac{1}{2}$	−0,7
b	2	20	−5	7	0	−2	1,4
$\frac{a}{b+a}$							

548. Найдите значение выражения:

а) $\frac{4-x^2}{2+x}$ при $x = 1{,}04$; б) $\frac{a^2b-ab^2}{a-b}$ при $a = 2{,}5$, $b = \frac{1}{25}$;

в) $\frac{9m^2+6mn+n^2}{3m+n}$ при $m = \frac{1}{3}$, $n = -5$;

г) $\frac{a^3-p^3}{p-a}$ при $a = -\frac{1}{3}$, $p = -3$.

549. Упростив рациональное выражение, найдите его значение:

а) $\left(\frac{a^2}{a+1} - \frac{a^3}{a^2+2a+1}\right) : \left(\frac{a}{a+1} - \frac{a^2}{a^2-1}\right)$ при $a = -3$;

б) $\left(\frac{n-1}{n+1} - \frac{n+1}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{4} - \frac{1}{4n}\right)$ при $n = 3$.

550. Найдите значение рационального выражения:

$\left(\frac{n}{a} + \frac{a^2}{n^2}\right) : \left(\frac{1}{a^2n} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{an^2}\right) - a^2n$ при $a = 0{,}02$, $n = -10$.

551. При каких значениях букв определено выражение:

а) $\frac{a+b}{a}$; б) $\frac{1}{x-1}$; в) $\frac{c}{c+3}$; г) $\frac{a-3}{2a-6}$?

552. Заполните таблицу:

a	b	$\frac{a}{b}$	$a-\frac{1}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a-b}{a+b}$	$\frac{a^2-b^2}{a-2b}$
2	1					
−1	−3					
$\frac{1}{2}$	0,2					
0,4	$-\frac{1}{3}$					

553. При каких значениях букв определено выражение:

а) $\frac{3}{x^2}$; б) $\frac{x}{x^2+y^2}$; в) $\frac{xy-c}{m^2-n^2}$; г) $\frac{ab+c}{p^2-q^2}$;

д) $\frac{a+b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a}$; е) $\frac{xy-5}{x+y}\cdot\frac{x-y}{xy}$; ж) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{a-b}$?

554. Какие из данных алгебраических дробей ни при каких числовых значениях x не принимают целых значений:

$$\frac{1}{x};\quad \frac{1-x}{1+x};\quad \frac{1}{x^2+4};\quad \frac{9}{x^2-1}?$$

555. При каких числовых значениях букв данные дроби равны нулю и при каких не определены:

$$\frac{3x}{x-2};\quad \frac{m-38}{m};\quad \frac{2p-8}{p-3};\quad \frac{a+13}{2-3a}?$$

556. Вычислите значение выражения:

а) $\frac{a+b}{a^2-b^2}+a+\frac{b}{a}$ при $a=3$, $b=4$;

б) $\frac{ab}{a^2+b^2}-a^2$ при $a=-3$, $b=4$;

в) $\frac{xy-5}{x+y}\cdot\frac{x+y}{x-y}$ при $x=0$, $y=-3$.

557. Упростите выражение и вычислите его значение:

а) $\frac{3m^2+6mn+3n^2}{6n^2-6m^2}$ при $m=0{,}5$, $n=\frac{2}{3}$;

б) $\frac{2c^2-2b^2}{4b^2-8bc+4c^2}$ при $b=0{,}25$, $c=\frac{1}{3}$;

в) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$ при $x=0{,}35$, $y=7{,}65$;

г) $\frac{x^2+25}{(x-5)^2}+\frac{10x}{(5-x)^2}$ при $x=5{,}125$.

Исследуем (558—559).

558. При каких целых значениях x значение дроби:

а) $\frac{3}{x}$; б) $\frac{3x+5}{x+1}$; в) $\frac{5}{x}$; г) $\frac{3}{x-1}$; д) $\frac{x+2}{x+1}$; е) $\frac{4x+9}{x+2}$

является целым числом?

Решение.

а) Только при $x=1, -1, 3, -3$ значение дроби $\frac{3}{x}$ целое число.

б) Так как $\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=\frac{3(x+1)}{x+1}+\frac{2}{x+1}=3+\frac{2}{x+1}$, то значение выражения целое только при $x=-3, -2, 0, 1$.

559. Найдите, если это возможно, числовые значения x, для которых значение алгебраической дроби — натуральное число:
а) $\frac{12}{x+5}$; б) $\frac{x+2}{x}$; в) $\frac{x+2}{x-5}$; г) $\frac{x^2-x}{x+1}$.

Доказываем (560—561).

560. Докажите, что для любого числа x верно неравенство:
а) $\frac{2}{x^2+6x+11} \leqslant 1$; б) $\frac{4}{x^2-10x+29} \leqslant 1$; в) $\frac{6}{x^2+8x+22} \leqslant 1$.
Определите, при каком значении x левая часть неравенства равна правой.

561. Докажите, что для любых чисел x и y верно неравенство:
а) $\frac{3}{x^2+y^2-6x+2y+13} \leqslant 1$; б) $\frac{5}{x^2+y^2+8x-6y+30} \leqslant 1$.
Определите, при каких значениях x и y левая часть неравенства равна правой.

7.6. Тождественное равенство рациональных выражений

В пп. 7.1—7.5 рассмотрены равенства рациональных выражений. Вот одно из таких равенств:

$$\frac{a^2+a+1}{a-3} = \frac{(a^2+a+1)(a-1)}{(a-3)(a-1)}. \qquad (1)$$

Левая его часть определена для числовых значений a, отличных от 3. Правая же его часть определена для числовых значений a, отличных от 3 и 1. Но тогда обе части равенства (1) определены для всех числовых значений a, отличных от 3 и 1. Более того, для каждого из этих значений a числовые значения левой и правой частей в равенстве (1) равны между собой.

Действительно, если заменить в равенстве (1) букву a любым числом, отличным от 3 и 1, то получим верное числовое равенство: ведь тогда его левая часть есть дробь, а правая — равная ей дробь, полученная умножением её числителя и знаменателя на одно и то же не равное нулю число.

Вот ещё пример:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{x-3+x-2}{(x-2)(x-3)}. \qquad (2)$$

Равенство (2) превращается в верное числовое равенство для всех числовых значений x, для которых определены левая и правая его части (т. е. для x, отличных от 2 и 3), потому что тогда оно выражает правило сложения обыкновенных дробей.

Равенство двух рациональных выражений называют **тождеством** или **тождественным равенством**, если оно превращается в верное числовое равенство для всех числовых значений букв, для которых оба эти выражения определены.

Выше доказано, что равенства (1) и (2) — тождества. Для любого другого верного равенства двух рациональных выражений можно провести аналогичные рассуждения.

Итак, **любое верное равенство двух рациональных выражений есть тождество.**

Поэтому далее вместо слов «докажем, что равенство верно» часто будем писать «докажем тождество».

При доказательстве тождеств пользуются правилами, которым подчинены алгебраические дроби. При этом каждый раз имеется в виду, что доказываемое равенство справедливо для тех числовых значений букв, для которых определены обе его части.

Иногда, рассматривая тождество, дополнительно выписывают числовые значения букв, при которых определены обе части этого тождества.

Пример 1. Докажем тождество

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}-\frac{2y}{x^2-y^2}=0. \qquad (3)$$

Доказательство. Для любых значений букв, при которых определена левая часть равенства (3), имеем

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}-\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{x+y}{(x-y)(x+y)}-\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}-\frac{2y}{(x+y)(x-y)}=$$
$$=\frac{x+y-(x-y)-2y}{(x-y)(x+y)}=\frac{x+y-x+y-2y}{(x-y)(x+y)}=\frac{0}{(x-y)(x+y)}=0,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что обе части тождества (3) определены при всех значениях x и y, таких, что $|x|\neq|y|$.

Пример 2. Докажем тождество

$$\frac{1}{(x-y)(y-z)}-\frac{1}{(y-z)(x-z)}-\frac{1}{(z-x)(y-x)}=0. \qquad (4)$$

Доказательство. Для любых значений букв, при которых определена левая часть равенства (4), имеем

$$\frac{1}{(x-y)(y-z)}-\frac{1}{(y-z)(x-z)}-\frac{1}{(z-x)(y-x)}=\frac{1}{(x-y)(y-z)}-$$
$$-\frac{1}{(y-z)(x-z)}-\frac{1}{(x-z)(x-y)}=\frac{x-z}{(x-y)(y-z)(x-z)}-$$
$$-\frac{x-y}{(x-y)(y-z)(x-z)}-\frac{y-z}{(x-y)(y-z)(x-z)}=\frac{x-z-(x-y)-(y-z)}{(x-y)(y-z)(x-z)}=$$
$$=\frac{x-z-x+y-y+z}{(x-y)(y-z)(x-z)}=\frac{0}{(x-y)(y-z)(x-z)}=0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Докажем тождество

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a + b} - \frac{a^2 - b^2}{a - b}. \qquad (5)$$

Доказательство. Для любых значений букв, при которых определены обе части равенства (5), имеем

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} - \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 - ab + b^2} =$$
$$= a - b - (a + b) = a - b - a - b = -2b;$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} - \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} - \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a - b - (a + b) =$$
$$= a - b - a - b = -2b.$$

Следовательно, левая часть равенства (5) равна правой при любых значениях букв, при которых определены обе его части, что и требовалось доказать.

Замечание. Определение тождества, приведённое в этом пункте, не противоречит ранее данному определению тождественного равенства целых выражений, поскольку у любого целого выражения обе его части определены для всех числовых значений букв.

562. Какое равенство двух рациональных выражений называют тождеством?

563. Приведите пример верного равенства для многочленов относительно x. Является ли это равенство тождеством?

564. Приведите пример верного равенства двух выражений относительно x, левая часть которого определена для всех x, отличных от 0 и 1, а правая — для всех x, отличных от 0. Является ли это равенство тождеством?

565. При каких значениях букв определены обе части равенства:

а) $a + b = b + a$; б) $ab + ac = a(b + c)$;

в) $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$; г) $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$;

д) $\frac{(x+y)^2}{x+y} = x + y$; е) $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$;

ж) $\frac{m^3 + m}{m^2 + 1} = m$; з) $m^2 - m + 1 = \frac{m^3 + 1}{m + 1}$;

и) $\frac{a + b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a - b}$; к) $\frac{a}{a - b} - \frac{b}{a + b} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$?

Являются ли эти равенства тождествами?

Доказываем. Докажите тождество (566—569):

566. а) $\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\cdot(x^2-2x+1)=\dfrac{2x-2}{x+1}$;

б) $\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)\cdot(x^2-4x+4)=\dfrac{4x-8}{x+2}$.

567. а) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=0$;

б) $\dfrac{2y}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}=0$;

в) $\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}\right)\cdot\dfrac{x^2-y^2}{y}=2$;

г) $\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x}=2$;

д) $\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)\cdot(x^2-y^2)=2x$;

е) $\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}\right)\cdot(x^2-y^2)=2y$.

568. а) $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{1}{(a-c)(b-a)}=0$;

б) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0$;

в) $\dfrac{a^4-b^4}{((a+b)^2-4ab)((a-b)^2+4ab)((a+b)^2-2ab)}=\dfrac{1}{a^2-b^2}$.

569. а) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}\cdot\left(\dfrac{6a+b}{a^2-b^2}:\dfrac{6a^3+b^3+a^2b+6ab^2}{2ab^2-2a^2b}+\dfrac{a+b}{a^2+b^2}\right)=\dfrac{a^2+b^2}{ab(a+b)}$;

б) $\left(\dfrac{x}{xy+y^2}-\dfrac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\dfrac{y}{x^2-xy}\right):\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^3+y^3}=\dfrac{x^2-xy+y^2}{y(x-y)}$;

в) $\left(\dfrac{2x^2y+2xy^2}{7x^3+x^2y+7xy^2+y^3}\cdot\dfrac{7x+y}{x^2-y^2}+\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right)\cdot(x^2-y^2)=x+y$;

г) $\left(\dfrac{5}{a^2-2a-ax+2x}-\dfrac{1}{8-8a+2a^2}\cdot\dfrac{20-10a}{x-2}\right):\dfrac{25}{x^3-8}=\dfrac{x^2+2x+4}{5(a-x)}$;

д) $\left(\dfrac{3a}{9-3x-3a+ax}-\dfrac{1}{a^2-9}:\dfrac{x-a}{3a^2+9a}\right)\cdot\dfrac{x^3-27}{3a}=\dfrac{x^2+3x+9}{a-x}$.

§ 8. Степень с целым показателем

8.1. Понятие степени с целым показателем

Мы знаем, что степенью действительного числа a с натуральным показателем $n > 1$ называют число a^n, определяемое по правилу

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Если $n = 1$, то считается, что правая часть этого равенства равна a:

$$a^1 = a.$$

В п. 3.4 приведён ряд свойств степеней чисел с натуральным показателем, в частности свойство умножения степеней: если a — действительное число, а m и n — натуральные числа, то

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Выясним теперь, как делятся натуральные степени одного и того же числа a. При этом придётся считать, что a отлично от нуля ($a \neq 0$), потому что на нуль делить нельзя.

Пусть a — действительное, отличное от нуля число, а m и n — натуральные числа. Рассмотрим частное a^m и a^n:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n}.$$

Применим к этой дроби основное свойство дробей. Рассмотрим три случая: 1) $m > n$; 2) $m < n$; 3) $m = n$.

1) Если $m > n$, то

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}. \qquad (1)$$

Мы приходим к правилу: если число $a \neq 0$, m и n — натуральные числа и $m > n$, то

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

2) Пусть теперь будет $m < n$. Рассмотрим пример. Пусть $m = 3$, $n = 5$. Тогда

$$a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1 \cdot a^3}{a^2 \cdot a^3} = \frac{1}{a^2}.$$

Мы видим, что при $m < n$ правило 1 неприменимо. Однако если условиться дробь $\frac{1}{a^2}$ обозначать через a^{-2}, т. е. считать, что $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, то получим равенство

$$a^3 : a^5 = a^{-2} = a^{3-5},$$

которое можно рассматривать как частный случай равенства (1), но без ограничения $m > n$.

Вот ещё пример:

$$a^7 : a^{10} = \frac{a^7}{a^{10}} = \frac{1}{a^3}.$$

Если обозначить дробь $\frac{1}{a^3}$ через a^{-3}, т. е. считать, что $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, то получим равенство

$$a^7 : a^{10} = a^{-3} = a^{7-10},$$

которое также можно рассматривать как частный случай равенства (1), но без ограничения $m > n$.

В общем случае если $m < n$ и $a \neq 0$, то

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

Здесь дробь $\frac{1}{a^{n-m}}$ обозначена через $a^{-(n-m)}$.

3) Рассмотрим теперь случай $m = n$. Тогда

$$a^m : a^n = a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1.$$

Это равенство показывает, что целесообразно для любого действительного, отличного от нуля числа a считать a^0 равным единице, и тогда получим равенство

$$a^m : a^m = 1 = a^0 = a^{m-m},$$

которое также можно рассматривать как частный случай равенства (1), но без ограничения $m > n$.

Приведённые выше рассуждения показывают, что целесообразно ввести следующие два соглашения:

1. Для любого действительного, отличного от нуля числа a и любого натурального числа m число $\frac{1}{a^m}$ условимся обозначать a^{-m} и писать:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (a \neq 0).$$

Это равенство читают так: «a в степени $-m$ равно единице, делённой на a в степени m».

2. Для любого действительного, отличного от нуля числа a условимся под выражением a^0 понимать число 1 и писать:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

Это равенство читают так: «a в степени нуль равно единице».

Итак, теперь определено, что такое a^m, где a — любое действительное число, отличное от нуля, и m — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

Если a — любое действительное, отличное от нуля число, то

$$a^m = \begin{cases} \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}}, \text{ если } m \text{ — натуральное число и } m \geqslant 2, \\ a, \text{ если } m = 1, \\ 1, \text{ если } m = 0, \\ \dfrac{1}{a^{-m}}, \text{ если } m \text{ — целое отрицательное число.} \end{cases}$$

При этом число a^m называют **степенью с целым показателем**, число a — **основанием степени**, число m — **показателем степени**.

Замечание. Выражение 0^0 считают лишённым смысла. Если m — натуральное число, то выражение 0^{-m} также считают лишённым смысла, однако

$$0^m = 0.$$

570. а) Что понимают под a^0, если $a \neq 0$?

б) Что понимают под a^{-m}, если $a \neq 0$ и m — натуральное число?

в) Что называют степенью с целым показателем?

г) Имеет ли смысл выражение: 0^5; 0^0; 0^{-5}?

Вычислите (571—572):

571. а) 5^0; б) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^0$; в) $(-1{,}2)^0$; г) $(-1)^0$.

572. а) $\dfrac{2^4}{2^3}$; б) $\dfrac{2^4}{2^4}$; в) $\dfrac{2^4}{2^5}$; г) $\dfrac{2^5}{2^7}$;

д) $\dfrac{3^5}{3^4}$; е) $\dfrac{3^{100}}{3^{100}}$; ж) $\dfrac{(-0{,}3)^4}{(-0{,}3)^5}$; з) $\dfrac{0{,}2^7}{0{,}2^5}$.

573. Определите, имеет ли смысл выражение. Если да, то вычислите его значение:

а) $\left(0{,}25 \cdot 79 - 3{,}21 \cdot 2\dfrac{1}{11}\right)^0$; б) $(0{,}48 \cdot 5{,}2 - 4{,}8 \cdot 0{,}52)^0$.

574. Запишите в виде степени с целым показателем:

а) $2 \cdot 2 \cdot 2$; б) $2^3 \cdot 2^5$; в) $\dfrac{1}{3^2}$;

г) $\dfrac{1}{3}$; д) $\dfrac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$; е) 5;

ж) $\dfrac{1}{16}$; з) $\dfrac{1}{25}$; и) $2^3 : 2^3$;

к) $\dfrac{9^7}{9^5}$; л) $\dfrac{0{,}5^6}{0{,}5^7}$; м) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^8 : \left(-\dfrac{1}{5}\right)^7$.

Вычислите (575—577):

575. а) 10^4; 10^3; 10^2; 10^1; 10^0; 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4};
б) 2^5; 2^4; 2^3; 2^2; 2^1; 2^0; 2^{-1}; 2^{-2}; 2^{-3}; 2^{-4}; 2^{-5};
в) $(-3)^3$; $(-3)^2$; $(-3)^1$; $(-3)^0$; $(-3)^{-1}$; $(-3)^{-2}$; $(-3)^{-3}$.

576. а) 1^{-1}; -1^1; $(-1)^1$; $(-1)^{-1}$; -1^{-1};
б) 1^{-2}; -1^2; $(-1)^2$; $(-1)^{-2}$; -1^{-2};
в) 2^{-2}; -2^2; $(-2)^2$; $(-2)^{-2}$; -2^{-2}.

577. а) 4^{-2}; б) 3^{-1}; в) 3^{-4};
г) $7{,}12^0$; д) $5^{-1} + 4^{-1}$; е) $(5 + 4)^{-1}$;
ж) $4^{-1} - 5^{-1}$; з) $(3^{-1} - 5^{-1})^{-2}$; и) $2^{-3} + 4^{-2}$;
к) $3^{-2} - 9^{-1}$; л) $4^2 \cdot 2^{-3}$; м) $3^{-4} : 9^{-2}$.

578. Проверьте равенство:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3$;

в) $\left(\frac{12}{31}\right)^{-5} = \left(\frac{31}{12}\right)^5$; г) $\left(1\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4}$.

579. **Доказываем.** Докажите, что для чисел $a \neq 0$, $b \neq 0$, k — целого верно равенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k.$$

Сравните (580—581):

580. а) 5^0 и $(-5)^0$; б) 5^{-2} и 5^2; в) $(-2)^3$ и $(-2)^0$;
г) -3^2 и $(-3)^2$; д) $(-2)^4$ и 2^{-4}; е) -2^4 и 2^{-4}.

581. а) 19^{-20} и $\left(\frac{1}{19}\right)^{20}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ и $\left(\frac{3}{5}\right)^{-5}$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^6$ и 3^{-6}; г) 1999^{2000} и $\left(\frac{1}{1999}\right)^{-2000}$.

582. Сравните с нулём:

а) 2^{-3}; б) $(-2)^3$; в) $(-2)^{-3}$; г) -2^3;
д) 2^{-4}; е) $(-2)^4$; ж) $(-2)^{-4}$; з) -2^4.

Запишите в виде степени с целым показателем, если $a \neq 0$ (583—584):

583. а) $a^3 \cdot a^4$; б) $a^4 \cdot a$; в) $a^{13} : a^6$; г) $a^{12} : a$;
д) $(a^4)^6$; е) $(a^2)^5$; ж) $a^7 \cdot b^7$; з) $a^4 \cdot b^4$.

584. а) $a^5 : a^8$; б) $a^7 : a^8$; в) $a^4 : a$; г) $a^{12} : a^{12}$;
д) $a^{-4} : a^6$; е) $a^4 : a^{-5}$; ж) $a^{-11} : a^{-8}$; з) $a^{-4} : a$;
и) $a^6 : a^5$; к) $a^9 : a^0$; л) $a^{-3} : a^0$; м) $a^0 : a^{-8}$.

8.2. Свойства степени с целым показателем

Пусть a и b — произвольные, отличные от нуля действительные числа, m и n — произвольные целые числа. Тогда справедливы следующие равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (1)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \qquad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; \qquad (3)$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m; \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}. \qquad (5)$$

Равенство (1) означает, что *при умножении степеней одного и того же числа показатели степеней складывают.*

Равенство (2) означает, что *при делении степеней одного и того же числа показатели степеней вычитают*, точнее, из показателя степени числителя вычитают показатель степени знаменателя.

В справедливости этих утверждений можно убедиться на примерах. Два таких примера, когда $m = 3$, $n = 5$ и $m = 7$, $n = 10$, были уже рассмотрены в предыдущем пункте.

Вот ещё примеры ($a \neq 0$):

1) $a^{-3} \cdot a^2 = \frac{1}{a^3} \cdot a^2 = \frac{1}{a} = a^{-1} = a^{-3+2}$;

2) $a^{-6} \cdot a^{-7} = \frac{1}{a^6} \cdot \frac{1}{a^7} = \frac{1}{a^{13}} = a^{-13} = a^{-6+(-7)}$;

3) $\dfrac{a^{-3}}{a^{-2}} = \dfrac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{a^2}} = \dfrac{a^2}{a^3} = \dfrac{1}{a} = a^{-1} = a^{-3-(-2)}$;

4) $\dfrac{a^5}{a^{-2}} = \dfrac{a^5}{\frac{1}{a^2}} = \dfrac{a^5 \cdot a^2}{1} = a^7 = a^{5-(-2)}$;

5) $\dfrac{a^0}{a^5} = \dfrac{1}{a^5} = a^{-5} = a^{0-5}$.

Равенство (3) означает, что *при возведении степени числа в степень показатели степеней перемножают.*

Для натуральных m и n это правило хорошо известно. В справедливости же его при любых целых m и n можно убедиться на следующих примерах ($a \neq 0$):

6) $(a^{-3})^2 = \left(\dfrac{1}{a^3}\right)^2 = \dfrac{1}{a^3} \cdot \dfrac{1}{a^3} = \dfrac{1}{a^3 \cdot a^3} = \dfrac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{-3 \cdot 2}$;

7) $(a^{-4})^0 = 1 = a^0 = a^{-4 \cdot 0}$;

8) $(a^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{a^6}} = a^6 = a^{-2 \cdot (-3)}$.

Равенство (4) означает, что *степень произведения двух чисел равна произведению тех же степеней этих чисел.*

Равенство (5) означает, что *степень частного двух чисел равна частному тех же степеней этих чисел.*

В справедливости этих утверждений можно убедиться на следующих примерах ($a \neq 0$, $b \neq 0$):

9) $(a \cdot b)^{-3} = \frac{1}{(a \cdot b)^3} = \frac{1}{a^3 \cdot b^3} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} = a^{-3} \cdot b^{-3}$;

10) $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}$;

11) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$.

В каждом из примеров 1—11 были проведены все необходимые выкладки. Но после того как правила (1) — (5) будут усвоены, промежуточные выкладки можно опускать, ссылаясь на эти правила. Таким образом, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то:

1) $a^{-3} \cdot a^2 = a^{-3+2} = a^{-1}$; 2) $a^{-6} \cdot a^{-7} = a^{-6+(-7)} = a^{-13}$;

3) $\frac{a^{-3}}{a^{-2}} = a^{-3-(-2)} = a^{-1}$; 4) $\frac{a^5}{a^{-2}} = a^{5-(-2)} = a^7$;

5) $\frac{a^0}{a^5} = a^{0-5} = a^{-5}$; 6) $(a^{-3})^2 = a^{-3 \cdot 2} = a^{-6}$;

7) $(a^{-4})^0 = a^{-4 \cdot 0} = a^0 = 1$; 8) $(a^{-2})^{-3} = a^{-2 \cdot (-3)} = a^6$;

9) $(a \cdot b)^{-3} = a^{-3} \cdot b^{-3}$; 10) $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$;

11) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$.

585. а) По какому правилу умножают степени с целыми показателями одного и того же числа?
б) По какому правилу делят степени с целыми показателями одного и того же числа?
в) По какому правилу возводят в степень с целым показателем степень числа?
г) По какому правилу находят степень с целым показателем произведения двух чисел?
д) По какому правилу находят степень с целым показателем частного двух чисел?

586. Представьте в виде степени с целым показателем:
а) $a^{-3} \cdot b^{-3}$; б) $7^2 \cdot 2^{-3} \cdot 7$.

587. Представьте выражение в виде произведения степеней:
а) $(a^2b^{-5})^3$; б) $(a^{-7}b^2)^{-2}$; в) $(a^{-3}b^{-5})^{-4}$.

588. **Доказываем.** Докажите, что если $a \neq 0$ и m, n, k — целые числа, то:
а) $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$;
б) $a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}$;
в) $((a^m)^n)^k = a^{m \cdot n \cdot k}$.

Запишите в виде степени с целым показателем, если $a \neq 0$ (589—593):

589. а) $2^3 \cdot 2^4$; б) $5 \cdot 5^6$; в) $4^3 \cdot 4^2 \cdot 4$;
г) $7^2 \cdot 7 \cdot 7^5$; д) $3^6 \cdot 3^7 \cdot 3 \cdot 3$; е) $6^4 \cdot 6^4 \cdot 6^3 \cdot 6^2$;
ж) $11^2 \cdot 11^2 \cdot 11^2$; з) $9^3 \cdot 9^6 \cdot 9^2 \cdot 9^4 \cdot 9$.

590. а) $a^5 \cdot a^4$; б) $a^3 \cdot a^5$; в) $a^{10} \cdot a$;
г) $a \cdot a^7$; д) $a \cdot a$; е) $a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4$.

591. а) $2^5 : 2^4$; б) $3^7 : 3^8$; в) $5^9 : 5$;
г) $\frac{10^9}{10}$; д) $\frac{5^7}{5^{13}}$; е) $\frac{8^{12}}{8^{10}}$.

592. а) $a^7 : a^3$; б) $a^8 : a^{12}$; в) $a^6 : a$;
г) $\frac{a^{12}}{a^4}$; д) $\frac{a^{20}}{a^{22}}$; е) $\frac{a^{20}}{a}$.

593. а) $\frac{10^2}{12^2}$; б) $\frac{4^3}{5^6}$; в) $\frac{25^4}{7^8}$;
г) $\frac{(m^2)^4}{(a^4)^3}$; д) $\frac{m^3m^5}{a^8}$; е) $\frac{(n^6)^2}{a^{12}}$.

594. Сравните:
а) 3^4 и 4^3; б) 2^4 и 4^2; в) 10^{20} и 20^{10};
г) 100^{200} и 200^{100}; д) 1999^{2000} и 1998^{1999}.

595. Представьте в виде степени с основанием a^2:
а) $(a^5)^2$; б) $(a^3)^4$; в) $(a^6)^7$.

596. Представьте a^{50} в виде степени с основанием:
а) a^5; б) a^2; в) a^{10}.

597. Представьте в виде квадрата:
а) a^4; б) a^{20}; в) a^{50}.

598. Разложите на два множителя хотя бы одним способом:
а) 7^{10}; б) a^6; в) $(cd)^7$.

599. Разложите на три множителя хотя бы одним способом:
а) 5^6; б) b^5; в) $(ab)^4$.

600. Представьте a^{50} $(a \neq 0)$ в виде степени с основанием:
а) a^{-2}; б) a^{-5}; в) a^{10}; г) a^{-10}; д) a^{-25}.

601. Вместо звёздочки запишите такое число, чтобы равенство было верным:
а) $3^3 \cdot * = 3^8$; б) $4^3 \cdot * = 4^6$; в) $2^4 \cdot * = 2^2$;
г) $(5^3)^* = 5^6$; д) $(4^3)^* = 4^{15}$; е) $2^* \cdot 3^* = 6^3$;
ж) $4^5 : * = 4^2$; з) $3^5 : * = 3^7$; и) $(2 \cdot 3)^* = 6^5$.

8.3. Стандартный вид числа

Всякое положительное число A можно записать так:

$$A = a \cdot 10^k, \tag{1}$$

где число a удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant a < 10$, а k — целое число. Такую запись называют записью числа **в стандартном виде.** Показатель степени k здесь может быть любым целым числом — положительным, отрицательным, нулём; число 10^k называют **порядком числа** A.

Например, $273{,}095 = 2{,}73095 \cdot 10^2$, $0{,}0234 = 2{,}34 \cdot 10^{-2}$,
$0{,}21 = 2{,}1 \cdot 10^{-1}$, $6781 = 6{,}781 \cdot 10^3$,
$3{,}1 = 3{,}1 \cdot 10^0$.

Здесь в правых частях равенств записаны числа в стандартном виде. Напомним, что значащей цифрой числа называют его первую (слева направо) отличную от нуля цифру, а также все следующие за ней цифры (см. п. 3.5). Из этих примеров видно, что для приведения числа к стандартному виду надо перенести в нём запятую так, чтобы она оказалась непосредственно правее первой значащей цифры, и полученное число умножить на 10^k, где k подбирается так, чтобы произведение было равно данному числу.

Например, скорость света в вакууме приближённо равна 299 792 460 м/с, или $2{,}99792460 \cdot 10^8$ м/с.

При решении многих задач числа округляют с точностью до первой, второй, третьей и т. д. значащей цифры. Числа a в записи (1) округляют с точностью, которая необходима в данной задаче, и тогда равенство (1) заменяют на приближённое равенство. Приведённое выше значение скорости света округлим с точностью до первой, второй, третьей, четвёртой значащей цифры:

$2{,}99792460 \cdot 10^8$ м/с $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с,
$2{,}99792460 \cdot 10^8$ м/с $\approx 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с,
$2{,}99792460 \cdot 10^8$ м/с $\approx 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с,
$2{,}99792460 \cdot 10^8$ м/с $\approx 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с.

В п. 3.5 сказано, что при приближённом умножении и делении чисел надо округлять сами числа и результат вычислений с точностью до одной и той же значащей цифры. Если же записать числа в стандартном виде, то округление чисел и результата вычислений с нужной точностью только упростится. Это видно из следующего примера.

Пример. Пусть $a = 42{,}38(3)$, $b = 0{,}0001276$, $c = 3\,153\,000$. Вычислим: а) $a \cdot b$; б) $a \cdot c$; в) $a : c$; г) $b : c$, округлив числа до третьей значащей цифры.

Сначала округлим числа до третьей значащей цифры, запишем их в стандартном виде и выполним отдельно вычисления с первыми множителями и с порядками; результаты вычислений запишем в стандартном виде и также округлим до третьей значащей цифры:

$a = 42{,}38(3) = 4{,}238(3) \cdot 10 \approx 4{,}24 \cdot 10^1$;
$b = 0{,}0001276 = 1{,}276 \cdot 10^{-4} \approx 1{,}28 \cdot 10^{-4}$;
$c = 3\,153\,000 = 3{,}153 \cdot 10^6 \approx 3{,}15 \cdot 10^6$;

а) $a \cdot b = (4{,}24 \cdot 10^1) \cdot (1{,}28 \cdot 10^{-4}) = (4{,}24 \cdot 1{,}28) \cdot (10^1 \cdot 10^{-4}) =$
$= 5{,}4272 \cdot 10^{-3} \approx 5{,}43 \cdot 10^{-3}$;

б) $a \cdot c = (4{,}24 \cdot 10^1) \cdot (3{,}15 \cdot 10^6) = (4{,}24 \cdot 3{,}15) \cdot (10^1 \cdot 10^6) =$
$= 13{,}356 \cdot 10^7 = 1{,}3356 \cdot 10^8 \approx 1{,}34 \cdot 10^8$;

в) $a : c \approx (4{,}24 \cdot 10^1) : (3{,}15 \cdot 10^6) = (4{,}24 : 3{,}15) \cdot (10^1 : 10^6) =$
$= 1{,}346... \cdot 10^{-5} \approx 1{,}35 \cdot 10^{-5}$;

г) $b : c \approx (1{,}28 \cdot 10^{-4}) : (3{,}15 \cdot 10^6) = (1{,}28 : 3{,}15) \cdot (10^{-4} : 10^6) =$
$= 0{,}4063... \cdot 10^{-10} = 4{,}063... \cdot 10^{-11} \approx 4{,}06 \cdot 10^{-11}$.

Замечание. В практических расчётах надо учитывать, что описанные в п. 3.5 правила дают более точные результаты при большем числе значащих цифр (см. замечание в п. 3.5).

602. а) Что называют записью числа в стандартном виде?
б) Любое ли положительное число можно записать в стандартном виде?
в) Как привести число к стандартному виду, используя его значащие цифры?

603. Запишите число в стандартном виде, укажите порядок числа:
а) 27,4; б) 3821; в) 0,0011; г) 290 000;
д) 0,00013; е) 0,00987; ж) 12 345; з) 980 012;
и) 9835; к) 197; л) 11 910; м) 12 190.

604. Назовите все значащие цифры числа в задании 603.

605. При каком значении n выполняется равенство:
а) $60{,}2 \cdot 10^n = 6{,}02 \cdot 10^3$; б) $352 \cdot 10^n = 3{,}52 \cdot 10^{12}$;
в) $740 \cdot 10^n = 7{,}4 \cdot 10^{-4}$; г) $19\,800 \cdot 10^n = 1{,}9800 \cdot 10^{-15}$;
д) $0{,}02 \cdot 10^n = 2 \cdot 10^7$; е) $0{,}036 \cdot 10^n = 3{,}6 \cdot 10^3$;
ж) $0{,}0005 \cdot 10^n = 5$; з) $0{,}000188 \cdot 10^n = 1{,}88 \cdot 10^{-8}$?

606. Запишите число в стандартном виде:
а) $27{,}4 \cdot 10^2$; б) $382 \cdot 10^{-4}$; в) $0{,}11 \cdot 10^8$;
г) $290 \cdot 10^{-3}$; д) $0{,}12 \cdot 10^{-2}$; е) $0{,}19 \cdot 10^{-2}$;
ж) $0{,}069 \cdot 10^4$; з) $9992 \cdot 10^0$; и) $0{,}480 \cdot 10^{-2}$;
к) $0{,}0398 \cdot 10^2$; л) $796 \cdot 10^4$; м) $9989 \cdot 10^0$.

607. Вычислите:

а) $(1{,}2 \cdot 10^{5}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$; б) $(4 \cdot 10^{12}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-7})$;

в) $(3{,}6 \cdot 10^{2}) : (9 \cdot 10^{-3})$; г) $(5 \cdot 10^{-4}) : (2{,}5 \cdot 10^{9})$;

д) $1250 : 0{,}625$; е) $0{,}00016 \cdot 625\,000$;

ж) $\dfrac{2 \cdot 10^{5} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{-3}}{1{,}8 \cdot 10^{7}}$; з) $\dfrac{1{,}25 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{3}}{10^{-13}}$.

608. Дано: $a = 0{,}000002546$, $b = 648\,400\,000$. Вычислите, округлив числа с точностью до третьей значащей цифры:
а) $a \cdot b$; б) $a : b$; в) $b : a$.

609. Верно ли, что:
а) порядок произведения двух чисел равен произведению их порядков;
б) порядок частного двух чисел равен частному их порядков?

610. а) Скорость движения Земли вокруг Солнца равна $3 \cdot 10^{4}$ м/с. За какое время Земля пройдёт вокруг Солнца путь $1{,}8 \cdot 10^{12}$ м?
б) Скорость звука в воздухе (при 0 °С) равна 332 м/с. Через сколько минут звук достигнет объекта, находящегося на расстоянии 18,592 км от источника звука?

611. **Ищем информацию.** а) Используя учебник, справочную литературу и Интернет, найдите примеры применения стандартного вида числа в физике, астрономии и других науках.
б) Используя учебник, справочную литературу и Интернет, найдите объяснение происхождения термина «нанотехнологии».

8.4. Преобразование рациональных выражений

Ранее уже преобразовывались рациональные (в частности, числовые) выражения. В этом пункте будет показано, что иногда запись таких преобразований упрощается, если воспользоваться степенью с целым показателем.

Для краткой записи алгебраических дробей принято применять степень с отрицательным показателем. Например, вместо $\dfrac{1}{(a-b)^2}$ пишут $(a-b)^{-2}$; вместо $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ пишут $(2^{-1}+3^{-1})^{-1}$.

Такой краткой записью можно пользоваться при преобразовании рациональных выражений. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Докажем, что верно равенство

$$(a^{-1} - b^{-1}) \cdot (a^{-1} + b^{-1}) = a^{-2} - b^{-2}.$$

Заметим, что в левой части равенства записано произведение разности и суммы выражений a^{-1} и b^{-1}, которое можно записать как разность квадратов тех же выражений:

$$(a^{-1} - b^{-1}) \cdot (a^{-1} + b^{-1}) = (a^{-1})^2 - (b^{-1})^2 = a^{-2} - b^{-2},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Упростим выражение $\dfrac{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{2}{ab} + \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}}$.

I способ. Преобразуем выражение, используя свойство степени с натуральным показателем, формулы квадрата разности, разности квадратов и правила действий с алгебраическими дробями:

$$A = \frac{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{2}{ab} + \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}} = \frac{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} + \left(\dfrac{1}{b}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{b}\right)^2} = \frac{\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \frac{\dfrac{b-a}{ab}}{\dfrac{b+a}{ab}} = \frac{(b-a) \cdot ab}{(b+a) \cdot ab} = \frac{b-a}{b+a}.$$

II способ. Заметим, что после записи дробей в виде степени с отрицательным показателем в числителе данной дроби получится квадрат разности выражений a^{-1} и b^{-1}, а в знаменателе — разность квадратов этих выражений:

$$A = \frac{a^{-2} - 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2}}{a^{-2} - b^{-2}} = \frac{(a^{-1} - b^{-1})^2}{(a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})} = \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} =$$

$$= \frac{(a^{-1} - b^{-1}) \cdot ab}{(a^{-1} + b^{-1}) \cdot ab} = \frac{b-a}{b+a}.$$

Пример 3. Вычислим значение выражения

$$\frac{(999^{-1} - 1000^{-1})(999^{-1} + 1000^{-1})}{(1000^{-1} - 999^{-1})^2}.$$

I способ. Чтобы избежать громоздких вычислений с дробями, имеющими знаменатели 999 и 1000, обозначим $a = 999$, $b = 1000$ и сначала упростим буквенное выражение:

$$B = \frac{(a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})}{(b^{-1} - a^{-1})^2} = \frac{(a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})}{(a^{-1} - b^{-1})^2} = \frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} =$$

$$= \frac{(a^{-1} + b^{-1}) \cdot ab}{(a^{-1} - b^{-1}) \cdot ab} = \frac{b + a}{b - a}.$$

Теперь, подставляя в полученное выражение вместо a и b числа 999 и 1000 соответственно, получим, что искомое выражение равно

$$\frac{1000 + 999}{1000 - 999} = \frac{1999}{1} = 1999.$$

II способ. Обозначим $m = 999^{-1}$, $n = 1000^{-1}$ и сначала упростим буквенное выражение:

$$B = \frac{(m - n)(m + n)}{(n - m)^2} = \frac{(m - n)(m + n)}{(m - n)^2} = \frac{m + n}{m - n}.$$

Теперь, подставляя в полученное выражение вместо m и n числа 999^{-1} и 1000^{-1} соответственно, получим, что искомое выражение равно

$$\frac{999^{-1} + 1000^{-1}}{999^{-1} - 1000^{-1}} = \frac{\frac{1}{999} + \frac{1}{1000}}{\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}} = \frac{\frac{1999}{999 \cdot 1000}}{\frac{1}{999 \cdot 1000}} = \frac{1999}{1} = 1999.$$

Пример 4. Найдём значение выражения

$$\left(\frac{a^{-2}}{4 - a^{-2}}\right)^{-2} - \left(\frac{a^{-2}}{4 + a^{-2}}\right)^{-2}$$

при $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

Так как $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, то $a^{-2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

Поэтому

$$\left(\frac{a^{-2}}{4 - a^{-2}}\right)^{-2} - \left(\frac{a^{-2}}{4 + a^{-2}}\right)^{-2} = \left(\frac{\frac{1}{16}}{4 - \frac{1}{16}}\right)^{-2} - \left(\frac{\frac{1}{16}}{4 + \frac{1}{16}}\right)^{-2} =$$

$$= \left(\frac{1}{4 \cdot 16 - 1}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{4 \cdot 16 + 1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{63}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{65}\right)^{-2} = 63^2 - 65^2 =$$

$$= (63 - 65)(63 + 65) = -256.$$

Ответ: -256.

Пример 5. Найдём значение выражения $\frac{x^{-2}+3y^{-2}}{5x^{-2}+2y^{-2}}$, если $\frac{x}{y}=2^{-1}$.

Так как $\frac{x}{y}=2^{-1}$, то $y^{-2}\neq 0$. Разделив числитель и знаменатель дроби на y^{-2}, получим, что

$$\frac{x^{-2}+3y^{-2}}{5x^{-2}+2y^{-2}}=\frac{\frac{x^{-2}}{y^{-2}}+3}{5\cdot\frac{x^{-2}}{y^{-2}}+2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}+3}{5\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}+2}=\frac{(2^{-1})^{-2}+3}{5\cdot(2^{-1})^{-2}+2}=\frac{2^2+3}{5\cdot 2^2+2}=\frac{7}{22}.$$

Ответ: $\frac{7}{22}$.

612. Запишите без отрицательных показателей степеней:
а) $a^{-1}+b^{-1}$; б) $(a+b)^{-2}$; в) $(a^{-2}-b^{-2})^{-1}$; г) $(a+a^{-1})^{-1}$.

613. Вычислите:
а) $5^{-1}+10^{-1}$; б) $(0{,}5+1)^{-2}$; в) $(2^{-4}+4^{-2})^{-1}$;
г) $(2-2^{-1})^{-1}$; д) $3^{-1}+9^{-1}$; е) $(0{,}2+1)^{-1}$;
ж) $(4^{-2}-4^{-3})^{-1}$; з) $(3-3^{-1})^{-2}$.

614. **Доказываем.** Докажите, что верно равенство:
а) $(a^{-1}+b^{-1})^2=a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$;
б) $(a^{-1}-b^{-1})^2=a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$;
в) $(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})=a^{-2}-b^{-2}$;
г) $(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2})=a^{-3}-b^{-3}$;
д) $(a^{-1}+b^{-1})(a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2})=a^{-3}+b^{-3}$.

615. Упростите выражение:
а) $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}$; б) $\frac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}$; в) $\frac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-1}-b^{-1}}$; г) $\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}+b^{-2}}$.

616. При каких значениях a и b равно 0 выражение:
а) $\frac{(a+3)^2}{(a-3)^{-2}}-\frac{(a-3)^2}{(a+3)^{-2}}$; б) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^7-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-7}$?

617. Упростите выражение:
а) $\frac{a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}$; б) $\frac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}$;
в) $\left(\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)^5\cdot\left(\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)^{-5}$; г) $\left(\frac{a^2-a^{-2}}{a^2+a^{-2}}\right)^7:\left(\frac{a^2+a^{-2}}{a^2-a^{-2}}\right)^{-7}$;
д) $\dfrac{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$; е) $\dfrac{\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^3}-\frac{3}{a^2b}+\frac{3}{ab^2}-\frac{1}{b^3}}$.

618. Вычислите:

а) $\dfrac{2000^{-3}-1999^{-3}}{2000^{-2}+2000^{-1}\cdot 1999^{-1}+1999^{-2}}$; б) $\dfrac{1222^{-3}+777^{-3}}{1222^{-2}-1222^{-1}\cdot 777^{-1}+777^{-2}}$.

619. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\dfrac{2a}{1-a}}{1-\left(\dfrac{1-a}{2a}\right)^{-1}}$; б) $\dfrac{\dfrac{2a}{2-a}}{2-\left(\dfrac{2-a}{2a}\right)^{-1}}$;

в) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{3}{x}\right)^{-1}$; г) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}\right)^{-1}+\left(\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{4}{x}\right)^{-1}$.

620. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2a^{-2}}{3-a^{-2}}-\dfrac{2a^{-2}}{3+a^{-2}}$ и найдите его значение при $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$;

б) $\dfrac{2a^{-2}}{1-a^{-2}}+\dfrac{2a^{-2}}{1+a^{-2}}$ и найдите его значение при $a=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$;

в) $\left(\dfrac{a^{-2}}{2-a^{-2}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{a^{-2}}{2+a^{-2}}\right)^{-2}$ и найдите его значение при $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$;

г) $\left(\dfrac{2a^{-2}}{5-a^{-2}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{2a^{-2}}{5+a^{-2}}\right)^{-2}$ и найдите его значение при $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$.

621. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{3x^{-2}+2y^{-2}}{2x^{-2}+3y^{-2}}$, если $\dfrac{x}{y}=2^{-1}$; б) $\dfrac{3x^{-2}-2y^{-2}}{2x^{-2}-3y^{-2}}$, если $\dfrac{x}{y}=3^{-1}$.

Дополнения к главе 2

1. Делимость многочленов

Деление нацело. В § 7 частное многочлена A и ненулевого многочлена B названо алгебраической дробью. Здесь будет рассмотрен лишь случай, когда это частное может быть записано в виде многочлена на основании свойств алгебраических дробей.

Говорят, что многочлен A делится нацело на ненулевой многочлен B, если существует многочлен C, такой, что

$$A = B \cdot C. \tag{1}$$

Обычно здесь слово «нацело» для краткости опускают. Например, многочлен $A = a^2 + 2ab + b^2$ делится на ненулевой многочлен $B = a + b$, поскольку $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$.

В п. 5.6 равенство (1) названо разложением многочлена A в произведение двух многочленов B и C. Поэтому можно сказать и так: для того чтобы разделить нацело многочлен A на ненулевой многочлен B, надо разложить многочлен A в произведение двух многочленов, один из которых есть B, а другой и будет частным многочленов A и B.

Формулы сокращённого умножения дают примеры некоторых многочленов, которые делятся на ненулевые многочлены $a+b$ и $a-b$.

Например, многочлен $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ делится на ненулевой многочлен $a + b$, поскольку

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2).$$

Многочлен $a^2 - 2ab + b^2$ делится на ненулевой многочлен $a - b$, поскольку

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b).$$

Справедливо утверждение: при любом натуральном n многочлен $a^n - b^n$ делится на ненулевой многочлен $a - b$.

Действительно, если $n = 1$, то выполняется очевидное равенство

$$a - b = (a - b) \cdot 1.$$

Если $n = 2$ или $n = 3$, то выполняются равенства

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

доказанные в § 6.

Равенства

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3),$$
$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

легко доказать умножением многочленов, находящихся в правых частях этих равенств.

Вообще для любого натурального числа $n \geqslant 2$ можно доказать равенство

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \qquad (2)$$

Равенство (2) называют формулой разложения на множители многочлена $a^n - b^n$.

Покажем, что из равенства (2) для любого натурального числа n вытекает равенство

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}). \qquad (3)$$

Обозначим $c = -b$, тогда $b^{2n+1} = -c^{2n+1}$. Поэтому

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - c^{2n+1}.$$

Разложим правую часть этого равенства на множители с помощью равенства (2):

$$a^{2n+1} - c^{2n+1} = (a - c)(a^{2n} + a^{2n-1}c + \ldots + ac^{2n-1} + c^{2n}). \qquad (4)$$

Заменив в равенстве (4) c на $-b$, получим равенство (3).

Равенство (3) называют формулой разложения на множители многочлена $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

Заметим, что многочлен $a^{2n} + b^{2n}$, где n — данное натуральное число, не делится ни на $a + b$, ни на $a - b$.

Деление с остатком. Далее будем рассматривать лишь многочлены относительно x, т. е. многочлены вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — данные числа, называемые **коэффициентами многочлена**, коэффициент a_n называют **коэффициентом при старшем члене**, а коэффициент a_0 — **свободным членом**. Если $a_n \neq 0$, то **степенью многочлена** называют степень его старшего члена.

Например, коэффициенты многочлена $5x^3 + 4x^2 - 2x + 7$ равны 5, 4, −2, 7, коэффициент при старшем члене равен 5, свободный член равен 7, степень многочлена равна 3. Если все коэффициенты многочлена равны нулю, то этот многочлен есть нулевой многочлен (его степень не определяется).

Пусть даны два многочлена

$$A = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$B = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

относительно x, причём B — ненулевой многочлен степени m, т. е. $b_m \neq 0$.

Разделить многочлен A на многочлен B с остатком — значит найти многочлены Q и R, такие, что выполняется равенство $A = Q \cdot B + R$, причём либо степень многочлена R меньше степени многочлена B, либо R — нулевой многочлен. Многочлен Q называют неполным частным, многочлен R — остатком.

Если R есть нулевой многочлен, то многочлен A делится на ненулевой многочлен B нацело, и тогда многочлен Q называют частным.

Заметим, что многочлен нулевой степени есть отличное от нуля число. Любое отличное от нуля число можно рассматривать как делитель любого многочлена. Например, число $\frac{1}{7}$ есть делитель многочлена $x^2 + 2x + 3$, потому что

$$x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{7}(7x^2 + 14x + 21).$$

Деление с остатком многочлена A на ненулевой многочлен B обычно выполняют уголком.

Пример 1. Разделим многочлен $x^3 - 8$ на $x - 3$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 0x^2 + 0x - 8 & x - 3 \\
\cline{2-2}
-\underline{x^3 - 3x^2} \quad\quad\quad\;\; & x^2 + 3x + 9 \\
-\underline{\begin{matrix}3x^2 + 0x \\ 3x^2 - 9x\end{matrix}} \quad\;\; & \\
-\underline{\begin{matrix}9x - 8 \\ 9x - 27\end{matrix}} & \\
19 &
\end{array}$$

Итак, $x^3 - 8 = (x^2 + 3x + 9)(x - 3) + 19$. При делении многочлена $x^3 - 8$ на двучлен $x - 3$ получено неполное частное $x^2 + 3x + 9$ и остаток 19.

Пример 2. Разделим многочлен $x^3 - 8$ на $x - 2$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 0x^2 + 0x - 8 & x - 2 \\
\cline{2-2}
-\underline{x^3 - 2x^2} \quad\quad\quad\;\; & x^2 + 2x + 4 \\
-\underline{\begin{matrix}2x^2 + 0x \\ 2x^2 - 4x\end{matrix}} \quad\;\; & \\
-\underline{\begin{matrix}4x - 8 \\ 4x - 8\end{matrix}} & \\
0 &
\end{array}$$

Итак, $x^3 - 8 = (x^2 + 2x + 4)(x - 2)$. Многочлен $x^3 - 8$ разделился на $x - 2$ нацело, получено частное $x^2 + 2x + 4$ и остаток — нулевой многочлен — число нуль.

Пример 3. Определим, при каких целых n значение алгебраической дроби:

а) $\dfrac{6n + 7}{n}$; б) $\dfrac{6n + 7}{n + 1}$; в) $\dfrac{3n^2 + 3n + 2}{n + 1}$

является целым числом.

$$\begin{array}{r|l}
6n + 7 & n \\
\cline{2-2}
-\underline{6n \quad\;\;} & 6 \\
7 &
\end{array}$$

Решение: а) Разделив числитель дроби $\dfrac{6n + 7}{n}$ на её знаменатель, получим, что $\dfrac{6n + 7}{n} = 6 + \dfrac{7}{n}$. Число $6 + \dfrac{7}{n}$ является целым только тогда, когда $\dfrac{7}{n}$ целое, а это возможно, если число 7 делится на n. То есть только при $n = 1$, при $n = -1$, при $n = 7$ и при $n = -7$.

$$\begin{array}{r|l}
6n + 7 & n + 1 \\
\cline{2-2}
-\underline{6n + 6} & 6 \\
1 &
\end{array}$$

б) Разделив числитель дроби $\dfrac{6n + 7}{n + 1}$ на её знаменатель, получим, что $\dfrac{6n + 7}{n + 1} = 6 + \dfrac{1}{n + 1}$. Число

$6 + \frac{1}{n+1}$ является целым только тогда, когда $\frac{1}{n+1}$ целое, а это возможно, если число 1 делится на $n + 1$. То есть только при $n = 0$ и при $n = -2$.

в) Разделив числитель дроби $\frac{3n^2 + 3n + 2}{n+1}$ на её знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,3n^2 + 3n + 2 & n+1 \\ \underline{3n^2 + 3n} & \overline{3n} \\ 2 & \end{array},$$

получим, что

$$\frac{3n^2 + 3n + 2}{n+1} = 3n + \frac{2}{n+1}.$$

Число $3n + \frac{2}{n+1}$ является целым числом только тогда, когда $\frac{2}{n+1}$ целое, а это возможно, если число 2 делится на $n + 1$. То есть только при $n = 0$, при $n = -2$, при $n = 1$, при $n = -3$.

Алгоритм Евклида. Пусть даны два многочлена

$$A = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$B = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

относительно x, причём $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ и $n \geqslant m$. Наибольшим общим делителем многочленов A и B называют многочлен наибольшей степени $k \leqslant m$, на который делится и многочлен A, и многочлен B. Наибольший общий делитель многочленов A и B обозначают НОД(A, B). Запись НОД$(A, B) = 1$ означает также, что наибольший общий делитель многочленов A и B есть многочлен нулевой степени, т. е. любое действительное, отличное от нуля число.

Если A делится на B нацело, т. е. $A = Q \cdot B$, то НОД$(A, B) = B$. Если же A не делится на B нацело, то повторим рассуждения для многочленов A и B как при применении алгоритма Евклида для натуральных чисел a и b, заменяя a на A, b на B. Для этого разделим с остатком многочлен A на многочлен B:

$$A = Q_1 \cdot B + R_1,$$

где степень остатка R_1 меньше степени многочлена B (R_1 не может быть нулевым многочленом).

Теперь разделим с остатком B на R_1:

$$B = Q_2 \cdot R_1 + R_2,$$

где либо степень остатка R_2 меньше степени многочлена R_1, либо R_2 — нулевой многочлен. Если R_2 — нулевой многочлен, то НОД$(A, B) = R_1$. Если R_2 — ненулевой многочлен, то продолжим процесс последовательного деления многочленов с остатком. Этот процесс конечен, так как степени многочленов $R_1, R_2, \dots, R_{k-1}$ убывают. В результате деления на k-м шаге получим систему равенств

$$\begin{cases} A = Q_1 \cdot B + R_1, \\ B = Q_2 \cdot R_1 + R_2, \\ R_1 = Q_3 \cdot R_2 + R_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ R_{k-3} = Q_{k-1} \cdot R_{k-2} + R_{k-1}, \\ R_{k-2} = Q_k \cdot R_{k-1}. \end{cases} \qquad (5)$$

Просматривая цепочку равенств (5) снизу вверх, находим, что R_{k-1} является делителем многочленов A и B. Больше того, R_{k-1} есть наибольший общий делитель многочленов A и B, так как если просматривать цепочку равенств (5) сверху вниз, то окажется, что любой делитель A и B является делителем R_{k-1}. Следовательно, НОД$(A, B) = R_{k-1}$.

Проведённый процесс называется алгоритмом Евклида для многочленов, его используют для нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов. Рассмотрим пример использования алгоритма Евклида для многочленов.

Пример 4. Найдём наибольший общий делитель многочленов $A = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ и $B = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

Применим алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 + 3x^2 + 3x + 2 & x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\ \underline{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} & 1 \\ x^2 + x + 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & x^2 + x + 1 \\ \underline{x^3 + x^2 + x \phantom{{}+1}} & x + 1 \\ -\,x^2 + x + 1 & \\ \underline{x^2 + x + 1} & \\ 0 & \end{array}$$

Искомый наибольший общий делитель данных многочленов есть последний неравный нулевому многочлену остаток в алгоритме Евклида, т. е. НОД$(A, B) = x^2 + x + 1$.

Пример 5. Найдём наибольший общий делитель многочленов $A = x^2 - x - 3$ и $B = x + 1$.

Применим алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2 - x - 3 & x + 1 \\ \underline{x^2 + x \phantom{{}-3}} & x - 2 \\ -\,-2x - 3 & \\ \underline{-2x - 2} & \\ -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,x + 1 & -1 \\ \underline{x + 1} & -x - 1 \\ 0 & \end{array}$$

Мы получили НОД$(A, B) = -1$, но тогда наибольший общий делитель многочленов A и B есть любое действительное число. Принято писать, что НОД$(A, B) = 1$.

622. Доказываем. Докажите формулу разложения на множители для:

а) $a^5 - b^5$; б) $a^6 - b^6$; в) $a^5 + b^5$; г) $a^7 + b^7$.

623. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^3 - b^3}{a^4 - b^4}$; б) $\dfrac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$; в) $\dfrac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3}$;

г) $\dfrac{a^5 + b^5}{a^7 + b^7}$; д) $\dfrac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{a^4 - b^4}$; е) $\dfrac{a^5 + b^5}{a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4}$;

ж) $\dfrac{a^3 - 8}{a^4 - 16}$; з) $\dfrac{a^3 + 27}{a^2 - 3a + 9}$; и) $\dfrac{a^5 - 32}{a^3 - 8}$;

к) $\dfrac{a^5 + 32}{a^7 + 128}$; л) $\dfrac{a^3 + 2a^2 + 4a + 8}{a^4 - 16}$; м) $\dfrac{a^5 + 1}{a^4 - a^3 + a^2 - a + 1}$.

624. Сократима ли дробь: а) $\dfrac{a^{1999} + b^{1999}}{a^{1997} + b^{1997}}$; б) $\dfrac{a^{1999} - 1}{a^{1998} - 1}$?

625. Разделите с остатком многочлен:

а) $x^3 - 4x^2 + x + 6$ на $x + 1$; на $x - 2$; на $x - 3$;

б) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 6$ на $x^2 + x + 1$; на $x^2 + x - 1$; на $x + 2$;

в) $x^5 - 1$ на $x^4 + 1$; на $x^3 - 1$; на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

626. Найдите НОД(A, B), если:

а) $A = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $B = x^3 - 2x^2 + 1$;

б) $A = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $B = x^3 - 1$;

в) $A = x^5 - x^4 - x^3 + 2x^2 - x$, $B = x^5 - x^4 + x^3 - x$;

г) $A = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$, $B = x^2 - 4x + 3$.

627. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^3 - x^2 + x + 3}{x^2 - 2x + 3}$; б) $\dfrac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x^2 + 2x + 5}$;

в) $\dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$; г) $\dfrac{x^3 + 8}{x^3 - 4x^2 + 8x - 8}$.

628. Доказываем. Докажите, что дробь несократима:

а) $\dfrac{x^4 + 1}{x^3 + 1}$; б) $\dfrac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$.

629. Найдите многочлен A, для которого верно равенство:

а) $x^{12} - 1 = (x^4 - 1) \cdot A$; б) $x^{12} - 1 = (x^2 + 1) \cdot A$;

в) $x^{12} - 1 = (x^2 - 1) \cdot A$; г) $x^{12} - 1 = (x + 1) \cdot A$;

д) $x^{12} - 1 = (x - 1) \cdot A$; е) $x^5 - 32 = (x - 2) \cdot A$;

ж) $x^6 - 64 = (x - 2) \cdot A$; з) $x^7 - 128 = (x - 2) \cdot A$.

630. Исследуем. Определите, при каких целых n значение алгебраической дроби:

а) $\frac{5n+7}{n}$; б) $\frac{5n+7}{n+2}$; в) $\frac{3n^2-6n+1}{n-2}$;

г) $\frac{7n+5}{n}$; д) $\frac{7n+5}{n+1}$; е) $\frac{2n^2-6n+7}{n-3}$

является целым числом.

2. Исторические сведения

Долгое время алгебра была частью науки о числе — арифметики.

Среди различных задач, которые ставит жизнь, многие решаются одинаковыми способами. Используя вместо чисел буквы, математики научились решать такие задачи в общем виде. На этом пути и образовалась математическая наука — алгебра.

О связи арифметики и алгебры великий английский учёный И. Ньютон (1643—1727) писал так: «Все действия арифметики столь необходимы в алгебре, что они лишь совместно образуют полную науку вычислений».

Зачатки алгебры были известны в Вавилоне, Египте и Греции задолго до нашей эры. Сохранился папирус Ахмеса (ок. 1700 г. до н. э.) с решениями алгебраических задач.

В Средние века особенно активно алгебра развивалась в арабских странах и Средней Азии.

На протяжении многих веков развитие арифметики и алгебры сильно тормозилось из-за отсутствия удачных обозначений. Без них изложение математических работ было громоздким.

И. Ньютон

Только начиная с XVI столетия постепенно в математику начали вводить обозначения, которые оказались удобными для работы. Многие из них сохранились до наших дней. Важнейший вклад в разработку алгебраической символики внёс в конце XVI в. Ф. Виет (1540—1603). Однако его символика ещё была далека от современной. В этом легко убедиться, сравнив пример записи выражения в одной из работ Виета и его современную запись:

$$\frac{Din\left[\begin{array}{l} B\ cubum\ 2 \\ -D\ cubo \end{array}\right.}{\begin{array}{l} B\ cubo \\ +D\ cubo \end{array}} \qquad \frac{D\cdot(2\cdot B^3-D^3)}{B^3+D^3}$$

В книге «Всеобщая арифметика» И. Ньютон вводит алгебраические дроби так: «Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, обозначает частное, или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю. Так ... $\frac{a}{b}$ есть величина, возникающая при делении a на b ... Точно так же $\frac{ab - bb}{a + x}$ означает величину, получающуюся при делении $ab - bb$ на $a + x$ и т. д. Величины такого рода называются дробями».

Символы a^2, a^3, a^4 и т. д. впервые встречаются у французского учёного Р. Декарта (1596—1650). Символ a^n для произвольного n предложил И. Ньютон.

Мы уже отмечали, что в XVIII в. в России большое влияние на распространение математических знаний оказала «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, содержавшая в себе, кроме арифметики, необходимые для практических приложений сведения из алгебры, тригонометрии, геометрии, астрономии и навигации. В частности, в ней изложены правила действий над многочленами, правила решения линейных уравнений и т. д. В правом нижнем углу титульного листа «Арифметики» Л. Ф. Магницкого изображён Архимед, опирающийся на доску с надписью:

$$\begin{array}{l} 2R + 1 \\ \underline{3R \div 2} \\ 6q + 3R \\ \underline{\quad\ \div 4R \div 2} \\ 6q \div 1R \div 2 \end{array}$$

Это запись примера на умножение многочленов столбиком. Буквой R (от лат. *Radix* — корень) обозначено неизвестное число, буквой q — квадрат неизвестного, знак $\div$ был знаком вычитания. В современных обозначениях то же действие можно записать так:

$$\begin{array}{l} \times\, 2x + 1 \\ \quad \underline{3x - 2} \\ 6x^2 + 3x \\ \underline{\qquad -4x - 2} \\ 6x^2 - 1x - 2 \end{array}$$

Как видно из приведённых примеров, алгебраическая символика, которой, возможно, первым пользовался Диофант в III в., совершенствовалась и после «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.

С возведением двучлена $(a + b)$ в натуральную степень связан треугольник Паскаля. Если записать в нулевой строке число 1, в первой — числа 1 и 1, во второй — числа 1, 2 и 1 и т. д. так, чтобы в каждой строке по краям стояли числа 1, а каждое число в стро-

Б. Паскаль

ке (кроме крайних) было равно сумме двух расположенных над ним чисел, то получится запись:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Продолжать треугольник можно бесконечно.

Эту запись называют арифметическим треугольником или треугольником Паскаля по имени французского учёного Блеза Паскаля (1623—1662).

Нетрудно убедиться, что числа первой, второй, третьей и т. д. строк являются коэффициентами в записи первой, второй, третьей и т. д. степени двучлена $(a + b)$ в стандартном виде:

$(a + b)^1 = a + b,$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ...

631. **Исследуем.** а) С помощью треугольника Паскаля запишите в стандартном виде шестую и седьмую степень двучлена $(a + b)$.

б) Убедитесь, что сумма чисел n-й строки треугольника Паскаля равна 2^n. Выполните проверку от $n = 1$ до $n = 10$.

632. **Ищем информацию.** а) Используя справочную литературу и Интернет, выясните, когда и у каких народов появились первые упоминания об арифметическом треугольнике и как он называется в Иране, в Китае. Какими ещё свойствами обладают числа треугольника Паскаля?

б) Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение об И. Ньютоне и о задачах его «Всеобщей арифметики».

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При изучении главы 3 вам предстоит более подробно освоить знакомые по предыдущим годам обучения линейные уравнения с одним неизвестным, а также новые объекты — уравнения первой степени с двумя неизвестными и системы линейных уравнений. Вы научитесь применять линейные уравнения и их системы к решению текстовых задач.

§ 9. Линейные уравнения с одним неизвестным

9.1. Уравнения первой степени с одним неизвестным

Следующие уравнения

$$5x - 3 = 0, \quad -2x - 7 = 0, \quad x + 5 = 0, \quad 3x = 0$$

могут служить примерами уравнений первой степени с одним неизвестным x.

Выражение, записанное в уравнении слева от знака равенства, называют **левой частью уравнения**, а выражение, записанное справа, — **правой частью уравнения**.

Теперь можно сказать, что уравнением первой степени с одним неизвестным x называют уравнение, левая часть которого есть многочлен стандартного вида первой степени относительно x, а правая — нуль.

Общий вид уравнения первой степени с одним неизвестным x таков:

$$kx + b = 0 \quad (k \neq 0),$$

где k и b — данные числа. Число k называют **коэффициентом при неизвестном в этом уравнении**, а число b — **свободным членом этого уравнения**.

Так, в уравнении

$$5x - 3 = 0$$

5 — коэффициент при неизвестном, а (−3) — свободный член, в уравнении

$$3x = 0$$

3 — коэффициент при неизвестном, а 0 — свободный член.

Корнем (или решением) уравнения называют такое число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни.

Чтобы решить уравнение первой степени

$$kx + b = 0 \quad (k \neq 0), \tag{1}$$

будем рассуждать так.

Предположим, что число x_0 есть корень уравнения (1).

Подставляя его в это уравнение, получим верное числовое равенство

$$kx_0 + b = 0. \tag{2}$$

Перенеся число b с противоположным знаком в правую часть равенства (2), получим верное числовое равенство

$$kx_0 = -b. \tag{3}$$

Разделив обе части равенства (3) на k ($k \neq 0$), получим, что

$$x_0 = -\frac{b}{k}.$$

Следовательно, равенство (2) справедливо для $x_0 = -\frac{b}{k}$.

Мы показали, что если x_0 — корень уравнения (1), то он равен числу $-\frac{b}{k}$.

Теперь надо проверить, что число $-\frac{b}{k}$ — действительно корень уравнения (1). Для этого подставим $-\frac{b}{k}$ в уравнение (1) и получим верное равенство

$$k\left(-\frac{b}{k}\right) + b = 0.$$

Тем самым мы доказали, что уравнение (1) имеет единственный корень

$$x_0 = -\frac{b}{k}.$$

Итак, для того чтобы решить уравнение (1), надо:

1) перенести свободный член b этого уравнения в правую часть, изменив при этом знак у числа b на противоположный;

2) разделить обе части полученного уравнения на коэффициент k ($k \neq 0$) при неизвестном.

Тогда число, полученное в правой части последнего уравнения, и есть единственный корень уравнения (1).

633. а) Что называют корнем уравнения с одним неизвестным?
б) Что значит решить уравнение?
в) Какое уравнение называют уравнением первой степени с одним неизвестным? Приведите примеры.
г) Сколько корней имеет уравнение первой степени с одним неизвестным?

634. В уравнении $-3x + 5 = 0$ назовите: свободный член; коэффициент при неизвестном.

635. а) Каков общий вид уравнения первой степени с неизвестным x?
б) Напишите три уравнения первой степени с одним неизвестным.

636. Является ли данное уравнение уравнением первой степени с одним неизвестным:

а) $4x - 2 = 0$; б) $6x = 0$; в) $3 + 7x = 0$;
г) $0 \cdot x = 0$; д) $-21 + 4x = 0$; е) $\frac{5}{3}x - \frac{8}{7} = 0$;
ж) $(4,7 - 4 - 0,7)x - 1 = 0$; з) $0 \cdot x - 6 = 0$; и) $0 = 7x - 2$?

637. Составьте уравнение первой степени с одним неизвестным x, если:

а) $k = -3$, $b = 5$; б) $k = 2$, $b = 0$;
в) $k = -1\frac{1}{4}$, $b = 7$; г) $k = \frac{1}{2}$, $b = -10$;
д) $k = 30$, $b = -20$; е) $b = 7\frac{1}{2}$, $k = -8$;
ж) $k = 0,(3)$, $b = 0$; з) $b = -7,5$, $k = 4$.

638. Какое из чисел 3; 0; −1 является корнем уравнения $2x + 2 = 0$?

639. Является ли число $\frac{1}{2}$ корнем уравнения:

а) $5x - 8 = 0$; б) $4x - 8 = 0$; в) $8x - 4 = 0$;
г) $1,3x - 0,65 = 0$; д) $7\frac{1}{4}x - 3,5 = 0$; е) $\frac{1}{2}x = 0$?

640. Решите уравнение:

а) $3x - 7 = 0$; б) $5x = 0$; в) $-8x - 10 = 0$; г) $4x + 15 = 0$.

641. Число $k \neq 0$. Решите уравнение:

а) $kx - 10 = 0$; б) $kx + 23 = 0$; в) $kx + a = 0$; г) $kx - b = 0$.

9.2. Линейные уравнения с одним неизвестным

Следующие уравнения

$$7x + 9 = 0,$$
$$3x - 5 + 2x - 1 = 2,$$
$$4x - 3 = 3x - 4,$$
$$0 = 2x - 7 - x - 1,$$
$$6x - 3 + 2x = 3x - 4 - x + 1$$

являются примерами линейных уравнений с одним неизвестным x.

Линейным уравнением с одним неизвестным x называют уравнение, левая и правая части которого есть многочлены степени не выше первой относительно x или числа. Члены многочленов, находящихся в левой и правой частях уравнения, называют **членами уравнения**.

Уравнение $kx + b = 0$, где k и b — любые данные числа, есть линейное уравнение как при k, отличном от нуля, так и при k, равном нулю. При k, отличном от нуля, оно, как отмечалось выше, называется также уравнением первой степени.

Таким образом, уравнение первой степени с одним неизвестным x есть частный случай линейного уравнения с одним неизвестным x.

Рассмотрим линейное уравнение

$$kx + b = 0, \tag{1}$$

где k и b — данные числа.

Как показано в предыдущем пункте, уравнение (1) при $k \neq 0$ имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{k}$. В случае $k = 0$ уравнение (1) имеет вид

$$0 \cdot x + b = 0.$$

В этом случае, если $b \neq 0$, то уравнение (1) не имеет корней, а если $b = 0$, то любое действительное число является корнем уравнения (1).

Итак, линейное уравнение (1):

1) при $k \neq 0$ имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{k}$,

2) при $k = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней,

3) при $k = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней — любое действительное число является его корнем.

Два уравнения называют **равносильными**, если любой корень первого уравнения является корнем второго, а любой корень второго является корнем первого.

Если уравнения не имеют корней, то их также называют равносильными.

Например, уравнения $2x = 4$ и $3x = 6$ равносильны, так как оба имеют по единственному корню $x_0 = 2$; уравнения $0x = 4$ и $0x = 6$ тоже равносильны, так как оба не имеют корней.

Отметим три утверждения:

1. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное исходному.

Например, умножив левую и правую части уравнения

$$x - 1 = 2x - \frac{1}{7} \qquad (2)$$

на 7, получим уравнение

$$7x - 7 = 14x - 1, \qquad (3)$$

равносильное исходному. Потому что если число x_0 есть корень уравнения (2), то выполняется числовое равенство

$$x_0 - 1 = 2x_0 - \frac{1}{7}. \qquad (4)$$

Умножив его на 7, получим, что выполняется числовое равенство

$$7x_0 - 7 = 14x_0 - 1, \qquad (5)$$

показывающее, что x_0 есть корень уравнения (3).

Если же x_0 есть корень уравнения (3), то справедливо числовое равенство (5). Разделив его на 7, получим, что справедливо числовое равенство (4), показывающее, что x_0 есть корень уравнения (2).

Вместо того чтобы говорить: умножим левую и правую части уравнения на число k, говорят: умножим обе части уравнения на число k.

2. Если перенести член уравнения с противоположным знаком из одной части уравнения в другую, то получим уравнение, равносильное исходному.

Например, уравнения

$$3 - 2x = 5x + 3 \qquad (6)$$

и

$$3 = 5x + 3 + 2x \qquad (7)$$

равносильны.

Чтобы получить уравнение (7), мы перенесли с противоположным знаком член $-2x$ уравнения (6) из левой его части в правую.

Говорят: перенесём член данного уравнения из одной его части в другую, подразумевая, что переносимый член надо взять с противоположным знаком.

3. Если в левой или правой части уравнения привести подобные члены, то получим уравнение, равносильное исходному.

Например, уравнения

$$x + x + 2 - 1 = 0 \text{ и } 2x + 1 = 0$$

равносильны.

Справедливость утверждений 2 и 3 показывается так же, как справедливость утверждения 1.

642. а) Какое уравнение называют линейным уравнением с одним неизвестным? Приведите примеры линейных уравнений.
б) Является ли уравнение первой степени линейным уравнением?
в) Что называют членами линейного уравнения?
г) Какие уравнения называют равносильными? Приведите примеры равносильных уравнений.
д) Какие утверждения о равносильности линейных уравнений вам известны?

643. Для каких значений k и b линейное уравнение $kx + b = 0$:
а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечно много решений?

644. Является ли данное уравнение линейным уравнением с одним неизвестным x:
а) $2x - 5 = 3x - 4$;
б) $0{,}5x - 7{,}3 = -4x + 6$;
в) $0 \cdot x = 0$;
г) $x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + 2x - 3$;
д) $-10 = 5x - 4$;
е) $x^2 + 3x - 5 = 0$;
ж) $x + y - 4 = 0$?

645. Напишите два линейных уравнения с одним неизвестным.

646. Какие из чисел 5; 2,3; –8; 7 являются корнями уравнения $7x + 56 = -2x - 16$?

647. Равносильны ли уравнения:
а) $2x + 3 = 0$ и $2x = -3$;
б) $3x - 7 = 4x - 3$ и $0 = (4x - 3) - (3x - 7)$;
в) $-3x - 7 = 0$ и $3x + 7 = 0$;
г) $-2x + 3 = 0$ и $2x + 3 = 0$;
д) $3x - 7 + 2x - 3 = x$ и $4x - 10 = 0$;
е) $7x - 5 = 7x + 5$ и $0x + 1 = 0$?

9.3. Решение линейных уравнений с одним неизвестным

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение

$$3x - 5 + 2x - 1 = 0. \quad (1)$$

Приведя подобные члены в левой части этого уравнения, получим уравнение

$$5x - 6 = 0, \quad (2)$$

которое равносильно уравнению (1). Уравнение (2) имеет единственный корень: $x_0 = \frac{6}{5}$.

Следовательно, и уравнение (1) имеет тот же самый единственный корень: $x_0 = \frac{6}{5}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$2x + 8 = 2x + 6. \quad (3)$$

Перенеся члены правой части этого уравнения в левую, получим уравнение $2x + 8 - 2x - 6 = 0$, равносильное уравнению (3).

Приведя подобные члены, получим линейное уравнение

$$0x + 2 = 0, \quad (4)$$

равносильное уравнению (3).

Уравнение (4) не имеет корней — нет числа x_0, которое удовлетворяло бы этому уравнению. Следовательно, и уравнение (3) не имеет корней.

Пример 3. Решим уравнение

$$2x + 1 = 3x + 1 - x. \quad (5)$$

Перенеся члены его правой части в левую и приведя подобные члены, получим линейное уравнение

$$0x + 0 = 0, \quad (6)$$

равносильное уравнению (5).

Уравнение (6) обращается в верное числовое равенство при любом числовом значении x. Следовательно, уравнение (5) имеет бесконечно много корней: любое действительное число есть корень уравнения (5).

Рассуждения, аналогичные проведённым выше, можно провести при решении любого линейного уравнения.

Итак, для того чтобы решить линейное уравнение, надо перенести все члены его правой части в левую, затем привести подобные члены; в результате получится:

1) либо уравнение первой степени, которое имеет единственный корень;

2) либо линейное уравнение $0x + 0 = 0$, показывающее, что любое действительное число есть корень исходного уравнения;

3) либо линейное уравнение $0 \cdot x + b = 0$ ($b \neq 0$), показывающее, что исходное уравнение не имеет корней.

В этом параграфе, наряду с линейными, будут рассмотрены уравнения, приводящиеся к линейным при помощи правил раскрытия скобок или умножения числа на многочлен. При этом слагаемые вида $\frac{1}{m} \cdot (kx + l)$ могут быть записаны в виде $\frac{k}{m} \cdot x + \frac{l}{m}$, где k, l и m ($m \neq 0$) — данные числа.

Пример 4. Решим уравнение

$$x - (x + 2(x - 1)) = 4. \tag{7}$$

Применяя правило умножения числа на многочлен, перепишем уравнение (7) в виде

$$x - (x + 2x - 2) = 4. \tag{8}$$

Применяя правило раскрытия скобок, перепишем уравнение (8) в виде

$$x - x - 2x + 2 = 4. \tag{9}$$

Перенеся число 2 с противоположным знаком в правую часть уравнения и приведя подобные члены в обеих частях уравнения, получим уравнение

$$-2x = 2, \tag{10}$$

имеющее единственный корень $x_0 = -1$.

Следовательно, и равносильное уравнению (10) уравнение (7) имеет тот же единственный корень $x_0 = -1$.

Пример 5. Решим уравнение

$$\frac{5x - 7}{2} - \frac{3x + 1}{3} = \frac{x + 17}{6}. \tag{11}$$

Умножив уравнение (11) на число 6, получим уравнение

$$3(5x - 7) - 2(3x + 1) = x + 17, \tag{12}$$

равносильное уравнению (11). Применяя правило умножения числа на многочлен, перепишем уравнение (12) в виде

$$15x - 21 - 6x - 2 = x + 17. \tag{13}$$

Перенеся все члены с x в левую часть, а без x в правую часть уравнения (с противоположными знаками) и приведя подобные члены в обеих частях уравнения, получим уравнение

$$8x = 40, \tag{14}$$

имеющее единственный корень $x_0 = 5$.

Следовательно, и равносильное уравнению (14) уравнение (11) имеет тот же единственный корень $x_0 = 5$.

648. а) Может ли линейное уравнение с одним неизвестным не иметь корней? Приведите примеры.
б) Может ли линейное уравнение с одним неизвестным иметь единственный корень? Приведите примеры.
в) Может ли линейное уравнение с одним неизвестным иметь бесконечно много корней? Приведите примеры.

Решите уравнение (649—657):

649. а) $x + 4 = 9$; б) $x + 5 = 5$; в) $x - 8 = 8$;
г) $x + 2 = -4$; д) $7x = 10$; е) $5x = 1$;
ж) $\frac{1}{3}x = 2$; з) $3x = \frac{1}{7}$; и) $12x = 0$;
к) $-3x = 0$; л) $-x = 0$; м) $-\frac{1}{2}x = 0$.

650. а) $-\frac{3}{4}x = -\frac{6}{7}$; б) $-2\frac{1}{3}x = 7$; в) $0{,}2 = 5x$;
г) $1{,}8x = -0{,}72$; д) $1\frac{2}{3}x = 2\frac{1}{3}$; е) $3{,}5x = 2\frac{1}{3}$;
ж) $\frac{x}{5} = 4$; з) $\frac{x}{3} = 4$.

651. а) $3x - 5 = 0$; б) $7x - 4 = 0$; в) $7 - x = 0$;
г) $5 - x = 0$; д) $18 - 10x = 0$; е) $15 - 7x = 0$;
ж) $x - 2x + 3 = 7$; з) $2x - 4x - 1 = 2$; и) $3x - 5 = x$;
к) $4x - 2 = x$; л) $x - 3 = 2x + 1$; м) $3x + 2 = 5x - 7$.

652. а) $7x - 3 + x = 4x - 9 + 5x$; б) $x + 5 - 8x = 7 + 2x - 4$;
в) $x + 0{,}2 = 0{,}4x + 3{,}2$; г) $0{,}5x - 3 = 0{,}8 - 1{,}4x$;
д) $\frac{2}{3} - 3x = \frac{1}{2}x - 2 + x$; е) $5 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x$;
ж) $\frac{2x}{7} - \frac{x}{4} = 1$; з) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 6$.

653. а) $0 \cdot x = 3$; б) $0 \cdot x = -2$;
в) $0 \cdot x = 0$; г) $3x - 3x = 0$;
д) $3x + (2x - 1) = 10$; е) $5x - (3x - 1) = 3$;
ж) $(3x - 2) - (x - 1) = 10$; з) $7 - (2x - 3) = x - (2 - 4x)$;
и) $12x + 4 = 3(4x - 2)$; к) $5 - 3(x + 5) = 7 - (2 + 3x)$;
л) $-x + 3 + x = x - (x - 3)$; м) $5x - 4 + 2x = 7(x - 3)$;
н) $6(x - 3) = 12$; о) $14 = 7(x + 2)$;
п) $2(x - 1) - 4 = 6(x + 2)$; р) $3(x + 1) - 9 = 6(x - 2)$.

654. а) $3x - 5 = \frac{x + 3}{4}$; б) $\frac{2 - x}{3} = x - 3$;
в) $\frac{x - 3}{5} + \frac{x + 2}{4} = \frac{1}{2}$; г) $\frac{2x - 3}{4} + \frac{x + 2}{2} = 6 + \frac{2x - 3}{2}$.

655. а) $x + 3 = 2x - 4$; б) $2x - 4 = 7x + 2$;
в) $x + 4 = x + 2$; г) $2x - 6 = 3x$;
д) $5x = 6x$; е) $2x + 5 - 7x + 2 = 3$;
ж) $3x - 5 = -2x + 7 + 5x - 12$;
з) $x - 1 + 3x - 5 = (x - 5) - (x - 3) + (x + 1)$.

656. а) $7x + 2 - 3x + 10 = 0$;
б) $5x - 8 - (3x - 8) = 0$;
в) $3x - 1 - (2x + 5 - x) = 0$;
г) $1{,}52 - 2{,}8x - (1{,}72 - 5{,}2x) = 0$;
д) $5x + 7 - 2x - (3 - 2x + x) = 0$;
е) $7 - 0{,}2x - (21{,}28 - 1{,}6) = 0$;
ж) $\frac{1}{2}x - 3 - \left(2 - \frac{1}{3}x\right) = 0$;
з) $1\frac{1}{5} - 0{,}5x - 0{,}4 + \frac{2}{5}x = 0$.

657. а) $x - 2(x - 3(x - 4)) = 1$; б) $5x - 4(x - 3(x - 2)) = 2$;
в) $3x - 2(x - 2(x - 3)) = 3$; г) $4x - 4(3x - 3(2x - 2)) = -24$;
д) $x - 2(x - 3(x - 4(x - 5))) = 6$;
е) $5x - 4(x - 3(x - 2(x - 1))) = 2$;
ж) $x - (x - (x - (x - 1))) = 1 - (2 - (3 - (4 - x)))$;
з) $4x - (3x - (2x - (x - 1) - 2) - 3) - 4 = 0$.

9.4. Решение задач с помощью линейных уравнений

Рассмотрим решение старинной задачи.

Задача 1. Летела стая гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» А вожак ему и отвечает: «Нет, нас не сто гусей! Вот если бы нас было столько, ещё столько, да ещё полстолько, да ещё четверть столько, да ты, гусь, то было бы сто гусей. Вот и рассчитай-ка, сколько нас».

Решение. В задаче надо узнать, сколько гусей в стае.

Обозначим это количество через x. Вожак сказал, что если бы гусей было:

ещё столько же, т. е. ещё x;

ещё полстолько же, т. е. ещё $\frac{1}{2}x$;

ещё четверть столько же, т. е. ещё $\frac{1}{4}x$;

да ещё один гусь,

т. е. вожак сказал, что если бы гусей было:

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1,$$

то их было бы сто.

Следовательно, $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$.

Получилось линейное уравнение с одним неизвестным.

Решив это уравнение, найдём его единственный корень: $x_0 = 36$, а это означает, что в стае было 36 гусей.

Ответ: 36 гусей.

Задача 2. Отцу 50 лет, а сыну 20. Сколько лет тому назад отец был в 3 раза старше сына?

Решение. Обозначим искомое количество лет через x, тогда x лет назад отцу было $(50 - x)$ лет, а сыну — $(20 - x)$ лет. Так как в то время отец был в 3 раза старше сына, то

$$50 - x = 3(20 - x).$$

Получилось линейное уравнение с одним неизвестным. Решив его, найдём его единственный корень: $x_0 = 5$.

Следовательно, пять лет назад отец был старше сына в 3 раза.

Ответ: 5 лет назад.

658. Найдите два числа, сумма которых равна 86 и одно число на 12 больше другого.

659. а) В трёх школах 3230 учащихся. Во второй школе на 420 учащихся больше, чем в первой, а в третьей — на 350 учащихся больше, чем в первой. Сколько учащихся в каждой школе?

б) На трёх полках 276 книг. Сколько книг на каждой полке, если на второй полке на 16 книг больше, чем на первой, а на третьей — в два раза больше книг, чем на первой?

в) Периметр треугольника равен 70 см. Определите стороны треугольника, если первая сторона в три раза больше второй и на 7 см больше третьей стороны.

г) В трёх цехах завода работают 2400 человек. В первом цехе вдвое больше рабочих, чем во втором, а в третьем — на 200 рабочих меньше, чем во втором. Сколько рабочих в каждом цехе?

660. а) За 2 кг яблок и 1 кг слив заплатили 180 р. Сколько стоит один килограмм яблок и один килограмм слив, если килограмм яблок на 15 р. дороже килограмма слив?

б) От одного города до другого пассажирский поезд идёт 4 ч, а машина — 5 ч. Какова скорость поезда, если скорость машины меньше на 10 км/ч?

661. Надо разменять 100 р. монетами по 2 р. и 5 р. так, чтобы всех монет было 26. Сколько должно быть монет по 2 р.?

662. На путь по течению реки пароход затратил 3 ч, а на обратный путь — 5 ч. Скорость течения 5 км/ч. Какова скорость парохода в стоячей воде?

663. а) На рыбалке отец с сыном поймали 15 рыбок. Сколько поймал сын, если отец поймал больше сына на 3 рыбки?
б) Масса ведра с водой 10 кг. Какова масса ведра, если известно, что оно на 9 кг легче воды в нём?

664. а) Периметр прямоугольника равен 20 см. Найдите его длину и ширину, если длина на 8 см больше ширины.
б) Периметр прямоугольника равен 20 см. Длина в 5 раз больше ширины. Найдите длину и ширину этого прямоугольника.
в) Найдите длину и ширину прямоугольника, если известно, что ширина на 1 см меньше длины, а периметр равен 20 см.

665. а) Сумма двух последовательных чётных чисел равна 38. Найдите эти числа.
б) Сумма трёх последовательных чётных чисел равна 18. Найдите эти числа.
в) Сумма двух последовательных нечётных чисел равна 24. Найдите эти числа.
г) Сумма трёх последовательных нечётных чисел равна 21. Найдите эти числа.

666. а) Груз массой 6,5 т перевозили на трёх грузовиках. На первом и втором грузовиках вместе было на 0,1 т больше, чем на третьем, а на первом — на 1,5 т больше, чем на втором. Сколько тонн груза было на каждом грузовике в отдельности?
б) На трёх полках стоят книги. На первой — на 4 книги меньше, чем на второй, а на третьей — в два раза меньше, чем на первой и второй вместе. Сколько книг стоит на каждой полке, если их всего 96?

§ 10. Системы линейных уравнений

10.1. Уравнения первой степени с двумя неизвестными

Уравнение

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

где a, b, c — данные числа и хотя бы одно из чисел a или b отлично от нуля, а x и y — неизвестные, называют **уравнением первой степени с двумя неизвестными** x и y.

Это название связано с тем, что левая часть уравнения (1) есть многочлен стандартного вида первой степени относительно x и y.

Числа a и b называют **коэффициентами при неизвестных**, число a — коэффициентом при x, а число b — коэффициентом при y.

Выражения

$$ax,\ by,\ c$$

называют **членами уравнения** (1). При этом число c называют **свободным членом**.

Пару чисел $(x_0; y_0)$ называют **решением уравнения** (1), если эти числа удовлетворяют уравнению (1), т. е. если при подстановке x_0 вместо x и y_0 вместо y уравнение превращается в верное числовое равенство

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Примером уравнения первой степени с двумя неизвестными может служить уравнение

$$2x - 3y + 3 = 0. \qquad (2)$$

В нём $a = 2$, $b = -3$, $c = 3$, пара чисел (0; 1) есть решение уравнения (2). Но легко видеть, что уравнение (2) имеет бесконечно много решений. В самом деле, если вместо x подставить в уравнение (2) любое число x_0, то получим уравнение первой степени с одним неизвестным y. Решив его, найдём некоторое число y_0, которое вместе с заданным числом x_0 образует пару чисел $(x_0; y_0)$ — решение уравнения (2).

Полагая, например, $x_0 = 1$, получим уравнение с одним неизвестным y:

$$2 \cdot 1 - 3y + 3 = 0.$$

Его решение $y_0 = \frac{5}{3}$. Следовательно, пара чисел $\left(1; \frac{5}{3}\right)$ есть решение уравнения (2).

Если любое число x_0 подставить в уравнение (2) и решить полученное уравнение первой степени относительно y:

$$-3y = -2x_0 - 3,$$

$$y = \frac{-2x_0}{-3} + \frac{-3}{-3},$$

то получим

$$y = \frac{2}{3}x_0 + 1. \qquad (3)$$

Следовательно, каждому числу x_0 соответствует решение $(x_0; y_0)$ уравнения (2), где y_0 находится по данному x_0 по формуле (3). Например, если $x_0 = 0$, то из формулы (3) следует, что $y_0 = 1$, и пара чисел (0; 1) есть решение уравнения (2). Если же $x_0 = 3$, то из формулы (3) следует, что $y_0 = 3$, и пара чисел (3; 3) есть решение уравнения (2) и т. д.

Можно ещё сказать, что любое решение уравнения (2) есть пара чисел $\left(x_0; \frac{2}{3}x_0 + 1\right)$, где x_0 — любое число.

Вообще, любое уравнение вида

$$ax + by + c = 0 \qquad (4)$$

с коэффициентом b, не равным нулю, имеет бесконечно много решений, потому что его можно решить относительно y при любом заданном числовом значении x_0, и тогда полученное число $y_0 = \frac{-c - ax_0}{b}$ вместе с заданным числом x_0 образуют пару чисел $(x_0; y_0)$ — решение уравнения (4).

Так как чисел x_0 бесконечно много, то и решений уравнения (4) бесконечно много.

Выразить y через x из заданного уравнения с двумя неизвестными x и y — значит решить это уравнение относительно y при любом заданном значении x.

Пример. Выразим из уравнения

$$2x - 5y + 2 = 0 \tag{5}$$

y через x и запишем все решения этого уравнения.

Решение. Зададим произвольное число x. Подставим его в уравнение (5) и найдём из полученного уравнения y:

$$2x + 2 = 5y,$$
$$5y = 2x + 2,$$
$$y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}. \tag{6}$$

Формула (6) выражает y через x из уравнения (5). Все решения уравнения (5) записываются в виде $\left(x; \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}\right)$, где x — любое число.

Аналогично рассуждая, получим, что любое уравнение вида (4) с коэффициентом a, не равным нулю, имеет бесконечно много решений. Все решения записываются в виде $\left(\frac{-c - by}{a}; y\right)$, где y — любое число.

667. а) Какое уравнение называют уравнением первой степени с двумя неизвестными? Приведите примеры.
б) Что называют решением уравнения первой степени с двумя неизвестными? Приведите примеры.

668. Назовите члены уравнения $5x - 2y + 3 = 0$, коэффициенты при x и y, свободный член.

669. Является ли данное уравнение уравнением первой степени с двумя неизвестными (если да, то назовите коэффициенты при неизвестных и свободный член):
а) $3x - y + 5 = 0$; б) $2x - 5y - 1 = 0$;
в) $2x + 3y - 1 = 0$; г) $0 \cdot x - 5y - 4 = 0$;
д) $5x - 4 = 0$; е) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$;
ж) $2y - 3x + 4 = 0$; з) $x - 0 \cdot y - 3 = 0$?

670. Составьте уравнение первой степени с двумя неизвестными по данным a, b и c:
а) $a = 5$, $b = 4$, $c = -2$; б) $a = 0$, $b = -3$, $c = 4$;
в) $a = 0$, $b = 2$, $c = -1$; г) $a = -5$, $b = -1$, $c = 0$.

671. Напишите три уравнения первой степени с двумя неизвестными.

672. Покажите, что пары чисел $(1; -1)$, $(5; -7)$, $(-3; 5)$ являются решениями уравнения $3x + 2y - 1 = 0$.

673. Является ли решением уравнения $2x - y + 4 = 0$ пара чисел:
а) $(1; -2)$; б) $(0; 4)$; в) $(-2; 1)$; г) $(3; 4)$; д) $(5; 0)$; е) $(-2; 0)$?

674. Является ли пара чисел $(1; 3)$ решением уравнения:
а) $2x - 3y + 5 = 0$; б) $-x + y - 2 = 0$;
в) $x - y - 6 = 0$; г) $7x - 3{,}2y + 4 = 0$;
д) $x + 2y - 7 = 0$; е) $0 \cdot x - 7y + 21 = 0$?

675. Найдите три решения уравнения:
а) $x + y - 5 = 0$; б) $y - 5 = 0$;
в) $2x - y + 2 = 0$; г) $x + 3 = 0$.

Выразите y через x из уравнения (676—677):

676. а) $x + y = 5$; б) $2x - y = 3$;
в) $-3x + 2y = 7$; г) $3x - 5y = 8$;
д) $-3{,}5x + 2y = 0{,}2$; е) $x - 0{,}3y = 0{,}2$.

677. а) $4x - y + 3 = 0$; б) $x - 3y + 6 = 0$;
в) $3x + y - 2 = 0$; г) $5x - 7y - 3 = 0$;
д) $4x - 2y + 8 = 0$; е) $0{,}5x - 2y + 0{,}6 = 0$;
ж) $\frac{1}{3}x - 0{,}2y + 1 = 0$; з) $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} - 2 = 0$.

678. Выразите x через y из уравнения:
а) $x - 3y + 2 = 0$; б) $3x + 2y - 5 = 0$;
в) $-x + 2y - 3 = 0$; г) $-5x - y + 7 = 0$;
д) $2x - y + 4 = 0$; е) $2x - \frac{1}{2}y - 4 = 0$;
ж) $2x - 0{,}3y - 1 = 0$; з) $\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}y + 4 = 0$.

679. Запишите какое-либо решение уравнения:
а) $4x - y - 2 = 0$; б) $3x + 2y - 7 = 0$;
в) $x - 2y + 4 = 0$; г) $5x - 3y - 2 = 0$.

680. Составьте уравнение первой степени с двумя неизвестными из условия:
а) сумма двух чисел равна 10;
б) 2 л молока и 3 батона хлеба стоят 99 р.;
в) ручка дороже карандаша на 7 р.;
г) 1 кг кофе дороже 3 кг конфет на 57 р.

681. **Исследуем.** а) При каком a пара чисел $(3; -2)$ является решением уравнения $3x - ay - 4 = 0$?
б) При каком b пара чисел $(-1; -4)$ является решением уравнения $bx - 7y - 3 = 0$?

682. Сколько решений имеет уравнение $x - y + 1 = 0$?

10.2. Системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Задача. Известно, что разность лет брата и сестры равна 3, а сумма равна 15. Сколько лет брату и сколько лет сестре?

Решение. Надо найти две неизвестные величины: возраст брата и возраст сестры.

Пусть брату x лет, а сестре y лет. Так как разность лет брата и сестры равна 3, то

$$x - y = 3, \tag{1}$$

и так как сумма лет брата и сестры равна 15, то

$$x + y = 15. \tag{2}$$

Искомые числа x и y должны удовлетворять равенствам (1) и (2).

Следовательно, наша задача свелась к определению пары чисел x и y, которые удовлетворяют одновременно равенствам (1) и (2). В таких случаях говорят, что дана система двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 15. \end{cases}$$

Можно подобрать пару чисел: $x = 9$, $y = 6$, удовлетворяющую каждому уравнению системы. Следовательно, брату 9 лет, сестре 6 лет.

Ответ: 9 и 6 лет.

В следующем пункте мы покажем, как искать решения таких систем.

Пусть даны два уравнения первой степени с двумя неизвестными x и y:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ и } a_2x + b_2y + c_2 = 0. \tag{3}$$

Говорят, что дана **система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными** x и y, если требуется найти все пары чисел $(x_0; y_0)$, являющиеся решениями одновременно и первого, и второго уравнений (3).

Обычно уравнения системы записывают в столбик одно под другим и объединяют их слева фигурной скобкой:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Решением системы (4) называют такую пару чисел $(x_0; y_0)$, которая является решением каждого уравнения системы (4).

Решить систему — значит найти все её решения или доказать, что их нет.

Приведём примеры систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0, \\ x + 2y + 4 = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x - 2y + 3 = 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0, \\ 6x + 3y + 6 = 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} 3x + 0y + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} 2x + 0y - 5 = 0, \\ 3x + 0y + 2 = 0; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} 5x + 0y - 1 = 0, \\ 0x + 3y + 2 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Если в системе уравнений (4) коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и удовлетворяют условию $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, то говорят, что уравнения этой системы имеют **пропорциональные коэффициенты** при неизвестных.

Например, уравнения системы (6) имеют пропорциональные коэффициенты при неизвестных. Уравнения системы (7) также имеют пропорциональные коэффициенты при неизвестных, более того, они пропорциональны свободным членам: $2 : 6 = 1 : 3 = 2 : 6$.

Если в системе уравнений (4) коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и удовлетворяют условию $a_1 : a_2 \neq b_1 : b_2$, то говорят, что уравнения (4) имеют **непропорциональные коэффициенты** при неизвестных.

Например, уравнения системы (5) имеют непропорциональные коэффициенты при неизвестных.

Обычно в уравнениях члены $0x$ и $0y$ опускают, тогда системы (8), (9) и (10) записывают в таком виде:

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0; \end{cases} \tag{8'}$$

$$\begin{cases} 2x - 5 = 0, \\ 3x + 2 = 0; \end{cases} \tag{9'}$$

$$\begin{cases} 5x - 1 = 0, \\ 3y + 2 = 0. \end{cases} \tag{10'}$$

683. Напишите систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

684. Выясните, является ли пара чисел (–3; 1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x - 3y - 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + 4 = 0, \\ 3x + 4y + 5 = 0. \end{cases}$

685. а) Что называют решением системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными?
б) Что значит решить систему уравнений?

686. Приведите примеры систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, имеющих коэффициенты при неизвестных:
а) пропорциональные; б) непропорциональные.

687. Назовите коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений системы:

а) $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 3x - 2y - 4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + y = 0, \\ -2x - 6 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -3x - 2y + 7 = 0, \\ 2x + 5 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -4x - 5 = 0, \\ 2y + 4 = 0. \end{cases}$

688. Составьте систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными по заданным коэффициентам при неизвестных a, b, a_1, b_1 и свободным членам c и c_1:

a	b	c	a_1	b_1	c_1
2	–3	1	1	5	4
–2	1	0	3	1	–7
0	–4	–2	–1	0	0
–1	1	–4	0	–5	3

689. Покажите, что пара чисел (1; 2) является решением системы:

а) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2{,}5x - 2{,}5 = 0, \\ \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 3y - 8 = 0, \\ 4x - y - 2 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}35x + 1{,}6y - 3{,}55 = 0, \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{7} + \frac{5}{42} = 0. \end{cases}$

690. Покажите, что пара чисел (–2; 1) не является решением системы:

а) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0, \\ x + y - 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 5y - 1 = 0, \\ 3x - 4 = 0. \end{cases}$

691. Какие из пар чисел (2; 1), (1; 2), (5; –3), (0; 2), (1; 0), (1; –4) являются решением системы:

а) $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0, \\ 2x + 3y - 6 = 0? \end{cases}$

692. Является ли пара чисел (–1; 4) решением системы:

а) $\begin{cases} -x + y - 3 = 0, \\ 2x - y + 6 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 5y - 2 = 0, \\ 2x + 3y - 10 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0, \\ 6x + 2y + 1 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -3y + 12 = 0, \\ 6x + y + 2 = 0? \end{cases}$

693. **Исследуем.** При каких a и b пара чисел (1; 0) является решением системы:

а) $\begin{cases} 2x + y = a, \\ bx - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - ay = 3, \\ 2x + y = b? \end{cases}$

694. Составьте систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными из условия:

а) сумма двух чисел равна 7, а их разность равна 2;

б) разность двух чисел равна 12, а их сумма равна 27.

10.3. Способ подстановки

В этом пункте рассматриваются системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, у которых все коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и непропорциональны.

Любая такая система имеет единственное решение.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0, \\ 3x + 4y - 27 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть пара чисел (x_0; y_0) есть решение системы (1). Подставив эти числа в уравнения системы (1), получим верные числовые равенства:

$$\begin{gathered} 2x_0 - y_0 + 4 = 0, \\ 3x_0 + 4y_0 - 27 = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Пользуясь первым числовым равенством, выразим y_0 через x_0:

$$y_0 = 2x_0 + 4. \tag{3}$$

Теперь во втором числовом равенстве (2) заменим число y_0 равным ему числом $2x_0 + 4$, т. е. подставим во второе числовое равенство $2x_0 + 4$ вместо y_0.

Получим верное числовое равенство

$$3x_0 + 4(2x_0 + 4) - 27 = 0,$$

т. е. получим, что число x_0 удовлетворяет уравнению

$$3x + 4(2x + 4) - 27 = 0.$$

Решив это уравнение, найдём, что $x_0 = 1$. Подставляя найденное значение в равенство (3), получим, что $y_0 = 6$.

Итак, если система (1) имеет решение $(x_0; y_0)$, то

$$x_0 = 1,\ y_0 = 6.$$

Подставляя эти числа в уравнения системы (1), убеждаемся, что они действительно удовлетворяют этим уравнениям.

Следовательно, система (1) имеет единственное решение (1; 6).

Заметим, что к этому же результату можно прийти, если выразить y_0 через x_0 из второго равенства (2) и полученное выражение для y_0 подставить в первое равенство.

Можно также в этих рассуждениях выразить x_0 через y_0 из какого-либо равенства (2) и полученное выражение подставить в другое равенство (2).

Аналогичные рассуждения можно провести и для любой системы уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

если у неё отличны от нуля и непропорциональны коэффициенты при неизвестных. (Системы уравнений с пропорциональными коэффициентами мы изучим позже.)

Из рассмотренного выше вытекает следующий способ решения системы (4), называемый **способом подстановки.**

Для того чтобы решить систему уравнений вида (4) с отличными от нуля и непропорциональными коэффициентами при неизвестных, надо:

1) одно из неизвестных (например, y) выразить через другое неизвестное из любого уравнения системы;

2) полученное выражение подставить вместо y в другое уравнение системы;

3) решить полученное уравнение с одним неизвестным x;

4) подставить найденное значение x_0 в формулу для y, найти y_0.

Пара чисел $(x_0; y_0)$ и будет единственным решением системы.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 5y - 1 = 0, \\ 7x - y + 6 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Из второго уравнения системы (5) выразим y через x:

$$y = 7x + 6 \qquad (6)$$

и подставим в первое уравнение $7x + 6$ вместо y:

$$4x - 5(7x + 6) - 1 = 0. \qquad (7)$$

Решив уравнение (7), найдём его единственный корень $x_0 = -1$. Подставляя x_0 в равенство (6), находим, что

$$y_0 = 7x_0 + 6 = 7 \cdot (-1) + 6 = -1.$$

Значит, система (5) имеет единственное решение $(-1; -1)$.

695. Сколько решений имеет система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, если её коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и непропорциональны?

Решите способом подстановки систему уравнений (**696—697**):

696. а) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2x - 3y - 7 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 5y = 0, \\ 3x + 7y - 16 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ x - 2y + 10 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x - y = 0, \\ 3x - y + 12 = 0. \end{cases}$

697. а) $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ x + y - 5 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ x + y - 6 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ 3x - 2y - 9 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0, \\ 5x + y - 4 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 2y - 11 = 0, \\ 4x - 5y + 8 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + 4y - 2 = 0, \\ 3x + 8y - 2 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x + 4y - 90 = 0, \\ x - 3y - 10 = 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0, \\ x + 5y - 7 = 0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 3x - 4y - 7 = 0, \\ x + 2y + 1 = 0; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 7x - 2y - 6 = 0, \\ x + 4y + 12 = 0; \end{cases}$

л) $\begin{cases} x - y - 12 = 0, \\ 2x + 4y = 0; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0, \\ x - y + 6 = 0. \end{cases}$

Решите систему уравнений (**698—699**):

698. а) $\begin{cases} 5x + y - 7 = 0, \\ x - 3y - 11 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 3x + 2y + 5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0, \\ x - 2y + 4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + y + 5 = 0, \\ x - 3y - 5 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0, \\ 3x + y + 3 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5x + y - 15 = 0, \\ x - 2y - 14 = 0. \end{cases}$

699. а) $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0, \\ 3x + 4y - 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 3y - 5 = 0, \\ 6x + 8y + 11 = 0. \end{cases}$

10.4. Способ уравнивания коэффициентов

Мы продолжаем рассматривать системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, у которых отличны от нуля и непропорциональны коэффициенты при неизвестных. Каждая такая система, как это уже отмечалось, имеет единственное решение.

Кроме решения таких систем способом подстановки, есть ещё другой способ, называемый способом уравнивания коэффициентов или способом сложения.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 3x + 4y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Предположим, что пара чисел $(x_0; y_0)$ есть решение системы (1). Подставив эти числа в уравнения системы (1), получим верные числовые равенства:

$$\begin{cases} 2x_0 + 3y_0 + 1 = 0, \\ 3x_0 + 4y_0 + 2 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Сделаем в этих равенствах коэффициенты при x_0 одинаковыми. Для этого умножим первое равенство на 3, а второе — на 2:

$$\begin{cases} 2x_0 + 3y_0 + 1 = 0, \\ 3x_0 + 4y_0 + 2 = 0. \end{cases} \begin{array}{|l} 3 \\ 2 \end{array}$$

Получим верные числовые равенства:

$$\begin{cases} 6x_0 + 9y_0 + 3 = 0, \\ 6x_0 + 8y_0 + 4 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства системы второе, получим верное числовое равенство $y_0 - 1 = 0$, откуда $y_0 = 1$.

Подставим это число в первое из равенств системы (2):

$$2x_0 + 3 \cdot 1 + 1 = 0,$$

откуда $x_0 = -2$.

Таким образом, если система (1) имеет решение $(x_0; y_0)$, то это может быть лишь пара чисел: $x_0 = -2$, $y_0 = 1$.

Подставляя эти числа в уравнения системы (1), убеждаемся, что они действительно удовлетворяют этим уравнениям.

Следовательно, система (1) имеет единственное решение $(-2; 1)$. Мы подставили число 1 вместо y_0 в первое из равенств (2), но результат будет тот же, если подставить это число во второе из равенств (2).

В самом деле, тогда второе равенство запишется в виде $3x_0 + 4 \cdot 1 + 2 = 0$. Отсюда опять находим, что $x_0 = -2$. Мы снова получили уже найденное решение $(-2; 1)$. Вместо того чтобы уравнивать в равенствах (2) коэффициенты при x_0, можно уравнивать коэффициенты при y_0. Результат будет тот же самый.

Такие рассуждения можно провести для любой системы вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

если у неё отличны от нуля и непропорциональны коэффициенты при неизвестных.

Из рассмотренного выше вытекает следующий способ решения системы (3), называемый **способом уравнивания коэффициентов** или **способом сложения**.

Для того чтобы решить систему уравнений вида (3) с отличными от нуля и непропорциональными коэффициентами при неизвестных, надо:

1) умножением на числа, отличные от нуля, уравнять коэффициенты при любом из неизвестных, например при x, в обоих уравнениях;

2) вычесть одно уравнение из другого;

3) решить полученное уравнение с одним неизвестным y;

4) подставить найденное значение y_0 в любое уравнение системы, найти из полученного уравнения с одним неизвестным его решение x_0.

Тогда найденная пара чисел $(x_0; y_0)$ и будет единственным решением системы.

Пример 2. Решим способом сложения систему уравнений

$$\begin{cases} 6x + 7y + 17 = 0, \\ 4x + 5y + 9 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Умножая первое уравнение этой системы на 2, а второе — на 3, перепишем систему (4) в виде

$$\begin{cases} 12x + 14y + 34 = 0, \\ 12x + 15y + 27 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Вычитая из второго уравнения системы (5) первое, получим линейное уравнение с одним неизвестным y:

$$y - 7 = 0,$$

откуда $y = 7$. Подставляя 7 вместо y в первое уравнение системы (4), получаем

$$6x + 49 + 17 = 0,$$

откуда $x = -11$.

Следовательно, система (4) имеет единственное решение $(-11; 7)$.

Если коэффициенты при одном из неизвестных являются противоположными числами, то уравнения системы удобно складывать.

Пример 3. Решим систему уравнений
$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ -x + 3y - 7 = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Сложив уравнения системы (6), получим линейное уравнение
$$5y - 10 = 0,$$
откуда $y = 2$. Подставив 2 вместо y в первое уравнение системы (6), получим
$$x + 4 - 3 = 0,$$
откуда $x = -1$.

Следовательно, система (6) имеет единственное решение $(-1; 2)$.

Решите систему уравнений (700—702):

700. а) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ x + y + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 3y + 3 = 0, \\ x + y - 1 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x + y - 2 = 0, \\ 3x + y + 3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y - 7 = 0, \\ 3x - y + 1 = 0. \end{cases}$

701. а) $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ -x + 4y + 8 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ -x + 3y - 2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ 3x + y - 4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ -x - y + 4 = 0. \end{cases}$

702. а) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ 2x - 3y + 8 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0, \\ 3x + 4y - 7 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -6x + 2y + 6 = 0, \\ 5x - y - 17 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x + 3y - 7 = 0, \\ 2x - y - 5 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x + 5y - 15 = 0, \\ 3x + 2y - 6 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4x - 5y - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 11 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0, \\ 3x - 2y - 25 = 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 5x + 3y - 7 = 0, \\ 3x - 5y - 45 = 0. \end{cases}$

703. Решите систему уравнений способом подстановки и способом уравнивания коэффициентов:

а) $\begin{cases} 4x + 5y - 2 = 0, \\ x - 3y + 8 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x - 2y - 6 = 0, \\ 5x - y - 7 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ 3x + 2y - 5 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x - 2y + 15 = 0, \\ x - 3y - 6 = 0. \end{cases}$

704. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 7x - y + 1 = 0, \\ 2x + y - 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x - 3y + 6 = 0, \\ 4x - y + 2 = 0. \end{cases}$

10.5. Равносильность уравнений и систем уравнений

Уравнение, левой и правой частями которого являются числа или многочлены степени не выше первой относительно x и y, называют **линейным уравнением с двумя неизвестными** x и y.

Примеры линейных уравнений:

$$2x - 3y + 1 = 0,$$
$$5x - 4y = 3x - 1,$$
$$2x - 3y = 5,$$
$$3x - y + 1 = 3x - y - 1.$$

Члены многочленов, находящихся в левой и правой частях линейного уравнения, называют **членами** этого **уравнения**.

Два уравнения называют **равносильными**, если любое решение первого уравнения является решением второго, а любое решение второго является решением первого. Равносильны также такие два уравнения, каждое из которых не имеет решений.

1) Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное исходному.

Например, уравнения

$$2x - 3y + 1 = 0 \text{ и } 4x - 6y + 2 = 0$$

равносильны.

2) Если перенести с противоположным знаком член уравнения из одной части в другую, то получим уравнение, равносильное исходному.

Например, уравнения

$$5x - 4y = 3x - 1 \text{ и } 5x - 4y - 3x + 1 = 0$$

равносильны.

3) Если в левой и правой частях линейного уравнения привести подобные члены, то получится уравнение, равносильное исходному.

Например, уравнения

$$2x - 7 + 3x - 4 = y \text{ и } 5x - 11 = y$$

равносильны.

Доказательство этих утверждений проводится так же, как для линейного уравнения с одним неизвестным.

Если в любом линейном уравнении перенести все члены в левую часть и привести подобные члены, то окажется, что оно равносильно линейному уравнению

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

где a, b и c — некоторые числа.

При этом, если хотя бы одно из чисел a или b отлично от нуля, уравнение (1), как уже говорилось, есть уравнение первой степени.

Предположим, что в уравнении (1) $a = b = 0$, $c \neq 0$, тогда оно имеет вид

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$$

и никакая пара чисел $(x;\ y)$ не удовлетворяет ему, т. е. уравнение (1) не имеет решения.

Если $a = b = c = 0$, то уравнению (1) удовлетворяют любые пары чисел $(x;\ y)$.

Две системы уравнений называют **равносильными**, если любое решение первой системы является решением второй системы и любое решение второй системы является решением первой системы. Равносильны также две системы, если каждая из них не имеет решений.

Очевидно, что если одно из уравнений системы заменить другим, равносильным ему уравнением, то полученная система будет равносильна исходной.

Так, например, система

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} y = -2x + 1, \\ 4x + 7y - 5 = 0. \end{cases}$$

Ниже понятие равносильности применяется при решении систем уравнений первой степени с отличными от нуля и пропорциональными коэффициентами при неизвестных.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 2x + 2y + 3 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Коэффициенты при неизвестных в этой системе отличны от нуля и пропорциональны.

Разделив второе уравнение системы (2) на 2, получим систему

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x + y + \dfrac{3}{2} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

равносильную системе (2).

Перенеся свободные члены уравнений этой системы в их правые части, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = -\dfrac{3}{2}, \end{cases} \tag{4}$$

равносильную системе (3), а следовательно, и системе (2).

Очевидно, что никакая пара чисел $(x; y)$ не может удовлетворять системе (4), потому что одно и то же число $x + y$ не может одновременно равняться и 1, и $-\frac{3}{2}$.

Таким образом, система (4), а значит, и равносильная ей система (2) не имеют решений. Такую систему называют **противоречивой**.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x + 2y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь также коэффициенты отличны от нуля и пропорциональны. Больше того, они пропорциональны свободным членам:

$$1 : 2 = 1 : 2 = 1 : 2.$$

Разделив второе уравнение системы на 2, получим систему

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x + y + 1 = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

равносильную системе (5).

Очевидно, что множество решений системы (6) совпадает с множеством решений одного уравнения:

$$x + y + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет бесконечно много решений $(x; y)$, где x — любое число, а $y = -x - 1$. Поэтому все решения системы (5) имеют вид $(x; -x - 1)$, где x — любое число.

Рассуждения, аналогичные приведённым выше, можно провести при решении любой системы вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \qquad (7)$$

у которой коэффициенты при неизвестных отличны от нуля и пропорциональны. Если коэффициенты системы (7) удовлетворяют условию $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то эта система не имеет решений. Если коэффициенты системы (7) удовлетворяют условию $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то эта система имеет бесконечно много решений, совпадающих с решениями одного (любого) уравнения этой системы. Такие системы можно решать подобно тому, как это было сделано в примерах 1 и 2. Но их можно также решать и способом подстановки.

Решим системы (2) и (5) способом подстановки.

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 2x + 2y + 3 = 0. \end{cases}$$

Выразим y через x из первого уравнения системы:

$$y = -x + 1$$

и подставим $(-x + 1)$ вместо y во второе уравнение системы:

$$2x + 2(-x + 1) + 3 = 0.$$

Получим уравнение $0x + 5 = 0$, показывающее, что данная система не имеет решений.

Пример 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x + 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Выразим y через x из первого уравнения системы:

$$y = -x - 1$$

и подставим $(-x - 1)$ вместо y во второе уравнение системы:

$$2x + 2(-x - 1) + 2 = 0.$$

Получим уравнение $0x + 0 = 0$, показывающее, что число y, равное $(-x - 1)$, удовлетворяет как первому, так и второму уравнению системы при любых значениях x. Следовательно, все решения данной системы имеют вид $(x; -x - 1)$, где x — любое число.

705. а) Какое уравнение называют линейным уравнением с двумя неизвестными?
б) Что называют членами линейного уравнения?
в) Является ли уравнение первой степени с двумя неизвестными линейным?

706. Приведите пример линейного уравнения с двумя неизвестными, не являющегося уравнением первой степени.

707. а) Какие два уравнения называют равносильными?
б) Сформулируйте утверждения о равносильности линейных уравнений.
в) Какие две системы уравнений называют равносильными?
г) Сформулируйте утверждения о равносильности систем уравнений.

708. При каком условии система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, у которой пропорциональны коэффициенты при неизвестных:
а) не имеет решений;
б) имеет бесконечно много решений?
Можно ли решать такие системы способом подстановки?

709. Равносильны ли уравнения:
а) $2x - 2y = x$ и $x - y = 0$;
б) $3x - 5y = 0$ и $3x = 5y$;
в) $3x - 6 + 2y = 0$ и $2 - x - 2y = 0$;
г) $x + y - 5 = 0$ и $x = 5 - y$?

710. **Доказываем.** Докажите, что равносильны уравнения:
а) $2x - 3y + y = 4x - 2$ и $x + y = 1$;
б) $5(x + y) + 1 = x + 3$ и $4x + 5y - 2 = 0$.

711. Составьте уравнение, равносильное данному:
а) $4x - 2 + y = 0$; б) $5x + 4y - 2 = 2x - 3y + 5$;
в) $3x + 6y - 9 = 0$; г) $x - y - 1 = 0$.

712. Равносильны ли уравнения с двумя неизвестными, если все решения каждого из них являются решениями другого?

713. Равносильны ли системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = y - 3, \\ 2(y - 3) + y - 4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ 2x - 1 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - 2y - 5 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4(2 - y) - 2y - 5 = 0, \\ x = 2 - y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 3x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = 1 - x, \\ 5x - 4 = 0? \end{cases}$

714. Составьте две системы уравнений, равносильные данной:

а) $\begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0, \\ 3x + y - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y - 4 = 0, \\ -y = 5 - 2x. \end{cases}$

715. **Исследуем.** При каком a равносильны системы уравнений:

$$\begin{cases} ax - y = 5, \\ x + y = 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - 2 = -y, \\ 4x - 2y = 0? \end{cases}$$

716. Равносильны ли системы уравнений:

$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 5x + y - 6 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -3x + y + 2 = 0, \\ 5x - 2y - 3 = 0? \end{cases}$

10.6. Решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Перенеся все члены правых частей этих уравнений в левые части и приведя подобные члены, получим равносильную данной систему вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — некоторые числа.

Мы уже знаем, как решать такую систему, когда все коэффициенты при неизвестных a_1, b_1, a_2, b_2 отличны от нуля. Мы знаем также, что если коэффициенты при неизвестных непропорциональны, то решение системы (1) существует и единственно; если же коэффициенты при неизвестных системы пропорциональны, то либо решений бесконечно много, либо нет ни одного решения.

Нам остаётся рассмотреть те случаи, когда некоторые коэффициенты при неизвестных равны нулю. Рассмотрим это на характерных примерах.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Второе уравнение этой системы имеет отличные от нуля коэффициенты при неизвестных, а первое уравнение имеет коэффициент при x, отличный от нуля, и коэффициент при y, равный нулю.

Эту систему проще решить методом подстановки. Найдём из первого уравнения

$$x = -\frac{1}{3}$$

и подставим его во второе. Получим

$$2\left(-\frac{1}{3}\right) + y - 5 = 0,$$

откуда

$$y = 5\frac{2}{3}.$$

Таким образом, пара чисел $\left(-\frac{1}{3};\ 5\frac{2}{3}\right)$ есть единственное решение системы (2).

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 1 = 0, \\ 3y + 2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) есть частный случай системы (1), где

$$a_1 = 5,\ b_1 = 0,\ c_1 = -1,\ a_2 = 0,\ b_2 = 3,\ c_2 = 2.$$

Единственным решением этой системы является пара чисел $\left(\frac{1}{5}; -\frac{2}{3}\right)$.

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2y + 3 = 0, \\ y + \frac{3}{2} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Из каждого уравнения системы получаем

$$y = -\frac{3}{2}.$$

Так как систему (4) мы рассматриваем как частный случай системы (1), где $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, то система (4) может быть записана так:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 2y + 3 = 0, \\ 0 \cdot x + y + \frac{3}{2} = 0. \end{cases}$$

Здесь x может быть любым числом, а $y = -\frac{3}{2}$.

Таким образом, решения системы (4) записываются в виде пар чисел $\left(x; -\frac{3}{2}\right)$, где x — любое число.

Пример 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2 = 0, \\ 2x - 5 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Эта система противоречива (не имеет решений), потому что x не может одновременно равняться и 2, и $\frac{5}{2}$.

Пример 5. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + c_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Если $c_2 \neq 0$, то эта система противоречива, потому что никакая пара чисел $(x; y)$ не удовлетворяет второму уравнению системы (6).

Если $c_2 = 0$, то второе уравнение обращается в верное равенство при любых x и y. Остаётся только первое уравнение. Оно уже рассматривалось. Следовательно, все решения первого уравнения являются решениями системы.

717. Может ли система двух линейных уравнений с двумя неизвестными не иметь решений; иметь одно решение; иметь бесконечно много решений? Приведите примеры.

718. Является ли решением системы

$$\begin{cases} x + 3y - 7 = 0, \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

пара чисел: а) (2; 1); б) (1; 2)?

719. Является ли система уравнений противоречивой; имеющей бесконечно много решений; имеющей единственное решение:

а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x + y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1? \end{cases}$

Решите систему уравнений (720—721):

720. а) $\begin{cases} x = 3, \\ x + y - 4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0, \\ x = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - y - 8 = 0, \\ y - 1 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 2y - 2 = 0, \\ y = -5. \end{cases}$

721. а) $\begin{cases} 4x + 4y = 2, \\ 2x + 2y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x + 3y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 2y = 4, \\ x - 4 = 2y. \end{cases}$

722. Составьте систему двух линейных уравнений, такую, чтобы одно из уравнений было $3x - 4y = 2$ и она: а) была противоречива; б) имела бесконечно много решений.

Решите систему уравнений (723—725):

723. а) $\begin{cases} x - y = 5, \\ -4x + 4y = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0, \\ 5x + 6y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 2y = 11, \\ 4x - 5y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x + 6y = 13, \\ 7x + 18y + 1 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x + 6y = 1{,}5, \\ 4x - 9y - 5 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x + 4y = 3{,}5, \\ -3x - 4y = 40. \end{cases}$

724. а) $\begin{cases} \dfrac{x - 3}{2} + \dfrac{y + 4}{6} = 2, \\ \dfrac{1}{3}(x + 2) - y = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{5x}{2} + \dfrac{y}{5} + 4 = 0, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{1}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{y-2}{3} = 2, \\ \dfrac{x-1}{4} + \dfrac{y+1}{3} = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{9} - \dfrac{x-y}{3} = 2, \\ \dfrac{2x-y}{6} - \dfrac{3x+2y}{3} = -20; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{2x}{9} + \dfrac{y}{4} = 0, \\ \dfrac{5x}{12} + \dfrac{y}{3} = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{2y}{3} = 2\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{3x}{2} + 2y = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{3} = 8, \\ \dfrac{x+3}{3} + \dfrac{x-y}{4} = 11; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{3y-2}{4} = 2, \\ \dfrac{3x+1}{5} - \dfrac{3y+2}{4} = 0. \end{cases}$

725. а) $\begin{cases} x+5 = 5+3x, \\ x-3 = 9x+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y+3 = 2y-4, \\ 2x+3 = x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3y-4 = 2-3y, \\ y = 1\dfrac{1}{3} - 3y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y = x+y, \\ x-y+2 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x+3y = 2x+3y+2, \\ x-7y+1 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x+5y = 5(x+3y) - 2(x+5y), \\ y-3+x = 2x+(x+y-3); \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x+4y+1 = (x+y-2)+(2x+3y+3), \\ x+y+2 = y+(2+x). \end{cases}$

10.7*. О количестве решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Теорема

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где все коэффициенты a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 отличны от нуля. Тогда система (1):

а) имеет единственное решение, если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$;

б) не имеет решений, если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;

в) имеет бесконечно много решений, если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, и при этом все решения можно записать в виде $\left(\dfrac{-c_1 - b_1y}{a_1}; y\right)$, где y — любое число.

Доказательство. Из первого уравнения системы (1) получим, что $x = \dfrac{-c_1 - b_1 y}{a_1}$. Подставив полученное выражение вместо x во второе уравнение системы и учитывая, что $a_1 \neq 0$, получим уравнение

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y + a_1c_2 - a_2c_1 = 0. \tag{2}$$

Здесь возможны три случая.

1) Если

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \tag{3}$$

то уравнение (2) имеет единственный корень, поэтому и система (1) имеет единственное решение.

Так как $a_2 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$, то условие (3) можно записать в виде $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

2) Если

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \quad a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0, \tag{4}$$

то уравнение (2) не имеет корней и система (1) не имеет решений.

Так как $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, то условия (4) можно записать в виде $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

3) Если

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \text{ и } a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \tag{5}$$

то уравнение (2) имеет бесконечно много корней, поэтому и система (1) имеет бесконечно много решений.

Так как $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, то условия (5) можно записать в виде $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Итак, если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то система (1) имеет единственное решение; если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то система (1) не имеет решений; если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то система (1) имеет бесконечно много решений, и эти решения задаются парами $\left(\dfrac{-c_1 - b_1 y}{a_1}; y\right)$, где y — любое число.

Теорема доказана.

Пример 1. Определим число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} 5x + 2y + 13 = 0, \\ 10x - 4y + 26 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 4y + 7 = 0, \\ 10x + 8y + 14 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7x - 3y - 13 = 0, \\ 21x - 9y - 28 = 0. \end{cases}$

Решение. а) Так как выполняется условие $\dfrac{5}{10} \neq \dfrac{2}{-4}$, то система имеет единственное решение.

б) Так как выполняется условие $\frac{5}{10} = \frac{4}{8} = \frac{7}{14}$, то система имеет бесконечно много решений.

в) Так как выполняется условие $\frac{7}{21} = \frac{-3}{-9} \neq \frac{-13}{-28}$, то система не имеет решений.

Ответ: а) единственное решение; б) бесконечно много решений; в) нет решений.

Пример 2. При каком значении a система $\begin{cases} 4x - ay + 3 = 0, \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$ не имеет решений?

Решение. Система не имеет решений, если выполняется условие $\frac{4}{1} = \frac{-a}{2} \neq \frac{3}{-2}$. Условие $\frac{4}{1} = \frac{-a}{2}$ выполняется лишь при $a = -8$. При этом условие $\frac{8}{2} \neq \frac{3}{-2}$ также выполняется. Следовательно, система не имеет решений при $a = -8$.

Ответ: при $a = -8$.

Пример 3. Существует ли значение a, при котором система $\begin{cases} 3x - ay + 2a = 0, \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ не имеет решений?

Решение. Система не имеет решений, если выполняется условие $\frac{3}{1} = \frac{-a}{2} \neq \frac{2a}{-4}$. Условие $\frac{3}{1} = \frac{-a}{2}$ выполняется лишь при $a = -6$. При этом условие $\frac{6}{2} \neq \frac{-12}{-4}$ не выполняется. Следовательно, таких a не существует.

Ответ: не существует.

726. Определите число решений системы:

а) $\begin{cases} 2x + 3y + 15 = 0, \\ 4x + 6y + 30 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 5y + 2 = 0, \\ 12x + 15y + 8 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 11x - 13y + 14 = 0, \\ 22x - 26y + 7 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x + 2y + 2 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y + 3 = 0, \\ 2x + 2y + 4 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x - 3y + 13 = 0, \\ 6x - 9y + 39 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 24x - 9y + 12 = 0, \\ 8x - 3y + 4 = 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 14x + 7y + 7 = 0, \\ 2x - y + 1 = 0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 34x - 22y + 25 = 0, \\ 17x - 11y + 50 = 0. \end{cases}$

Исследуем (727—731).

727. При каком значении a система:

а) $\begin{cases} 5x + ay + 6 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 2ay + 2 = 0, \\ 2x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$

не имеет решений?

728. Существует ли значение a, при котором система:

а) $\begin{cases} 6x + ay - 2a = 0, \\ 3x - 2y + 4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + ay - a = 0, \\ 15x - 6y + 8 = 0 \end{cases}$

не имеет решений?

729. При каком значении a система:

а) $\begin{cases} -2x + ay + 6a = 0, \\ x - y - 6 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + ay + a = 0, \\ -x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$

имеет бесконечно много решений?

730. Существует ли значение a, при котором система:

а) $\begin{cases} x - ay - 3a = 0, \\ 2x + y + 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 14x - ay - 2a = 0, \\ 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$

имеет бесконечно много решений?

731. При каких значениях a система:

а) $\begin{cases} 3ax + y - a = 0, \\ 45x - y - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 21x - ay + 6a = 0, \\ 3x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$

имеет единственное решение?

10.8*. Системы уравнений первой степени с тремя неизвестными

Уравнение

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (1)$$

где a, b, c и d — данные числа, причём хотя бы одно из чисел a, b или c не равно нулю, а x, y и z — неизвестные, называют **уравнением первой степени с тремя неизвестными.**

Тройку чисел (x_0; y_0; z_0) называют **решением уравнения** (1), если эти числа удовлетворяют уравнению (1), т. е. если при подстановке числа x_0 вместо x, числа y_0 вместо y, числа z_0 вместо z уравнение (1) превращается в верное числовое равенство

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \quad (2)$$

Аналогично определяется уравнение первой степени с четырьмя, пятью и т. д. неизвестными и его решение.

Пусть даны три уравнения первой степени с тремя неизвестными x, y и z. Говорят, что дана **система трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными** x, y и z, если требуется найти тройки чисел $(x; y; z)$, являющиеся решениями одновременно всех трёх уравнений. Такие тройки чисел называют **решениями** данной системы уравнений.

Аналогично определяется система четырёх, пяти и т. д. уравнений первой степени с четырьмя, пятью и т. д. неизвестными и её решение.

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или доказать, что их нет.

Мы уже изучили системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Любую такую систему можно решить способом подстановки.

Приведём пример решения системы трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными и покажем, что эти системы также можно решать способом подстановки.

Пример. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0, \\ 3x - 4y - z + 2 = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Покажем, как можно решить эту систему уравнений способом подстановки. Из третьего уравнения системы (3) выражаем x через y и z:

$$x = y - z \qquad (4)$$

и подставляем $y - z$ вместо x в первое и второе уравнения системы (3). Получаем уравнения

$$\begin{cases} 2(y - z) - 3y + z - 1 = 0, \\ 3(y - z) - 4y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

которые после приведения подобных членов перепишем в виде

$$\begin{cases} -y - z - 1 = 0, \\ -y - 4z + 2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Таким образом, методом подстановки можно свести решение системы трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными x, y и z к решению системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными y и z.

Решая систему (5), находим, что $y_0 = -2$, $z_0 = 1$. Подставляя z_0 и y_0 в выражение (4), находим, что $x_0 = -3$.

Итак, система (3) имеет единственное решение: $x_0 = -3$, $y_0 = -2$, $z_0 = 1$.

В общем случае при решении системы трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными x, y и z можно поступать так же, как в этом примере. Пользуясь одним из уравнений системы, надо выразить одно из неизвестных, например z, через остальные неизвестные, входящие в другие два уравнения. Затем надо решить полученную систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y.

Если эта система имеет единственное решение, то находим её решение — числа x_0 и y_0 и, подставляя их в выражение для z, находим z_0, тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ и будет единственным решением системы.

Если же эта система не имеет решений, то и исходная система также не имеет решений.

Наконец, если эта система имеет бесконечно много решений, то и исходная система имеет бесконечно много решений.

Подобным образом решают системы уравнений первой степени с четырьмя, пятью и т. д. неизвестными.

732. а) Какое уравнение называют уравнением первой степени с тремя неизвестными?

б) Что называют решением уравнения первой степени с тремя неизвестными?

в) Что называют решением системы трёх уравнений с тремя неизвестными?

г) Что значит решить систему уравнений?

д) В чём заключается способ подстановки для решения системы трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными?

733. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x = 1, \\ 3x + 2y - 3z = 2, \\ 5x - y - 5z = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y = 12, \\ x + y + z = 7, \\ x - 2y + 2z = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 2y, \\ 3x - 2y - z = 1, \\ 5x + 4y - 2z = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y + z = 6, \\ x - 5y + 3z = -4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x - 2y + z = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7, \\ x + 2y - z = 1, \\ 3x - 5y - 4z = 2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 17, \\ x + y - z = 6, \\ x - y - z = 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ x - y + z = 3, \\ x + y - z = 3. \end{cases}$

10.9. Решение задач при помощи систем уравнений первой степени

Задача 1 *(старинная)*. Сошлись два пастуха, Иван да Пётр. Иван говорит Петру: «Отдай-ка мне одну овцу, тогда у меня будет овец вдвое больше, чем у тебя!» А Пётр ему отвечает: «Нет! Лучше ты отдай мне одну овцу, тогда у нас будет овец поровну!» Сколько же было у каждого овец?

Решение. Пусть у Ивана было x овец, а у Петра — y овец. Если бы Пётр отдал Ивану одну овцу, то у Петра осталось бы $(y - 1)$ овец, а у Ивана стало бы $(x + 1)$ овец. Но тогда у Ивана было бы вдвое больше овец, чем у Петра. Следовательно,

$$x + 1 = 2(y - 1). \qquad (1)$$

Если бы Иван отдал Петру одну овцу, то у Ивана осталось бы $(x - 1)$ овец, а у Петра стало бы $(y + 1)$ овец. Но тогда они имели бы овец поровну. Следовательно,

$$x - 1 = y + 1. \qquad (2)$$

В задаче надо найти такие значения x и y, которые одновременно удовлетворяют и уравнению (1), и уравнению (2). Другими словами, надо решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x + 1 = 2(y - 1), \\ x - 1 = y + 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Решим эту систему способом подстановки.

Из первого уравнения выразим x через y:

$$x = 2y - 3. \qquad (4)$$

Подставим $2y - 3$ вместо x во второе уравнение системы (3), получим уравнение с одним неизвестным y:

$$(2y - 3) - 1 = y + 1,$$

которое имеет единственное решение $y_0 = 5$. Подставляя $y_0 = 5$ в уравнение (4), находим: $x_0 = 7$. Следовательно, система (3) имеет единственное решение: $x_0 = 7$, $y_0 = 5$.

Ответ: у Ивана было 7 овец, а у Петра — 5 овец.

Задача 2. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа за ним выехал автомобилист. На половине пути от A до B автомобилист догнал велосипедиста. Когда автомобилист прибыл в пункт B, велосипедисту осталось проехать ещё треть пути. Какое время затратили на путь от A до B велосипедист и автомобилист, если известно, что скорости велосипедиста и автомобилиста постоянны?

Решение. Обозначим через x минут время, за которое велосипедист проедет путь от A до B, а через y минут время, за которое автомобилист проедет путь от A до B. На половину пути от A до B велосипедист затратил $\frac{1}{2}x$ минут, а автомобилист — $\frac{1}{2}y$ минут. По условию на полпути от A до B они находились одновременно, хотя автомобилист выехал на 15 мин позже. Значит,

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 15. \qquad (5)$$

К моменту прибытия автомобилиста в пункт B велосипедист находился в пути уже $(y + 15)$ минут и проехал за это время $\frac{2}{3}$ расстояния от пункта A до пункта B, т. е. затратил на этот путь $\frac{2}{3}x$ минут, следовательно,

$$y + 15 = \frac{2}{3}x. \qquad (6)$$

В задаче надо найти такие значения x и y, которые одновременно удовлетворяют и уравнению (5), и уравнению (6). Другими словами, надо решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + 15 = \frac{1}{2}x, \\ y + 15 = \frac{2}{3}x. \end{cases} \qquad (7)$$

Умножим правую и левую части первого уравнения системы (7) на 2, а второго — на 3, получим систему

$$\begin{cases} y + 30 = x, \\ 3y + 45 = 2x. \end{cases} \qquad (8)$$

Решив эту систему, получим единственное решение: $x_0 = 45$, $y_0 = 15$.

Ответ: на путь от A до B велосипедист затратил 45 минут, а автомобилист — 15 минут.

Задача 3. Школьник потратил 140 р. на покупку учебника, авторучки и дневника. Если бы учебник стоил в 5 раз дешевле, авторучка — в 2 раза дешевле, дневник — в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 40 р. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью учебник стоил в 3 раза дешевле, авторучка — в 4 раза дешевле, а дневник — в 2 раза дешевле, то за ту же покупку школьник заплатил бы 50 р. Сколько стоят учебник, авторучка и дневник?

Решение. Пусть учебник стоит x р., авторучка — y р., а дневник — z р.

Первое уравнение составим из условия, что покупка стоит 140 р.:

$$x + y + z = 140.$$

Второе уравнение составим из условия: если бы учебник стоил $\frac{1}{5}x$ р., авторучка $\frac{1}{2}y$ р., дневник $\frac{1}{2{,}5}z$ р., то покупка стоила бы 40 р.:

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2{,}5}z = 40.$$

Наконец, третье уравнение составим из условия: если бы учебник стоил $\frac{1}{3}x$ р., авторучка $\frac{1}{4}y$ р., дневник $\frac{1}{2}z$ р., то покупка стоила бы 50 р.:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 50.$$

В задаче надо найти такие значения x, y и z, которые одновременно удовлетворяют всем трём этим уравнениям. Другими словами, надо решить систему трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y + z = 140, \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2{,}5}z = 40, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 50. \end{cases} \tag{9}$$

Умножим обе части второго уравнения на 10, третьего — на 12, получим систему

$$\begin{cases} x + y + z = 140, \\ 2x + 5y + 4z = 400, \\ 4x + 3y + 6z = 600. \end{cases} \tag{10}$$

Из первого уравнения системы (10) выразим z через x и y:

$$z = 140 - x - y \tag{11}$$

и подставим выражение $140 - x - y$ вместо z во второе и третье уравнения системы (10), получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4(140 - x - y) = 400, \\ 4x + 3y + 6(140 - x - y) = 600. \end{cases} \tag{12}$$

Решив систему (12), получим единственное её решение: $x_0 = 90$, $y_0 = 20$.

Подставив $x_0 = 90$, $y_0 = 20$ в уравнение (11), получим $z_0 = 30$. Следовательно, система (9) имеет единственное решение:

$$x_0 = 90,\ y_0 = 20,\ z_0 = 30.$$

Ответ: учебник стоит 90 р., авторучка — 20 р., а дневник — 30 р.

734. а) Сумма двух чисел равна 10, а их разность равна 4. Найдите числа.
б) Сумма двух чисел равна 21, а их разность равна 9. Найдите числа.

735. а) Одно число больше другого на 6. Сумма этих чисел равна 40. Найдите числа.
б) Одно число меньше другого на 15. Сумма этих чисел равна 23. Найдите числа.

736. а) Одно число в 2 раза больше другого. Если меньшее из этих чисел увеличить в 4 раза, а большее увеличить в 2 раза, то их сумма будет равна 44. Найдите числа.
б) Одно число в 3 раза меньше другого. Если одно из чисел увеличить в 2 раза, то сумма станет равной 42. Найдите числа. Сколько решений имеет задача? Как следует изменить формулировку задачи, чтобы решение было единственным?

737. а) Одно из чисел на 7 больше другого. Если меньшее число увеличить в 2 раза, а большее — на 6, то их сумма станет равной 31. Найдите числа.
б) Одно из чисел на 10 меньше другого. Если большее число уменьшить в 3 раза, то их сумма станет равной 70. Найдите числа.

738. а) Даны два числа. Если первое число умножить на 2, то полученное число будет на 1 больше второго; если второе число умножить на 2, то полученное число будет на 7 больше первого. Найдите числа.
б) Даны два числа. Если первое число умножить на 4, то полученное число будет на 6 больше второго; если второе уменьшить на 3, то полученное число будет меньше первого на 1,5. Найдите числа.

739. а) Между посёлками проложены две дороги: просёлочная и шоссейная. Просёлочная дорога на 5 км короче шоссейной, а их общая длина равна 61 км. Какова длина просёлочной дороги?
б) От города до села ведут две дороги: грунтовая и асфальтированная. Грунтовая дорога на 18 км длиннее асфальтированной. Общая длина дорог равна 66 км. Какова длина грунтовой дороги?

740. Норма выработки за смену на новом токарном станке на 30 деталей больше, чем на старом. При этом на пяти новых станках можно обработать за смену столько же деталей, сколько за то же время на восьми старых. Какова норма выработки на новом станке?

741. Если из одного пункта одновременно и в одном направлении выедут мотоциклист и велосипедист, то через 1 ч мотоциклист обгонит велосипедиста на 33 км. Если же они одновременно выедут в противоположных направлениях, то через 1 ч расстояние между ними будет равно 57 км. Можно ли узнать скорости велосипедиста и мотоциклиста? Если можно, то узнайте.

742. Школьники поехали на экскурсию. Обратно они возвращались другим путём, который был на 7 км короче первого. Какова длина каждого пути, если всего в оба конца школьники проехали 41 км?

743. В прямоугольнике, периметр которого 52 см, разность длин двух сторон равна 4 см. Найдите стороны прямоугольника.

744. Для класса, в котором учатся 30 учеников, купили билеты в театр стоимостью по 100 и 150 р. Сколько было куплено отдельно тех и других билетов, если их общая стоимость составила 3500 р.?

745. Школа приобрела 4 кресла и 2 стола, заплатив за них 36 000 р. Если бы было куплено 2 кресла и 3 стола, то вся покупка стоила бы на 14 000 р. меньше. Сколько стоит кресло и стол в отдельности?

746. Рассчитываясь за покупку, мальчик получил сдачи 70 р. монетами достоинством 5 р. и 10 р. Всего он получил 10 монет. Сколько монет достоинством 5 р. он получил?

747. Сумма двух натуральных чисел равна 31, а разность равна 5. Найдите эти числа.

748. Два куска одинаковой ткани стоят вместе 9100 р. Когда из первого куска продали столько, сколько было первоначально во втором, а из второго — половину того, что было первоначально в первом, то остаток первого куска оказался на 10 м больше остатка второго куска. Сколько метров ткани было в каждом куске, если 1 м ткани стоит 140 р.?

749. Две бригады школьников во время производственной практики заработали 11 700 р. Первая работала 15 дней, вторая — 14 дней. Сколько зарабатывала каждая бригада в день, если первая за 4 дня заработала на 1100 р. больше, чем вторая за 3 дня? Какое допущение необходимо сделать для решения задачи?

750. В школьный буфет завезли 300 пирожных и булочек, общая масса которых 20 кг. Масса всех пирожных такая же, как и всех булочек. Определите количество пирожных и булочек в отдельности, если масса пирожного 100 г, а булочки 50 г.

751. а) 5% одного числа и 4% другого вместе составляют 46, а 4% первого числа и 5% второго вместе составляют 44. Найдите эти числа.
б) 20% одного числа и 50% другого вместе составляют 27, а 50% первого числа и 50% второго вместе составляют 42,3. Найдите эти числа.

752. В треугольнике бо́льшая сторона равна 16 см, а разность двух других сторон равна 0,4 дм. Чему равны стороны треугольника, если его периметр равен 0,38 м?

753. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 0,9 м, бо́льшая сторона меньше суммы двух других сторон на 10 см, а утроенная меньшая сторона на 2 см больше суммы двух других сторон.

754. Периметр треугольника 16 дм. Бо́льшая сторона превышает меньшую на 25 см, а удвоенная средняя (по длине) сторона меньше суммы двух других сторон на 1 см. Найдите стороны треугольника.

755. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если цифры этого числа переставить, то получится число, составляющее $\frac{4}{7}$ первоначального. Найдите это двузначное число.

756. В трёх сосудах 54 л воды. Если из первого перелить во второй 4 л, то в обоих сосудах будет воды поровну, а если из третьего сосуда перелить во второй 17 л, то во втором окажется в четыре раза больше воды, чем в третьем. Сколько воды в каждом сосуде?

757. *Задача Бхаскары (Индия, XII в.).* Некто сказал другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Друг ответил: «Дай мне только 10, и я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько было у каждого?

758. Три утёнка и четыре гусёнка весят 2 кг и 500 г, а четыре утёнка и три гусёнка весят 2 кг 400 г. Сколько весит 1 гусёнок?

759. а) Алёша и Боря вместе весят 82 кг, Алёша и Вова весят 83 кг, Боря и Вова весят 85 кг. Сколько весят вместе Алёша, Боря и Вова?
б) *Старинная задача.* Четверо купцов имеют некоторую сумму денег. Известно, что, сложившись без первого, они соберут 90 р.; сложившись без второго — 85 р.; сложившись без третьего — 80 р.; сложившись без четвёртого — 75 р. Сколько у кого денег?

в) *Старинная задача.* Отец имеет семь сыновей. Сумма лет первого и четвёртого сына равна 9 годам, первого и шестого — 8 годам, второго и пятого — 8 годам, второго и третьего — 9 годам, третьего и шестого — 6 годам, четвёртого и седьмого — 4 годам, а седьмого и пятого — также 4 годам. Сколько лет каждому?

760. Трём мальчикам раздали 145 орехов. Половина того числа орехов, которое получил первый мальчик, равна $\frac{2}{3}$ того числа орехов, которое получил второй мальчик, или $\frac{3}{4}$ того числа орехов, которое получил третий мальчик. Сколько орехов получил каждый из мальчиков?

761. а) Если $\frac{1}{3}$ пути турист пройдёт пешком, а $\frac{2}{3}$ пути проедет на велосипеде, то затратит на весь путь 1,5 ч. Если же $\frac{1}{3}$ пути он проедет на велосипеде, а $\frac{2}{3}$ пути пройдёт пешком, то затратит на весь путь 2 ч 15 мин. За какое время он пройдёт весь путь пешком?

б) Если $\frac{1}{4}$ бассейна наполнит первая труба, а затем $\frac{3}{4}$ — вторая, то бассейн будет наполнен за 5 ч. Если же $\frac{3}{4}$ бассейна наполнит первая труба, а затем $\frac{1}{4}$ — вторая, то бассейн будет наполнен за 7 ч. За какое время наполнит бассейн одна вторая труба?

в) Если $\frac{2}{5}$ пути турист проедет на поезде, а $\frac{3}{5}$ — на автобусе, то он затратит на весь путь 4 ч. Если же $\frac{2}{5}$ пути турист проедет на автобусе, а $\frac{3}{5}$ — на поезде, то затратит на весь путь 4 ч 20 мин. За какое время турист проедет весь путь на поезде?

762. В трёх сосудах 36 л воды. Из первого сосуда перелили половину имевшейся в нём воды во второй сосуд, потом треть воды, оказавшейся во втором сосуде, — в третий и, наконец, четверть воды, оказавшейся в третьем сосуде, перелили в первый. После этих переливаний во всех сосудах оказалось воды поровну. Сколько воды было первоначально в каждом сосуде?

Дополнения к главе 3

1. Линейные диофантовы уравнения

Пусть дано уравнение

$$ax + by = c \ (a \neq 0,\ b \neq 0), \qquad (1)$$

коэффициенты которого a, b и c — целые числа. Если поставлена задача найти только такие его решения $(x_0;\ y_0)$, где x_0, y_0 — целые числа, то это уравнение называют **линейным диофантовым уравнением.**

Например, уравнение $2x + 3y = 1$ — это линейное диофантово уравнение, если поставлена задача найти только целые его решения.

Далее на характерных примерах будет рассмотрено решение линейных диофантовых уравнений.

Пример. Решим линейное диофантово уравнение

$$2x + 3y = 6. \qquad (2)$$

Выразим y через x из уравнения (2):

$$y = 2 - \frac{2}{3}x. \qquad (3)$$

Из равенства (3) видно, что y будет целым только тогда, когда целое число x делится на 3, т. е. $x = 3x_1$, где x_1 — некоторое целое число. Тогда

$$y = 2 - 2x_1.$$

Таким образом, решениями уравнения (2) являются все пары чисел $(3x_1;\ 2 - 2x_1)$, где x_1 — любое целое число.

Приведём некоторые частные решения этого уравнения.

При $x_1 = 0$ имеем $x = 3x_1 = 0$ и $y = 2 - 2x_1 = 2$; решением уравнения (2) является пара (0; 2).

При $x_1 = 1$ имеем $x = 3x_1 = 3$ и $y = 2 - 2x_1 = 0$; решением уравнения (2) является пара (3; 0) и т. д.

Линейные диофантовы уравнения возникают при решении некоторых задач.

Задача 1. У покупателя и продавца имеются монеты только по 2 р. и 5 р. Сможет ли покупатель заплатить за покупку стоимостью 1 р.?

Решение. Если покупатель даст x монет по 2 р. и y монет по 5 р., то он заплатит $(2x + 5y)$ р., или 1 р. Следовательно,

$$2x + 5y = 1. \qquad (4)$$

Найдём все пары целых чисел, являющиеся решениями линейного диофантова уравнения (4). Выразим x через y из уравнения (4):

$$x = -2y + \frac{1 - y}{2}. \qquad (5)$$

Из равенства (5) видно, что x будет целым только тогда, когда y будет нечётным числом: $y = 2n + 1$, где n — целое число. Тогда $x = -5n - 2$.

Таким образом, решениями уравнения (4) являются все пары чисел $(-5n - 2; 2n + 1)$, где n — любое целое число.

Итак, способов оплаты товара стоимостью 1 р. бесконечно много. При этом надо иметь в виду, что если, например, x окажется отрицательным, то это означает, что покупатель должен получить сдачу: x монет по 2 р.

Например, пара $(-2; 1)$ есть решение уравнения (4), это означает, что покупатель дал 1 монету по 5 р. и получил сдачу 2 монеты по 2 р.

Пара $(3; -1)$ есть решение уравнения (4), это означает, что покупатель дал 3 монеты по 2 р. и получил сдачу 1 монету по 5 р.

Задачи, приводящие к диофантовым уравнениям, часто содержат неизвестные величины, которые по смыслу задачи должны выражаться натуральными числами. Рассмотрим решение старинной задачи.

Задача 2. Двенадцать человек несут 12 хлебов; каждый мужчина несёт по 2 хлеба, женщина — по половине хлеба, ребёнок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

Решение. Пусть было x мужчин, y женщин, тогда детей было $12 - x - y$. Все вместе они несли $2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}(12 - x - y)$ хлебов. Составим уравнение:

$$2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}(12 - x - y) = 12.$$

Умножим правую и левую части этого уравнения на 4, после преобразований получим равносильное ему уравнение

$$7x + y = 36,$$

решением которого является пара чисел $(x; y)$: $x = 5 - n$, $y = 1 + 7n$, где n — любое целое число. Чтобы x, y и $(12 - x - y)$ были натуральными числами, можно взять только одно значение n, равное 0. При этом $x = 5$, $y = 1$, $12 - x - y = 6$, т. е. было 5 мужчин, 1 женщина и 6 детей.

Ответ: 5 мужчин, 1 женщина и 6 детей.

Приведём ещё две старинные задачи.

Задача 3. *Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи).* Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждых трёх воробьёв заплачена 1 монета, за каждых двух горлиц — также 1 монета и, наконец, за каждого голубя — по 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?

Решение. Пусть купили x воробьёв, y горлиц, тогда голубей купили $30 - x - y$. Здесь x и y — натуральные числа.

Составим уравнение:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2(30 - x - y) = 30. \tag{6}$$

Умножив это уравнение на 6, получим равносильное ему уравнение

$$2x + 3y + 12(30 - x - y) = 180,$$

которое после упрощения запишем в виде

$$10x + 9y = 180. \tag{7}$$

Из уравнения (7) следует, что y делится на 10, т. е. $y = 10y_1$, где y_1 — натуральное число. Подставим $10y_1$ вместо y в уравнение (7) и упростим его:

$$x + 9y_1 = 18. \tag{8}$$

Из уравнения (8) следует, что x делится на 9, т. е. $x = 9x_1$, где x_1 — натуральное число. Подставим $9x_1$ вместо x в уравнение (8) и упростим его:

$$x_1 + y_1 = 2.$$

Это уравнение имеет единственное решение в натуральных числах: $x_1 = 1$; $y_1 = 1$, по которому, пользуясь формулами $x = 9x_1$ и $y = 10y_1$, найдём натуральные решения уравнений (6) и (7): $x = 9$, $y = 10$.

Итак, на 30 монет купили 9 воробьёв, 10 горлиц и $30 - 10 - 9 = 11$ голубей.

Ответ: 9 воробьёв, 10 горлиц и 11 голубей.

Задача 4. *Задача Л. Эйлера.* Некий чиновник купил лошадей и быков за 1770 талеров. За каждую лошадь он уплатил по 31 талеру, а за каждого быка — по 21 талеру. Сколько лошадей и быков купил чиновник?

Решение. Пусть чиновник купил x лошадей и y быков. Тогда

$$31x + 21y = 1770. \tag{9}$$

По смыслу задачи x и y — натуральные числа. Так как 21 и 1770 делятся на 3, то $31x$ делится на 3, т. е. x делится на 3: $x = 3x_1$, где x_1 — натуральное число. Тогда

$$31x_1 + 7y = 590,$$

откуда $x_1 = \frac{590 - 7y}{31}$.

Преобразуем полученное выражение:

$$x_1 = \frac{590 - 7y}{31} = 19 + \frac{1 - 7y}{31} = 19 - \frac{7y - 1}{31}.$$

Очевидно, что x_1 будет целым, если $7y - 1$ делится на 31.

Наименьшее натуральное y, при котором это произойдёт, равно 9. При этом $x_1 = 17$, $x = 51$. Первое решение уравнения (9) найдено: (51; 9).

Чтобы не заниматься долгим перебором значений y, заметим, что следующие целые x_1 будут получаться в результате увеличения $y = 9$ на число, кратное 31. В самом деле, увеличим $y = 9$ на k:

$$x_1 = 19 - \frac{7 \cdot (9 + k) - 1}{31} = 19 - \frac{62 + 7k}{31} = 17 - \frac{7k}{31}.$$

Теперь видно, что x_1 будет целым, если $7k$ делится на 31, т. е. если k делится на 31.

При $y = 9 + 31 = 40$ имеем $x_1 = 10$, $x = 30$,
при $y = 40 + 31 = 71$ имеем $x_1 = 3$, $x = 9$.

При следующих значениях y значения x_1 отрицательны. Таким образом, уравнение (9) имеет 3 решения в натуральных числах: (51; 9), (30; 40), (9; 71).

Ответ: чиновник купил лошадей и быков 51 и 9, или 30 и 40, или 9 и 71.

763. Решите линейное диофантово уравнение:
а) $3x + 5y = 10$; б) $2x - 5y = 15$; в) $2x + 3y = 5$;
г) $7x - 5y = 2$; д) $2x + 7y = 14$; е) $3x + 5y = 60$.

764. Объясните, почему уравнение:
а) $2x + 6y = 11$; б) $3x - 9y = 10$;
в) $7x - 21y = 12$
не имеет решений в целых числах.

765. *Старинная задача.* У покупателя и продавца есть купюры по 5 р. и 50 р. Сможет ли покупатель заплатить за покупку стоимостью:
а) 112 р.; б) 30 р.?

766. Объясните, почему уравнение:
а) $x + y = 5{,}5$; б) $3x - 2y = 1{,}1$;
в) $6x + 9y = 2$; г) $2x + 4y = -1$
не имеет решений в целых числах.

767. В комнате стоят стулья и табуретки. У каждого стула 4 ножки, а у каждой табуретки 3 ножки. Если на всех стульях и табуретках сидят люди, то всего «ног» 39. Сколько в комнате стульев и сколько табуреток?

768. Купили 40 птиц за 40 монет. За каждых трёх воробьёв платили 1 монету, за каждых двух горлиц платили 1 монету, а за каждого голубя — 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?

769. *Задача Джан Цюцзяня (Китай, V в.).* 1 петух стоит 5 цяней (денежных единиц), 1 курица стоит 3 цяня, 3 цыплёнка стоят 1 цянь. Всего на 100 цяней купили 100 птиц. Спрашивается, сколько было в отдельности петухов, кур, цыплят.

770. *Задача Адама Ризе (XVI в.).* 26 персон издержали вместе 88 марок, причём мужчины издержали по 6 марок, женщины — по 4, девушки — по 2. Сколько было мужчин, женщин и девушек?

771. *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Купил некто на 80 алтын гусей, уток и чирков. Гуся покупал по 2 алтына, утку — по 1 алтыну, чирка же — по 3 деньги, а всех куплено 80 птиц. Спрашивается, сколько каких птиц он купил.
(1 алтын = 3 к., 1 деньга = 0,5 к.)

772. *Старинная задача.* Хозяин послал работника на базар купить 20 птиц: гусей, уток и малых чирков. Он дал работнику 16 алтын. Гусей велел покупать по 3 копейки за штуку, уток — по копейке, а малых чирков — по два на копейку. Сколько гусей, уток и чирков купил работник?

773. **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о Диофанте и задачах из его «Арифметики».

2. Метод Гаусса

К. Гаусс

Для решения систем линейных уравнений мы применяли метод подстановки, разобранный выше. Для решения систем уравнений применяют ещё метод Гаусса, названный так в честь немецкого математика Карла Гаусса (1777—1855). Ниже на примерах рассмотрев этот метод.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 7y = -10, \\ 3y = 12. \end{cases} \qquad (1)$$

Из второго уравнения найдём $y = 4$; подставив 4 вместо y в первое уравнение, найдём $x = 9$.

Система уравнений (1) имеет единственное решение (9; 4).

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5, \\ 2y + z = 7, \\ 5z = 15. \end{cases} \qquad (2)$$

Из третьего уравнения найдём $z = 3$; подставив 3 вместо z во второе уравнение, найдём $y = 2$. Наконец, подставив 3 вместо z и 2 вместо y в первое уравнение, найдём $x = 1$.

Система уравнений (2) имеет единственное решение (1; 2; 3).

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y + z + u = 11, \\ \quad 2y - z + 2u = -9, \\ \qquad z - u = 5, \\ \qquad\quad 2u = -4. \end{cases} \tag{3}$$

Из четвёртого уравнения найдём $u = -2$, из третьего $z = 3$, из второго $y = -1$, из первого $x = 3$.

Итак, система уравнений (3) имеет единственное решение (3; –1; 3; –2).

Системы уравнений вида (1), (2) и (3) называют системами «треугольного» вида; такие системы легко решать, начиная с самого простого уравнения, затем переходя к следующему по простоте уравнению и т. д.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений заключается в том, что систему сначала приводят к «треугольному» виду, а затем решают так, как это было показано выше. Покажем, как решать систему уравнений методом Гаусса.

Пример 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} -5x + 3y - z = -7, \\ 2x - 5y + 4z = -8, \\ 3x + 4y - 2z = 12. \end{cases} \left|\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ \end{matrix}\right| \begin{matrix} -2 \\ \\ 1 \end{matrix}$$

С помощью первого уравнения исключим z из второго и третьего уравнений. Для этого умножим правую и левую части первого уравнения на 4 (число справа от черты означает, что уравнение нужно умножить на это число) и сложим почленно полученное уравнение со вторым уравнением. Потом умножим правую и левую части первого уравнения на –2 и сложим почленно полученное уравнение с третьим уравнением.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} -5x + 3y - z = -7, \\ -18x + 7y = -36, \\ 13x - 2y = 26. \end{cases} \left|\begin{matrix} \\ 2 \\ 7 \end{matrix}\right.$$

Теперь с помощью второго уравнения исключим y из третьего уравнения. Для этого умножим правую и левую части второго уравнения на 2, а правую и левую части третьего уравнения — на 7 и сложим почленно полученные уравнения.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} -5x + 3y - z = -7, \\ -18x + 7y = -36, \\ 55x = 110 \end{cases}$$

«треугольного» вида. Решение этой системы нетрудно найти. Это тройка чисел (2; 0; –3).

774. Решите систему уравнений «треугольного» вида:

а) $\begin{cases} y = 3, \\ x - 4y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x = 7, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x = 6, \\ -3x + 5y = 16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} z = 2, \\ 4y - 3z = 2, \\ 3x + 4y - 6z = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x = -6, \\ 3x - y = 0, \\ -x + y - z = -6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -x + y + z = 5, \\ 4x - 3y = 5, \\ 3x = 15. \end{cases}$

775. Решите методом Гаусса систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 5y = 1, \\ x - 10y = -8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x + 3y = 0, \\ 4x - 5y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 4y = -1, \\ 5x + 6y = 11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 3y - 4z = 7, \\ 3x - 4y + 5z = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x + y - z = -1, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ -x + 5y - 3z = -3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -3x + 5y - 2z = 0, \\ 3x - 2y + 5z = 6, \\ 4x + 2y - 5z = 1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y - z = 1, \\ -x + y + z = -1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + 2z = 6, \\ -x + 3y - z = 2; \end{cases}$

и) $\begin{cases} -2x + 7y - 4z = 1, \\ 4x - 8y + 5z = 1, \\ 3x + 2y - 4z = 1; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 3, \\ x + 3y + 2z = 3, \\ 2x + y + 3z = 2. \end{cases}$

776. **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о К. Гауссе и его вкладе в математику.

3. Исторические сведения

Задачи, решаемые с помощью уравнений, встречаются во многих текстах глубокой древности. Уже около 4000 лет назад вавилоняне и египтяне решали разные задачи землемерия, строительства и военного дела с помощью уравнений. Уравнения первой степени умели решать также китайские и индийские учёные. В папирусе Ахмеса, например, содержатся задачи, в которых неизвестное обозначали специальным символом, называемым «хау» или «аха» и обозначавшим «количество», «кучу». Однако развитие алгебры как науки долго сдерживалось отсутствием удобных обозначений, над которыми можно было бы выполнить действия. Греческий математик Диофант, живший в III в. в городе Александрии, написал трактат «Арифметика», в котором он свободно обращался с линейными и другими уравнениями, использовал буквы и значки для обозначения неизвестных и их степеней (рис. 16).

x^0	$\overset{0}{M}$
x^1	S
x^2	Δ^Y
x^3	K^Y
x^4	$\Delta^Y\Delta$
x^5	ΔK^Y
x^6	K^YK

Рис. 16

Эта книга в основном посвящена решению уравнений в целых числах. Диофантовы уравнения играют важную роль в математике. Л. Эйлер писал: «Диофантовых уравнений анализ немало служит изощрению разума начинающих и большое проворство в исчислении приносит». Но ещё долго применение уравнений сдерживалось отсутствием действий с отрицательными числами, правила переноса слагаемых из одной части уравнения в другую.

В IX в. узбекский математик и астроном Мухаммед аль-Хорезми написал труд под названием «Книга о восстановлении и противопоставлении». Восстановлением он называл перенос вычитаемого из одной части уравнения в другую, где оно становится слагаемым; противопоставлением — собирание неизвестных в одну часть уравнения, а известных — в другую. По-арабски слово «восстановление» — «альджебр». Отсюда происходит название науки — алгебра.

Буквы и различные математические знаки вошли в употребление не сразу, а в результате долгого развития математики. До XV в. все величины и действия, условия и ответы выражались в основном только словами. Алгебру тех времён называют поэтому риторической, т. е. словесной. Лишь во второй половине XV в. в нескольких странах Европы были введены первые алгебраические символы и положено начало употреблению букв.

В конце XVI в. французский математик Франсуа Виет (1540—1630) ввёл буквы для обозначения не только неизвестных, но и любых чисел. Это был решительный шаг для перехода от риторической к новой — символической алгебре. Интересно, что Ф. Виет любил разгадывать зашифрованные письма. Во время войны Франции с Испанией вся тайная переписка испанцев свободно читалась французами, так как Виет всякий раз разгадывал испанский шифр, как бы его ни запутывали вражеские шифровальщики. При этом ещё не разгаданные буквы он обозначал последними буквами латинского алфавита x, y, z. До сих пор при решении математических задач неизвестные величины мы обозначаем чаще всего именно последними буквами латинского алфавита.

Создание алгебраической символики, происходившее в Италии, Германии, Франции, Нидерландах и Англии, было в основном завершено в XVII в. Однако лишь в первой половине XVIII в. установилась общепринятая система знаков в алгебре. В школьной же практике задачи, которые мы решаем теперь с помощью уравнений первой степени, решали довольно сложными рассуждениями, например методом ложных положений.

777. Ищем информацию. Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение:
а) о Л. Ф. Магницком и его «Арифметике»;
б) о способах решения линейных диофантовых уравнений.

Задания для повторения

Натуральные числа

778. Определите порядок действий, найдите значение выражения:
а) $672 : 42 + 21 \cdot 39$; б) $989 : 43 - 912 : 48$;
в) $(720 - 695) \cdot (975 : 25)$; г) $(109 + 839) : (312 - 233)$;
д) $65\,254 : 79 - 75\,563 : 97$; е) $37\,115 : 65 + 72\,675 : 85$;
ж) $407 \cdot 720 - 350 \cdot 509 - 43\,272 : 72$;
з) $564 \cdot 702 - 164 \cdot 756 + 148 \cdot 916 - 48\,762 : 86$;
и) $8694 : (4096 - (1458 + 2316))$;
к) $18\,072 : (6013 - 23 \cdot 65)$.

779. Вычислите:
а) $68 \cdot 48 + 68 \cdot 52$; б) $59 \cdot 37 + 59 \cdot 63$;
в) $87 \cdot 29 + 87 \cdot 71$; г) $17 \cdot 73 - 63 \cdot 17$;
д) $382 \cdot 500 - 400 \cdot 382$; е) $756 \cdot 350 + 756 \cdot 650$;
ж) $352 \cdot 18 : 9$; з) $748 \cdot 36 : 18$;
и) $126 \cdot 96 : 32$; к) $172 \cdot 256 : 128$.

780. Представьте числовое выражение в виде произведения возможно большего числа множителей, отличных от 1:
а) $40 \cdot 24$; б) $12 \cdot 25$; в) $164 \cdot 125$; г) $112 \cdot 147$.

781. Определите, являются ли данные числа простыми или составными:
а) 89, 123, 279; б) 335, 642, 601.

782. Запишите произведение в виде степени:
а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; б) $2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2$; в) $3 \cdot 3^2 \cdot 3$; г) $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2$.

783. Запишите в виде степени числа 10:
а) 10; б) 100; в) 1000; г) 1 000 000; д) 1 000 000 000 000;
е) число, записанное единицей с тридцатью нулями.

784. Данные числа запишите в виде степеней простых чисел или произведения степеней простых чисел:
а) 64, 128, 200; б) 144, 256, 333;
в) 346, 125, 512; г) 1728, 10 000, 4096;
д) 250 000, 75 000 000, 120 000 000.

785. Запишите данное числовое выражение в виде квадрата некоторого числа:
а) $32 \cdot 2$; б) $8 \cdot 2$; в) $4^2 \cdot 4$; г) $3^4 \cdot 4^2$.

786. Запишите:
а) 10^2 в виде произведения двух квадратов;
б) 12^3 в виде произведения двух кубов;
в) 3^{12} в виде квадрата;
г) 3^{12} в виде куба;

д) 7^4 в виде квадрата;
е) 4^5 в виде произведения квадрата и куба;
ж) 6^7 в виде произведения квадрата и куба.

Сравните значения числовых выражений (787—788):

787. а) $(2^4)^2$ и $2^{4 \cdot 2}$; б) $(3^2)^2$ и $3^{2 \cdot 2}$;
в) $(5^2)^4$ и $5^{2 \cdot 4}$; г) $(4^3)^2$ и $4^{3 \cdot 2}$;
д) $(2 \cdot 5)^2$ и 10^2; е) $(2 \cdot 5)^3$ и 10^3;
ж) $(3 \cdot 4)^3$ и $3^3 \cdot 4^3$; з) 2^4 и 4^2.

788. а) 4^8 и 8^6; б) 14^4 и 2^{16}; в) 10^{20} и 20^{10}; г) 10^{10} и 90^{10}.

789. Справедливы ли равенства (n и k — натуральные числа):
а) $(a^k)^n = (a^n)^k$; б) $n^k = k^n$?

790. 1) Между какими степенями числа 2 расположено число:
а) 6; б) 13; в) 67; г) 255; д) 1025?
2) Между какими степенями числа 10 расположено число:
а) 32; б) 167; в) 3576; г) 12 784; д) 1 000 034?

791. Числа 6, 18, 30, 42 представьте в виде суммы степеней числа 2.

792. Разложите число на простые множители:
а) 254; б) 1276; в) 1654; г) 2048;
д) 144; е) 21^6; ж) 1256; з) 2544.

793. Существуют ли чётные простые числа?

794. Чтобы узнать, является ли число простым, его делят на простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, ... На каком простом числе можно прекращать испытание для числа:
а) 781; б) 1023; в) 1783; г) 2587?

795. а) Какой цифрой не может оканчиваться квадрат натурального числа?
б) В каких случаях квадрат натурального числа является чётным числом?
в) Какими цифрами оканчиваются кубы последовательных натуральных чисел? В какой последовательности повторяются эти цифры?

796. Допишите к числу 378 справа такие три цифры, чтобы полученное шестизначное число делилось на 6, 7 и 9.

797. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2 остаток 1, на 3 остаток 2, на 4 остаток 3, на 5 остаток 4, на 6 остаток 5, на 7 остаток 6, на 8 остаток 7, на 9 остаток 8, на 10 остаток 9.

798. Сравните значения числовых выражений:
а) $5^{10} \cdot 5^{10}$ и $(3 \cdot 5)^{10}$; б) 8^{40} и 72^{20}; в) 21^4 и 28^3;
г) 63^{30} и 9^{60}; д) 9^4 и 27^3; е) 8^9 и 4^{14}.

799. Вычислите:
а) $25^4 \cdot 4^5$; б) $5^6 \cdot 2^7$; в) $125^2 \cdot 8^2$.

Целые числа

800. Вычислите:

а) $3 - 2$; б) $-3 - 2$; в) $-6 + 5$;
г) $2 - 7$; д) $5 - 2 - 3$; е) $4 + 1 - 8$;
ж) $-2 - 2 + 5$; з) $-4 - 1 - 5$; и) $-4 + 5 + 2$;
к) $4 + 2 - 9 - 1$; л) $2 - 5 - 6 + 1$; м) $-3 - 5 - 4 + 7$.

801. Вычислите:

а) $100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \ldots - 96 - 97 - 98 - 99 - 100$;
б) $100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot \ldots \cdot (-96) \cdot (-97) \cdot (-98) \cdot (-99) \cdot (-100)$.

802. Найдите значение выражения:

а) $|-2| + |-1|$; б) $|7| - |-11|$; в) $|5 - 7|$; г) $7 - |-5 - 67|$.

Вычислите (**803—804**):

803. а) $(-2)^2$; $(-2)^3$; $(-2)^4$; $(-2)^5$; б) -3^4; $(-7)^2$; 0^{10}; $(-1)^5$; -1^3;
в) $(-1)^{11} - (-1)^{11}$; г) $(-1)^4 - (-1)^3 - (-1)^2$;
д) $(-2)^5 - (-3)^3$; е) $(-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4$.

804. а) $3 \cdot (-2)^2$; б) $-4 \cdot (-3)^3$; в) $-(-3)^4$; г) $-(-2)^3$;
д) $-(-0{,}3)^2$; е) $-(-0{,}5)^3$; ж) $(-3^2)^3$; з) $(-1)^{1999}$;
и) $(-1)^k + (-1)^{k+1}$, где k — целое число.

Обыкновенные дроби

805. Сократите дробь:

а) $\frac{24}{36}$; б) $\frac{108}{252}$; в) $\frac{144}{216}$; г) $\frac{1800}{4500}$.

806. Вместо звёздочки подберите число так, чтобы равенство было верным:

а) $\frac{6}{9} = \frac{*}{3}$; б) $\frac{28}{40} = \frac{*}{10}$; в) $\frac{12}{32} = \frac{3}{*}$; г) $\frac{15}{75} = \frac{1}{*}$;
д) $\frac{64}{36} = 1\frac{7}{*}$; е) $\frac{276}{108} = 2\frac{*}{9}$; ж) $7 = \frac{*}{2}$; з) $1\frac{1}{3} = \frac{*}{3}$.

807. **Доказываем.** Докажите, что:

а) $\frac{171\,717}{252\,525} = \frac{1717}{2525} = \frac{17}{25}$; б) $\frac{313\,131}{757\,575} = \frac{3131}{7575} = \frac{31}{75}$.

808. Укажите число, обратное данному числу:

а) 2; б) $\frac{1}{5}$; в) $2\frac{1}{3}$; г) $1{,}3$.

809. Сравните числа:

а) $\frac{7}{8}$ и $\frac{5}{8}$; б) $1\frac{1}{7}$ и $\frac{8}{7}$; в) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$;
г) $\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{4}$; д) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$; е) $\frac{10}{7}$ и $1\frac{3}{6}$.

Вычислите (810—815):

810. а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{7}+\frac{5}{7}$; в) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$;

г) $1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$; д) $2\frac{7}{9}+\frac{4}{9}$; е) $3\frac{2}{5}+12\frac{4}{5}$.

811. а) $\frac{9}{11}-\frac{8}{11}$; б) $\frac{6}{7}-\frac{2}{7}$; в) $1-\frac{1}{9}$;

г) $12-\frac{1}{3}$; д) $127-\frac{2}{5}$; е) $193-\frac{4}{9}$;

ж) $13\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$; з) $13\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; и) $15\frac{4}{5}-8\frac{2}{5}$;

к) $20\frac{3}{8}-16\frac{1}{4}$; л) $3\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$; м) $2\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$;

н) $10\frac{1}{5}-\frac{2}{5}$; о) $\frac{3}{7}-\frac{4}{5}$; п) $3\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}$.

812. а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{6}\cdot\frac{6}{7}$; в) $\frac{7}{8}\cdot\frac{24}{49}$; г) $\frac{100}{121}\cdot\frac{55}{144}$; д) $\frac{3}{8}\cdot 2$;

е) $\frac{4}{5}\cdot 6$; ж) $3\cdot 1\frac{1}{8}$; з) $0\cdot\frac{1}{4}$; и) $4\cdot 2\frac{1}{12}$.

813. а) $4\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{14}$; б) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{14}$; в) $\frac{2}{3}\cdot 1\frac{1}{8}$; г) $5\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{34}$;

д) $\frac{4}{7}\cdot 3\frac{1}{16}$; е) $1\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}$; ж) $2\frac{1}{7}\cdot 1\frac{13}{15}$; з) $10\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2}$.

814. а) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{5}:\frac{15}{18}$; в) $\frac{14}{15}:\frac{18}{25}$; г) $\frac{3}{7}:\frac{63}{84}$;

д) $\frac{2}{3}:2$; е) $\frac{6}{7}:3$; ж) $10:\frac{5}{7}$; з) $\frac{9}{10}:13$;

и) $1\frac{1}{3}:8$; к) $10:2\frac{1}{2}$; л) $3\frac{2}{5}:34$; м) $18:7\frac{1}{5}$.

815. а) $\left(4\frac{2}{8}+5\frac{1}{2}\right)\cdot 6$; б) $\left(4-1\frac{1}{3}\cdot 2\right)\cdot\frac{1}{2}$;

в) $6\frac{3}{5}\cdot 7\frac{1}{6}-2\frac{1}{6}\cdot 6\frac{3}{5}$; г) $3\frac{3}{4}\cdot 3\frac{3}{4}+3\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}$.

Рациональные числа

Вычислите (816—823):

816. а) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{7}-\frac{4}{5}$; в) $-\frac{2}{8}+\frac{7}{9}$;

г) $-\frac{3}{8}-\frac{7}{12}$; д) $2-3\frac{1}{2}$; е) $4\frac{1}{3}-5$;

ж) $3\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}$; з) $-8\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}$; и) $5\frac{1}{7}-7\frac{5}{6}$.

817. а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; б) $17-\frac{1}{3}$; в) $1278-\frac{2}{7}$; г) $\frac{1}{2}-3$.

818. а) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$; б) $\dfrac{1\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}}$; в) $1\frac{1}{2}-7\frac{5}{8}$;

г) $2\frac{1}{3}-5\frac{1}{9}$; д) $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}$; е) $1\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}$.

819. а) $25\cdot7\cdot8$; б) $13\cdot12\cdot25$; в) $2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}$;

г) $\frac{1}{7}\cdot7-\frac{1}{6}\cdot6$; д) $36:3\cdot\left(\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{4}\right)$; е) $\left(75-100\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{25}$.

820. а) $\left(8\frac{1}{2}-3\frac{3}{4}\right)\cdot8$; б) $\left(4-1\frac{1}{6}+6\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}$;

в) $3\frac{3}{5}-1\frac{1}{2}+2\frac{2}{5}$; г) $7\frac{3}{8}-4\frac{3}{4}+3\frac{1}{2}$;

д) $\left(4\frac{1}{3}-12\frac{1}{2}-2\frac{1}{5}\right):2$; е) $\left(6\frac{2}{3}-9\frac{3}{5}+15\frac{1}{2}\right):3$.

821. а) $\left(5\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}-5\frac{1}{4}:7\right):3+3\frac{7}{28}$; б) $\left(7\frac{1}{2}\cdot2\frac{2}{3}-12\frac{1}{4}:\frac{7}{9}\right):6+10\frac{1}{8}$;

в) $\left(\frac{21}{113}-\frac{14}{19}+\frac{7}{8}-\frac{28}{41}\right)+\left(\frac{4}{41}-\frac{1}{8}+\frac{2}{19}-\frac{3}{113}\right):\frac{1}{7}$.

822. а) $\dfrac{\frac{5}{14}-\frac{8}{21}}{\frac{16}{21}-1}$; б) $\dfrac{\frac{4}{15}+\frac{7}{12}}{\frac{23}{40}-1}$; в) $\dfrac{36\frac{2}{3}:15+8\frac{2}{3}\cdot7}{12\frac{1}{3}+8\frac{6}{7}:2\frac{4}{7}}$; г) $\dfrac{2\frac{3}{8}:\frac{3}{4}-24\cdot\frac{7}{9}}{7\frac{2}{3}+2:24}$.

823. а) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5\cdot4^5$; б) $(-3)^{16}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^7$; в) $\frac{4^{20}}{8^{13}}$; г) $\frac{2^{10}\cdot25^4}{4\,000\,000}$.

824. а) Парсек (единица длины, принятая в астрономии) равен 30 860 000 000 000 км. Запишите это число с помощью степени числа 10.

б) Если разрезать кубический метр на кубические сантиметры и поставить их друг на друга, то какой высоты получится столб?

825. а) Между единицами энергии существует следующая зависимость: 1 джоуль равен 10^7 эргам, а 1 киловатт-час равен $3{,}6\cdot10^6$ джоулям. Выразите 1 киловатт-час в эргах.

б) В одном грамме воды содержится $3{,}35\cdot10^{22}$ молекул. Сколько цифр в десятичной записи этого числа?

826. Вычислите:

а) $\frac{2 \cdot 3^{20} - 5 \cdot 3^{19}}{9^9}$; б) $\frac{(3 \cdot 2^{20} + 7 \cdot 2^{19}) \cdot 52}{(13 \cdot 8^4)^2}$;

в) $\frac{(3^{15} + 3^{14}) \cdot 2^9}{(3^{14} + 3^{12}) \cdot 1024}$; г) $\frac{25 \cdot (180 \cdot 6^7 - 108 \cdot 6^6)}{216^3 - 36^4}$.

Десятичные дроби

827. Разложите данные дроби в десятичные:

а) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{13}{25}, \frac{11}{16}$; б) $\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{3}{11}, \frac{5}{12}$.

828. Запишите десятичные дроби в виде обыкновенных:

0,25; 0,75; 14,05; 0,125; 0,875; 1,0075.

829. Прочитайте числа: 0,5; 1,24; 12,245; 0,0027.

830. Сравните числа:

а) 0,526471 и 0,524671; б) 2,076812 и 2,076813;
в) 0,247459 и 0,347459; г) 7,127586 и 7,1278.

831. а) Укажите обыкновенную дробь со знаменателем 7, большую 0,5, но меньшую 0,6.
б) Укажите все обыкновенные дроби со знаменателем 13, большие 0,4, но меньшие 0,6. Сколько таких дробей?

Вычислите (832—841):

832. а) $0{,}5 + 0{,}345$; б) $1{,}3 + 0{,}416$; в) $4{,}2 + 1{,}304$;
г) $12{,}4 + 0{,}012$; д) $1{,}47 - 0{,}84$; е) $5{,}12 - 2{,}0904$;
ж) $6{,}45 - 0{,}079$; з) $15{,}2 - 2{,}0904$.

833. а) $8{,}5 \cdot 10$; б) $0{,}68 \cdot 10$; в) $0{,}9 \cdot 100$;
г) $1{,}8 \cdot 1000$; д) $0{,}7 \cdot 4$; е) $76 \cdot 1{,}75$;
ж) $49 \cdot 0{,}3$; з) $0{,}87 \cdot 5$; и) $0{,}15 \cdot 400$.

834. а) $25 \cdot 10$; б) $32{,}9 \cdot 100$; в) $0{,}54 \cdot 10$;
г) $1{,}4 \cdot 1000$; д) $1{,}2 \cdot 4$; е) $50{,}4 \cdot 8$;
ж) $0{,}56 \cdot 4$; з) $3{,}425 \cdot 5$; и) $91{,}8 \cdot 0{,}27$.

835. а) $2{,}3 + (4{,}5 - 27{,}5) : 2{,}3$; б) $(2{,}2 - 1{,}44 \cdot 5) : 2{,}5$;
в) $(0{,}4 - 0{,}45 + 1{,}24) \cdot 5 : 3{,}5$; г) $(1230 \cdot 0{,}01 - 4{,}8) : 2{,}5 \cdot 1{,}6$.

836. а) $(2{,}5 - 5{,}2) \cdot 0{,}4$; б) $(36{,}5 \cdot 5{,}4 + 0{,}6) : 0{,}1$;
в) $(3{,}5 \cdot 24{,}8 + 1{,}2) : 0{,}1$.

837. а) $15 : 7{,}5 + 0{,}12 : 0{,}04 + 1{,}69 : 0{,}13 + 2 : 50$;
б) $0{,}35 : 0{,}07 + 12 : 0{,}3 + 0{,}2 : 5 + 72 : 144$;
в) $72 : 2{,}4 + 6 : 12 + 45 : 4{,}5 + 0{,}84 : 0{,}021$;
г) $0{,}75 : 15 + 18 : 36 + 24 : 0{,}06 + 0{,}52 : 0{,}13$.

838. а) $(0{,}2 : 5 + 5 : 0{,}2 - 2{,}794 : 1{,}1) \cdot 0{,}6 - 13{,}5$;
б) $56{,}32 : 51{,}2 + 48{,}8 : 61 - (2{,}4 - 2{,}4 \cdot 0{,}15)$.

839. а) $2{,}56 : 0{,}128 - 5{,}6$; б) $(-4{,}12) : (-20{,}6) - 5{,}6$;
в) $6{,}4 : (-0{,}32) - 1{,}8 \cdot 10$; г) $10{,}2 : 0{,}24 - 1{,}5 : 0{,}25$;
д) $482{,}28 : 12 - 20{,}19$; е) $33{,}425 : (-3{,}5) + (-2{,}45) \cdot (-4)$;
ж) $(2{,}51 \cdot 5 + 0{,}14 - 0{,}25) \cdot (-5)$;
з) $5{,}6 - (0{,}006 + 0{,}994) \cdot 1{,}2$.

840. а) $\dfrac{3 : (0{,}2 - 0{,}1)}{2{,}5 \cdot (0{,}8 + 1{,}2)}$; б) $\dfrac{(34{,}06 - 33{,}81) \cdot 4}{6{,}84 : (28{,}57 - 25{,}15)}$;
в) $\dfrac{(2{,}3 + 5 : 6{,}25) \cdot 7}{8 \cdot 0{,}0125 + 6{,}9}$; г) $\dfrac{3 : 0{,}25 + 204 : 5}{7{,}62 \cdot 0{,}25 - 0{,}918 : 3{,}6}$.

841. а) $\dfrac{2{,}1 \cdot 10^4 + 0{,}9 \cdot 10^4}{1{,}8 \cdot 10^3}$; б) $\dfrac{2{,}8 \cdot 10^6 - 0{,}3 \cdot 10^6}{1{,}5 \cdot 10^5}$.

842. *Из сборника задач для гимназий (XIX в.).* Вычислите:
а) $\dfrac{(6{,}25 - 3{,}75) \cdot 0{,}8}{(4 - 2{,}75) : 6{,}25} + \dfrac{(2{,}5 + 0{,}75) : 3{,}25}{(40 - 38{,}8) \cdot 5}$;
б) $\dfrac{(7{,}3 + 2{,}7) \cdot 0{,}1}{(3{,}5 - 1{,}5) : 0{,}5} - \dfrac{(4{,}45 - 2{,}2) : 0{,}3}{(0{,}823 + 0{,}177) \cdot 30}$;
в) $\left(\dfrac{0{,}3 \cdot (1{,}5 - 0{,}7)}{0{,}5 \cdot (0{,}47 + 0{,}53)} + \dfrac{(0{,}2 - 0{,}15) : 0{,}001}{(4{,}7 - 3{,}9) \cdot 10}\right) : 26{,}92$;
г) $26 : \left(\dfrac{3 : (0{,}2 - 0{,}1)}{2{,}5 \cdot (0{,}8 + 1{,}2)} + \dfrac{(34{,}06 - 33{,}81) \cdot 4}{6{,}84 : (28{,}57 - 25{,}15)}\right)$;
д) $\left(\dfrac{(11 - 9{,}5) : 0{,}003}{(4{,}05 - 3{,}65) \cdot 20} - \dfrac{0{,}45 - 0{,}225}{13{,}625 : (2{,}6 + 0{,}125)}\right) : 62{,}455$.

Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями

Вычислите (843—854):

843. а) $3{,}2 - 2\frac{1}{3}$; б) $7\frac{1}{5} - 3{,}4$; в) $1{,}1 - 7\frac{3}{8}$;
г) $4\frac{1}{3} - 5{,}75$; д) $8{,}12 - 4\frac{7}{9}$; е) $2\frac{1}{5} - 8\frac{4}{7}$.

844. а) $3 : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$; б) $1\frac{1}{5} - \frac{1}{5} : 2$;
в) $3 : \frac{1}{2} - 0{,}4$; г) $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) : 0{,}5$;
д) $7\frac{1}{3} \cdot 5{,}5 - 3\frac{1}{3} \cdot 5{,}5$; е) $3{,}75 \cdot 1\frac{11}{14} - \frac{2}{7} \cdot 3\frac{3}{4}$.

845. а) $\left(1{,}6-2\frac{1}{6}+\frac{41}{90}\right)\cdot 3\frac{3}{5}-0{,}25:1{,}25$;

б) $3{,}25:3\frac{1}{5}+6{,}75\cdot\left(\frac{47}{60}-2\frac{17}{45}+1{,}65\right)$;

в) $12:7\frac{1}{2}+7{,}5:12+\frac{1}{4}:0{,}4\cdot(5{,}1-3{,}86)$;

г) $12:1\frac{1}{2}+13{,}2:11+\left(0{,}7:1\frac{3}{4}\right)\cdot(0{,}276:0{,}23)$.

846. а) $\left(14{,}05-1\frac{1}{4}\right):0{,}04-13{,}8\cdot 13$;

б) $\left(1{,}75:\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}:1{,}25\right)\cdot 6$;

в) $\left(2-\frac{1}{4}\cdot 0{,}8\right):\left(0{,}16:\frac{1}{2}+0{,}01\right)$;

г) $3\frac{3}{4}\cdot 12+(2{,}55+2{,}7)\cdot\left(0{,}1-\frac{1}{80}\right)$.

847. а) $\frac{10}{21}\cdot 2{,}1-3{,}04:\frac{76}{25}+20{,}02\cdot\frac{50}{1001}-125{,}125:\frac{1001}{8}$;

б) $3\cdot(0{,}1)^2+3:100+3\cdot\frac{1}{100}-3\cdot 0{,}01-3:10^2-3:100$;

в) $\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}$;

г) $0{,}4+0{,}8\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}$.

848. а) $\frac{5}{12}:\left(\frac{1}{3}\cdot 2{,}5-\frac{7}{8}\right)-1{,}25$;

б) $\left(3\frac{5}{18}-7\frac{1}{12}+2\frac{2}{9}\right)\cdot(2{,}448:1{,}2)$;

в) $\left(\frac{5}{9}-1\frac{1}{6}\cdot 0{,}5\right):\frac{5}{9}-\frac{1}{3}$;

г) $\frac{1}{3}\cdot(0{,}216:0{,}2-0{,}12\cdot 10)$;

д) $\left(2{,}4\cdot 0{,}5-2:\frac{1}{2}\right):0{,}1$;

е) $3{,}6:\left(68{,}1:7{,}5-8\frac{17}{20}+2\frac{1}{50}\right)+4\frac{5}{6}\cdot\frac{33}{58}$;

ж) $0{,}3-4{,}2:\left(2{,}25-1\frac{7}{8}\cdot 3\frac{1}{3}\right)$.

849. а) $\left(3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}\right):\left(\frac{62}{75}-0{,}16\right)$;

б) $\left(8{,}5-7\frac{3}{8}\right)\cdot 5\frac{2}{3}-1{,}8\left(3\frac{1}{3}-2\frac{7}{9}\right)$.

850. а) $\dfrac{\left(10\frac{3}{7}-4\frac{5}{9}-5\frac{8}{21}\right)\cdot 6{,}3+0{,}02}{20}$;

б) $\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{7{,}5\cdot 3+3\cdot 2{,}5}$;

в) $\dfrac{8\frac{3}{5}+1\frac{1}{2}:1\frac{3}{4}+2\frac{2}{5}}{\frac{1}{7}\cdot 15{,}5-\frac{1}{7}\cdot 7{,}2}$.

851. а) $\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}+3{,}75\right)\cdot\frac{7}{135}}{\frac{5}{9}}$;

б) $\dfrac{0{,}134+0{,}05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}$;

в) $\dfrac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}$;

г) $\dfrac{(0{,}6+0{,}425-0{,}005)\cdot 0{,}01}{30\frac{5}{9}+3\frac{4}{9}}$.

852. а) $\dfrac{12{,}8\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4{,}125}{2\frac{4}{7}:\frac{3}{35}}$;

б) $\dfrac{28{,}8:13\frac{5}{7}+6{,}6\cdot 1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{80}:1{,}35}$;

в) $\dfrac{6{,}72:\frac{3}{5}+1\frac{1}{8}\cdot 0{,}8}{4{,}84:4}-6\frac{3}{8}$;

г) $\dfrac{\left(6\frac{7}{12}-3\frac{17}{36}\right)\cdot 2{,}5-4\frac{1}{3}:0{,}65}{4:\frac{1}{4}-0{,}5}$.

853. а) $\dfrac{0{,}5+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+0{,}125}{\frac{1}{3}+0{,}4+\frac{14}{15}}+\dfrac{(3{,}75-0{,}625)\cdot\frac{48}{125}}{12{,}8\cdot 0{,}25}$;

б) $\dfrac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\dfrac{5}{7}-\dfrac{\left(2\frac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\frac{1}{2}}$.

854. а) $0{,}6^2$; $1{,}12^2$; $12{,}1^2$; $0{,}007^2$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; $\left(\frac{2}{7}\right)^2$; $\left(\frac{9}{11}\right)^2$.

Действительные числа

Сравните (855—856):

855. а) 3^2 и 2^3; б) 2^5 и 5^2; в) $0{,}5^2$ и $0{,}4^2$;

г) $1{,}1^2$ и $2{,}1^2$; д) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ и $\left(\frac{5}{4}\right)^2$; е) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3$ и $2{,}4^2$;

ж) $0{,}5^2$ и $0{,}5^3$; з) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^3$; и) $(-0{,}3)^2$ и $(-0{,}4)^2$.

856. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ и $\left(\frac{1}{9}\right)^2$;

в) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ и $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; г) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$;

д) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$; е) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$;

ж) $1\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(1\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2\right)$ и 1;

з) $\frac{1}{2} \cdot \left(\left(2\frac{1}{3}\right)^2 - 31 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - 1$ и 1.

Расположите в порядке возрастания значений числовых выражений (857—858):

857. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\frac{2}{3}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$, $\frac{5}{9}$;

б) $\frac{1}{2}$, $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$, $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$.

858. а) $(-0{,}5)^2$, $-16{,}1$ и 4;

б) $(-5)^3$, 0,1 и $2{,}1^3$;

в) $8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, $8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ и $8 : \left(-\frac{1}{2}\right)$.

859. Сравните значения числовых выражений:

а) $(-0{,}2)^3 \cdot 10^5$ и $\left(-\frac{6}{10}\right)^2$; б) $1{,}2^2$ и 1,(4);

в) 2,(5) и $\left(3\frac{2}{9} + 1\frac{8}{9}\right) \cdot \frac{1}{2}$; г) $(-0{,}5)^2 \cdot (-5)^3$ и $-31{,}(3)$;

д) $9^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$ и 0,333; е) $16^2 \cdot 8^3 \cdot 0{,}25^8$ и 2.

Расположите числа в порядке возрастания **(860—861)**:

860. а) $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{21}$; $\frac{11}{40}$; $\frac{3}{11}$; 0,(28); б) 2,(5); 2,5; 2,(56);

в) −2,(1); −2,1; −2,(01); г) −0,(4); $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{4}$;

д) 3,145926; $\frac{22}{7}$; 3,(14); е) −3,(3); $-3\frac{2}{9}$; $-3\frac{2}{3}$.

861. $1\frac{1}{9}$; −0,21212121; 1,112; −0,(2); $1\frac{1}{11}$; 1,(1); −0,(21); −0,2.

862. а) Каково наибольшее действительное число, меньшее 0,9, в десятичную запись которого не входит цифра 9?
б) Существует ли наименьшее число, большее 1?
в) Каково наименьшее действительное число, большее 3,6, в бесконечную десятичную запись которого не входят цифры 0, 1 и 2?

863. Укажите все числа a и b, для которых верно равенство:
а) $a + b = 0$; б) $a - b = 0$; в) $a \cdot b = 0$; г) $a \cdot b = b$.

864. Упростите выражения $a + |a|$ и $a - |a|$, если:
а) $a > 0$; б) $a = 0$; в) $a < 0$.

865. а) Вычислите длину окружности радиуса 2 см с точностью до второго знака после запятой.
б) Вычислите площадь круга радиуса 3 см с точностью до первого знака после запятой.

866. Вычислите:
а) 12,5(67) − 12,5(67); б) 6,7(89) · 0;
в) 4,51(2) : 1; г) 0 : 0,0(654).

867. *Из сборника задач для гимназий (XIX в.).*

а) Умножьте $\dfrac{\left(4{,}5 + 2\frac{3}{5}\right) \cdot (17 - 15{,}5)}{(3{,}6 - 0{,}63) : (3{,}2 + 8{,}68)} + \dfrac{13{,}464}{0{,}36}$ на

$$0{,}1 : \left(\dfrac{(1{,}09 - 0{,}29) \cdot 1\frac{1}{4}}{\left(18{,}9 - 16\frac{13}{20}\right) \cdot \frac{8}{9}} + \dfrac{(11{,}81 + 8{,}19) \cdot 0{,}02}{9 : 11{,}25}\right).$$

б) Сложите $\dfrac{\left(8\frac{7}{55} - 6{,}15454...\right) \cdot 1\frac{3}{217}}{(0{,}4 - 0{,}15) : \frac{1}{4}}$ и $\dfrac{\left(3\frac{5}{8} + 1{,}375\right) : 0{,}5}{2\frac{3}{4} : \left(3\frac{7}{20} - 2{,}8\right)}$.

в) Разделите

$$7\frac{1}{2}+6{,}833\ldots+5{,}(6)+\frac{13\frac{3}{4}+12\frac{1}{2}}{0{,}5-0{,}0625}-\frac{\frac{2}{9}+3{,}611\ldots}{1{,}9166\ldots-\frac{5}{6}}-42\frac{6}{13}$$ на частное

от деления $\frac{(6-4{,}5):0{,}003}{(3{,}05-2{,}65)\cdot 20}-\frac{(0{,}3-0{,}15)\cdot 1\frac{1}{2}}{(1{,}88+2{,}12)\cdot 0{,}125}$ на 62,05.

Координатная ось и координатная плоскость

868. Укажите на координатной оси с единичным отрезком длиной 10 см числа:

а) $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{10};\ \frac{3}{4};\ \frac{7}{10};\ 1\frac{1}{4};$ б) 1; 0,5; 0,1; 0,9; 0,35.

869. Укажите на координатной оси числа:

а) $2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{5}{8};$

б) $\frac{1}{5};\ \frac{1}{10};\ \frac{3}{20};\ \frac{1}{40};$

в) 0,1; 0,4; 0,9; 1,2; 0,35; 1,25; 0,95;

г) –1; –0,1; –0,5; –0,8; –1,2; –0,75;

д) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{5}{8};\ \frac{1}{16};$

е) $-\frac{1}{4};\ -1\frac{1}{4};\ -\frac{3}{4};\ -\frac{1}{8};\ -\frac{3}{8};\ -1\frac{1}{16}.$

870. Выбрав единичный отрезок, укажите на координатной оси числа: а) –3758 и –3760; б) 2,125 и 2,127.
Укажите на этой координатной оси какое-либо число, большее одного из указанных чисел и меньшее другого.

871. Отметьте на координатной оси числа, для которых верно неравенство:

а) $x > 5$; б) $x \leqslant -1$; в) $x \geqslant 0$; г) $|x| = 2$; д) $|x| < 2$; е) $|x| \geqslant 2$.

872. Выделите на числовой прямой точки x, координаты которых удовлетворяют условию: а) $|x| = 3$; б) $|x| < 3$; в) $|x| > 3$.

873. Изобразите на координатной прямой числа:

а) $\frac{1}{4}$; 2,5; 1,2; $\frac{3}{8}$; –0,4; б) 1,3; $1\frac{7}{10}$; $-1\frac{2}{5}$; 0,7; –1,1;

в) $-\frac{1}{5};\ -\frac{1}{4};$ 0,2; $\frac{1}{4};\ \frac{3}{5};$ г) –0,12; –0,17; –0,19; –0,13; –0,15;

д) 3,1415926 и $\frac{22}{7}$; е) $\frac{71}{41}$ и 1,73205;

ж) –5,(123) и –5,1(23); з) –2,07(7) и –2,(077).

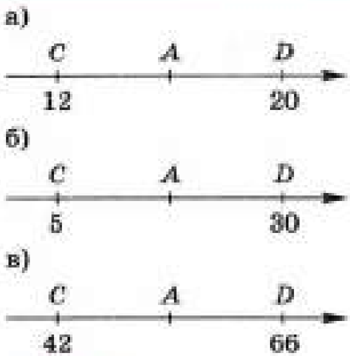


Рис. 17

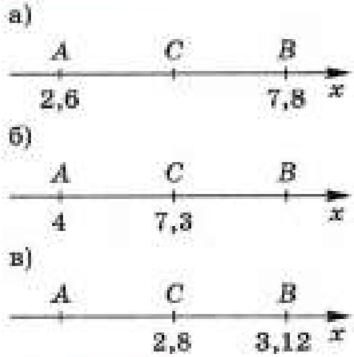


Рис. 18

874. Найдите координату точки A, если A — середина отрезка CD (рис. 17).

875. Точка C является серединой отрезка AB (рис. 18). Найдите координату:
а) точки C на рисунке а); б) точки B на рисунке б);
в) точки A на рисунке в).

876. Найдите координату точки A (рис. 19).

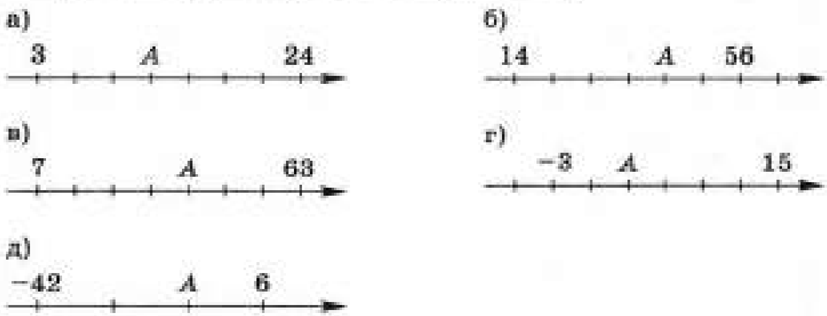


Рис. 19

877. Укажите приближённо координату точки A (рис. 20).

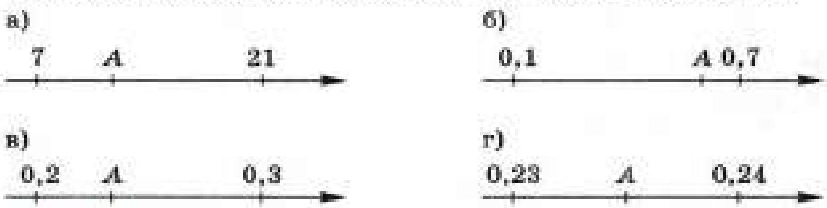


Рис. 20

878. а) Существует ли между множеством точек числовой прямой и множеством действительных чисел взаимно однозначное соответствие?
б) Почему между множеством точек числовой прямой и множеством рациональных чисел нельзя установить взаимно однозначное соответствие?
в) Какие числа надо добавить к рациональным числам, чтобы любой точке числовой прямой соответствовало определённое число?

879. Изобразите координатную ось вертикально с положительной полуосью, направленной вверх. Укажите на ней числа:
а) 1; 2; 3; 4;
б) 0,5; 0,7; 1,2; 1,3;
в) –1; –2; –3; –4;
г) –0,3; –0,5; –0,9; –1,2.

880. В декартовой системе координат xOy:
а) отметьте три точки, имеющие абсциссу 2, определите их ординаты и запишите координаты этих точек;
б) отметьте три точки, имеющие ординату –3, определите их абсциссы и запишите координаты этих точек;
в) отметьте три точки, имеющие абсциссу 0, определите их ординаты и запишите координаты этих точек;
г) отметьте три точки, имеющие ординату 0, определите их абсциссы и запишите координаты этих точек.

881. Постройте на координатной плоскости точки:
а) $A(1; 3)$, $B(1; 5)$, $C(1; -2)$, $D(1; 0)$;
б) $A(-2; 2)$, $B(-2; -2)$, $C(-3; -1)$, $D(-1; -3)$;
в) $A(0,5; -2)$, $B(0; 0,5)$, $C(-1,5; 0)$, $D(0; -2,5)$;
г) $A(-2,5; -0,5)$, $B(-1,5; 1,5)$, $C(1,5; -1,5)$, $D(2,5; 0,5)$.

882. а) Постройте замкнутую ломаную $ABCDMNK$, если $A(-2; 2)$, $B(-2,5; 2)$, $C(-0,5; 3)$, $D(1,5; 2)$, $M(1; 2)$, $N(1; -0,5)$, $K(-2; 0,5)$.
б) Постройте ломаную $ABCDEFKND$, если $A(-2,5; 1,5)$, $B(-4; 1,5)$, $C(-2,5; 4,5)$, $D(-2,5; 0,5)$, $E(-5,5; 0,5)$, $F(-4,5; -0,5)$, $K(-2; -0,5)$, $N(-1; 0,5)$, $D(-2,5; 0,5)$.

883. На координатной плоскости отметьте все точки:
а) абсциссы которых больше 1;
б) ординаты которых меньше –3;
в) абсциссы которых удовлетворяют неравенству $x > -2$;
г) ординаты которых удовлетворяют неравенству $y > 3$;
д) абсциссы которых удовлетворяют неравенству $-1 < x < 3$;
е) ординаты которых удовлетворяют неравенству $-5 < y < 1$.

884. Запишите координаты точек, изображённых:
а) на рисунке 21; б) на рисунке 22.

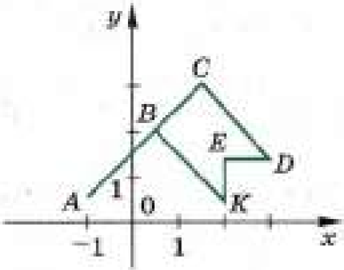


Рис. 21

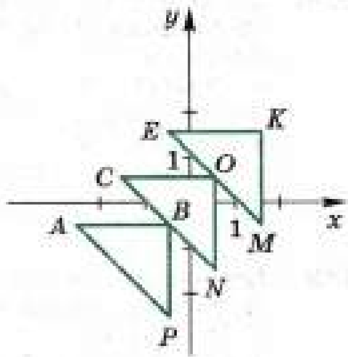


Рис. 22

885. Отметьте на координатной плоскости все точки:
а) абсциссы которых равны 2;
б) ординаты которых равны −4;
в) абсциссы которых равны 0;
г) ординаты которых равны 0;
д) абсциссы и ординаты которых равны.

886. Отметьте на координатной плоскости точки $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют условиям:
а) $x = 3$, $y > 2$;
б) $x < -2$, $y = -4$;
в) $0 < x < 5$, $y > 4$;
г) $x < 0$, $-2 < y < 4$;
д) $-1 < x < 3$, $0 < y < 5$;
е) $-3 < x < 1$, $-2 < y < 1$.

Буквенные выражения

887. На рисунке 23 прямоугольник разбит на прямоугольники. Найдите площади всех прямоугольников.

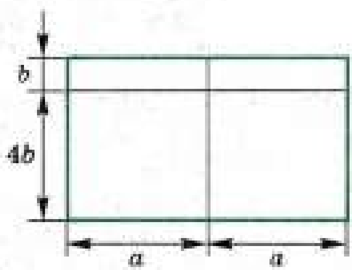


Рис. 23

888. Длина пути s при равномерном прямолинейном движении вычисляется по формуле $s = v \cdot t$, где v — скорость, а t — время движения.
а) Выразите v через s и t. Вычислите v при $s = 20$ км, $t = 2$ ч.
б) Выразите t через s и v. Вычислите t при $s = 1200$ м, $v = 20$ км/ч.

889. Площадь прямоугольника S вычисляется по формуле $S = ab$, где a и b — стороны этого прямоугольника.
а) Выразите a через S и b. Вычислите a при $S = 400$ см^2 и $b = 0{,}2$ м.
б) Выразите b через S и a. Вычислите b при $S = 1{,}6$ км^2 и $a = 20$ м.

890. а) Из формулы $S = \pi r^2$ выразите π через S и r.
б) Из формулы $C = 2\pi r$ выразите r через C и π.

891. Запишите длину пути, пройденного автомобилем (движение считать равномерным), если:
а) скорость равна 10 м/с, время t с;
б) скорость равна v м/с, время 5 с.

892. Запишите объём прямоугольного параллелепипеда, если длины его рёбер:
а) 4 см, b см, c см; б) a см, b см, 2 см.

893. Каким свойством обладает число, заданное выражением (n — натуральное число):
а) $2n$; б) $2n + 1$; в) $2n - 1$; г) $3n$; д) $3n + 1$; е) $3n - 1$?

894. Запишите алгебраическое выражение, которое задаёт:
а) натуральные числа, делящиеся нацело на 3;
б) натуральные числа, дающие при делении на 3 остаток 1;
в) натуральные числа, дающие при делении на 3 остаток 2;
г) натуральные числа, делящиеся нацело на 7.

895. Равны ли одночлены:
а) $3ab \cdot (-2)a$ и $6a^2b$; б) $ax^2 \cdot 3a^2xy$ и $3a^3x^3y$;
в) $\frac{1}{2}a^2bc \cdot (-2)ab^3c^2$ и $\frac{1}{4}a^3b^4c^4$;
г) $-\frac{7}{8}ax^2y^2c \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right)a^2xyc^2$ и $1\frac{1}{3}a^3x^4y^3c^2$?

896. Найдите одночлен, равный произведению одночленов:
а) $3a^2b^3c \cdot 6a^3bc^2$; б) $7bc^4e^2 \cdot 14b^2c^5e$;
в) $8c^2e^3k \cdot 12c^2ek$; г) $(-16)e^2k^4p^3 \cdot 8e^2k^3p$;
д) $(-14)a^3bc^2 \cdot 4ab^2c^2$; е) $7k^2p^2x^3 \cdot (-23)k^2p^4x^2$;
ж) $\frac{2}{3}p^3x^3y^2 \cdot 2\frac{1}{2}pxy^2$; з) $\left(-\frac{4}{7}\right)ace^2 \cdot 1\frac{1}{6}a^2c^2e^2$;
и) $\left(-2\frac{1}{5}\right)ae^2k^2 \cdot \left(-1\frac{9}{11}\right)a^2ek$; к) $\left(-1\frac{1}{4}\right)a^3kp^2 \cdot \frac{8}{5}ak^2p$.

Вместо звёздочки подберите такой одночлен, чтобы получилось верное равенство (**897—898**):

897. а) $2a^2b \cdot * = 14a^5b^2$; б) $14a^2c^3 \cdot * = 42a^6c^5$;
в) $* \cdot 17b^3c^4 = 85b^4c^7$; г) $* \cdot 11a^3c^3 = 88a^5c^9$.

898. а) $4ab^2 + 12ab^2 + * = 11ab^2$; б) $12a^2b^3 + 7a^2b^3 + * = a^2b^3$;
в) $15b^2c^4 + * + 2b^2c^4 = 22b^2c^4$; г) $13c^2e^3 + * = 0$.

899. Приведите подобные члены:
а) $3a + 8a - a$; б) $2x - 7x + 3x$;
в) $5y - 15y - 8y$; г) $-2a - 3a + 8a$;
д) $b - 7b + 3b - 5b - 2b$; е) $2x - 11x - 2x + 13x - 7x$;
ж) $ab - 3ab - ab - ab$; з) $-xy - 7xy + xy$;
и) $3m^2n - m^2n - 2m^2n$; к) $-ax^2 - 6ax^2 - 2ax^2$.

900. Покажите, что сумма:
а) двух чётных чисел есть число чётное;
б) двух нечётных чисел есть число чётное;
в) чётного и нечётного чисел есть число нечётное.

901. Покажите, что сумма:
а) трёх последовательных целых чисел (т. е. чисел, следующих друг за другом, например 2, 3, 4) делится на 3;
б) пяти последовательных целых чисел делится на 5.

902. Покажите, что если к целому числу прибавить его квадрат, то полученная сумма будет чётным числом.

903. Многочлен $a^2 - ab - b + b^2$ представьте в виде суммы двух двучленов, один из которых $a^2 - b$.

904. Многочлен $3a + 5ab - 2b^2 - b$ представьте в виде разности двух многочленов, один из которых $3a - b$.

905. Запишите и упростите выражение $A - B - C + D$, если:
а) $A = 7x$, $B = xy + 4x$, $C = 5x - xy$, $D = -8xy$;
б) $A = a^2 + 2b$, $B = 3a^2 - b$, $C = b - 2a^2$, $D = 2a^2 - b$.

906. Вместо звёздочки подберите одночлен так, чтобы выполнялось равенство:
а) $6a + 4b = * (3a + 2b)$; б) $10x - 15y = * (2x - 3y)$;
в) $6x - 6 = * (1 - x)$; г) $a^2 - \frac{1}{4}b^2 = * (b^2 - 4a^2)$.

907. Упростите выражение:
а) $4aab - 5ba^2 + 7a^2b - aba$;
б) $25aa^2b^3 + 2a^3b \cdot 5b^2 - a^2b^2 \cdot 8ab - 9a^3b^3 + 8aa^2b^3$;
в) $3pq - (p + q)^2$; г) $7a^2 - (5a^2 - 6m^3)$;
д) $x + (y - (x - y))$; е) $x - ((y - x) - y)$;
ж) $(4a^2 - 5b^2)(5a^2 - 4b^2)$; з) $(7ab^2 + 3b^3)(2ab^3 - 4a^2)$;
и) $(a^2 + 3ab - 2b^2)(2a^2 - 3b)$; к) $(3x^2 - 4x + 7)(5x^2 - x)$.

908. Преобразуйте выражение так, чтобы изменился знак, стоящий перед ним, на противоположный:
а) $(2x - 3)$; б) $-(m - 3n)$; в) $-(-2p + 3q)$; г) $(-a - 2b)$.

909. Подберите одночлены A и B так, чтобы выполнялось равенство:
а) $2a^2b^4 - 4a^3b^2 = A \cdot (b^2 - 2a)$;
б) $A - 4x^2y^4 = 2x^2y^2(3x - B)$;
в) $10mn^4 + A = 5mn^2 \cdot (B + 3n)$;
г) $(x - 2)(x + 3) = x^2 + A - 2x - B$;
д) $(a - A)(B - 1) = a^2 - a - ab + b$;
е) $(A + B)(p + q) = p^2 + pq + pq + q^2$.

910. Упростите выражение:
а) $(x - 1)(x + 1)$; б) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$;
в) $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$.

911. Преобразуйте выражение в многочлен:
а) $(a + b + c)^2$; б) $(x + y - z)^2$; в) $(m + n + k)^2$;
г) $(a - b - c)^2$; д) $(p + x + c + d)^2$; е) $(a + m - k - q)^2$.

912. Упростите выражение:
а) $(2x + y - 3z)^2 - (x - 2y + 2z)^2$;
б) $(m - 4n + 5z)^2 - (3m - n - 3k)^2$;
в) $(4 - 2p + q^2)^2 - (3p^2 - 5q + 7)^2$;
г) $(a + b + c)^2 + (a - b - c)^2 + (b - a - c)^2 + (c - a - b)^2$.

913. Вместо A, B и C подберите одночлены так, чтобы выполнялось равенство:
а) $2x^2 + 7x - 15 = (2x - 3)(x + A)$;
б) $(8 - 2x)(4 - x) = A - 16x + 32$;
в) $(3a^2 - b)(4b - a^2) = -3a^4 + A - 4b^2$;
г) $(4x^2y^3 + A)^2 = B + C + 0{,}01y^6$;
д) $(8a^4b^3 - A)^2 = B - C + 0{,}16b^4$.

914. Выделите полный квадрат из двучлена:
а) $x^2 + 4x + 1$; б) $4b^2 + 8b + 6$; в) $a^2 - 2a + 3$.

Доказываем (915—918).

915. Докажите, что:
а) квадрат нечётного натурального числа есть число нечётное;
б) при $A = m - 1$ выражение $A^2 + A + m$ является полным квадратом;
в) для любого целого n произведение $n(n + 1)(2n + 1)$ делится на 6;
г) сумма двух последовательных нечётных чисел делится на 4;
д) разность квадратов двух любых нечётных чисел делится на 4;
е) квадрат нечётного числа, уменьшенный на единицу, делится на 8;
ж) разность куба натурального числа и самого числа делится на 6.

916. Зная, что $x^3 - x$ (где x — целое число) делится на 6, докажите, что выражения $x^3 - 7x$, $x^3 + 11x$, $5x^3 + 13x - 30$ делятся на 6.

917. Докажите, что для любого целого числа x значение многочлена: а) $x^2 + x$ чётное число; б) $x^3 - x$ делится на 3.

918. Докажите, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел, увеличенное на 1, есть точный квадрат.

919. **Исследуем.** Верно ли, что если x — целое число и $5x + 9$ делится на 17, то выражение $10x + 1$ также делится на 17?

Доказываем (920—926).

920. Докажите, что если при некоторых целых a и b выражение $4a - 5b$ делится на 13, то выражение $8a - 23b$ также делится на 13.

921. Докажите, что если выражение $3a + 4b + 5c$, где a, b и c — целые числа, делится на 11, то и $9a + b + 4c$ делится на 11.

922. Докажите, что если при некоторых целых x и y выражение $x^2 + 9xy + y^2$ делится на 11, то и $x^2 - y^2$ делится на 11.

923. Докажите, что:
а) $7^{10} - 7^9 - 7^8$ делится на 41;
б) $9^{100} - 9^{99} + 9^{98} - 9^{97}$ делится на 41.

924. Докажите, что сумма трёх последовательных степеней числа 2 делится на 7.

925. Докажите тождество:
а) $\frac{1}{2}(m+n)^2 + \frac{1}{2}(m-n)^2 = m^2 + n^2$;
б) $\left(\frac{1}{2}(m+n)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(m-n)\right)^2 = mn$;
в) $(7b - 5c)^2(b + 2c) - b((7b + 2c)^2 - 119c^2) = 50c^3$;
г) $(3a - 2x)^2(a + 3x) - ((a - x)(a^2 + 16ax - 16x^2) - 4x^3) = 8a^3$;
д) $c(8c + 3a)^2 - ((8c - a)^2(c + a) + 24a^2c) = -a^3$;
е) $(a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + b^3$;
ж) $(x - y)^3 + 3xy(x - y) = x^3 - y^3$;
з) $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$.

926. Докажите, что при любом целом n выражение:
а) $(n - 2)^3 - (n(3 + (n - 3)^2) - 10)$ равно 2;
б) $(5 + 3n)^2(4 - n) - n(96 - (3n - 1)^2)$ равно 100;
в) $(6n + 7)^2 - 2(n - 3)(6n + 7) + (n - 3)^2$ кратно 5;
г) $(2n + 7)^2 - 2(2n + 7)(2n - 3) + (2n - 3)^2$ кратно 10.

Разложите на множители (927—931):

927. а) $4x^2 - 9$; б) $x^4 - 1$; в) $x^6 - 1$;
г) $x^2 - 1$; д) $x^8 - 4x^4 + 4$; е) $9x^6 + 6x^3 + 1$.

928. а) $x^6 + x^3 + 2$; б) $x^6 + x^3 - 2$; в) $x^5 + x + 1$; г) $x^5 + x - 1$.

929. а) $x^5 - 1$; б) $x^6 - 1$.

930. а) $bc(b + c) + ac(c - a) - ab(a + b)$;
б) $a^2b^2(b - a) + b^2c^2(c - b) + c^2a^2(a - c)$;
в) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

931. а) $m^3 - 5m^2 - 4m + 20$; б) $4ay - 3ay^2 + 3xy^2 - 4xy$;
в) $4b^2x - 6x - 24b^2y + 36y$;
г) $2ma + mb - mc - 2na - nb + nc$;
д) $k^4 + k^2 - 20$; е) $m^3 - 3m + 2$;
ж) $y^4 - y^2(z^2 + 1) + z^2$; з) $c^2 + cd + c - 2d^2 + 2d$.

932. При каких значениях букв данное выражение равно нулю:
а) $3b$; б) $2(a + 1)$; в) xy;
г) $m(n - 1)$; д) $(x - 3)(x - 2)$; е) $(2 - y)(y + 3)$;
ж) $(x - 5)^2$; з) $(m + 2)^2$?

933. **Исследуем.** Французский математик Андриен Мари Лежандр предложил такую формулу простых чисел: $p = 2x^2 + 29$. Сколько простых чисел даёт эта формула при подстановке в неё последовательных целых значений x, начиная с (-28)? Выполните вычисления до получения первого составного числа.

934. **Доказываем.** Докажите, что для любых натуральных чисел a и b найдётся такое целое значение x, что многочлен $ax^2 + bx + 29$ будет составным числом.

Найдите значение выражения (935—936):

935. а) $(5a + 3)(5a - 3)$ при $a = 2$;
б) $(a - 2)(a + 3) - (5 - a)(4 - a)$ при $a = -2$;
в) $5a^2 - 10ab + 5b^2$ при $a = 124$, $b = 24$;
г) $ax^2 + 2axy + ay^2$ при $a = 4$, $x = 71$, $y = 29$.

936. а) $(3x - 2y)^2 - (2x - y)^2$ при $x = 2{,}35$, $y = -1{,}65$;
б) $(2m - n)^2 + (m + 2n)^2$ при $m = 3{,}2$, $n = -3{,}4$;
в) $(6a - 1)^2 - ((10a + 3)(10a - 3) - (8a + 1)^2)$ при $a = -0{,}05$;
г) $((k + 4)^2 - (k + 3)^2)^2 - 4(k - 3)(k + 10)$ при $k = 1{,}375$;
д) $5mn(m + 5n) - 9n^3 - (4mn^2 - (m + n)(5m - 3n)^2)$ при $m = -0{,}2$, $n = \frac{1}{2}$;
е) $(x - 2y)(4x - 3y)^2 - (57xy - 2y)(28x^2 + 9y^2)$ при $x = -0{,}5$, $y = \frac{1}{19}$;
ж) $(4a - 3b)^2(b - a) - (9b^3 - a(4a - 5b)^2)$ при $a = -0{,}4$, $b = \frac{1}{2}$;
з) $(2x - 9y)^2(x + y) - (y(9y + 2{,}5x)^2 + x^2(4x + 1{,}75y))$ при $x = -5$, $y = 0{,}1$.

Вычислите (937—941):

937. а) $60^2 - 10^2$; б) $120^2 - 80^2$; в) $38^2 - 12^2$;
г) $63^2 - 17^2$; д) $15^2 - 25^2$; е) $19^2 - 29^2$;
ж) $64^2 - 7^2$; з) $144 - 11^2$; и) $13^2 - 9 \cdot 25$.

938. а) $\frac{1}{2} + \frac{53^2 - 27^2}{31^2 - 25} - \frac{53^2 - 27^2}{58^2 - 22^2}$; б) $\frac{77^2 - 69^2}{70^2 - 62^2} - \frac{77^2 + 41^2}{125^2 - 49} - \frac{1}{2}$;
в) $\frac{65^2 - 32^2 - 97 \cdot 11}{61^2 - 36^2} + \frac{56^2 - 26^2}{66^2 - 16^2}$; г) $\frac{109^2 + 160 \cdot 32 - 51^2}{139^2 - 11^2} + \frac{42^2 - 36}{84^2 - 12^2}$.

939. а) $\dfrac{(9{,}126 : 0{,}65 + 0{,}46) \cdot 7{,}18 + 1{,}45 \cdot 28{,}2}{3{,}45^2 - 0{,}55^2}$;

б) $\dfrac{3{,}05^2 - 2{,}55^2}{0{,}35 \cdot 388 - 28{,}8 \cdot (20{,}56 - 14{,}501 : 0{,}85)}$;

в) $\dfrac{\left(3\frac{9}{20} + 1\frac{1}{6}\right) : 27{,}7 + 5\frac{1}{7} \cdot 3{,}85 - 14\frac{3}{20}}{\left(1{,}75 : \frac{2}{3} - 1{,}75 : 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{12}}$.

940. а) $\dfrac{(12{,}4^2 - 4 \cdot 2^2) \cdot 0{,}49}{0{,}5^3 - 0{,}3^3}$; б) $\dfrac{0{,}8^3 + 0{,}3^3}{(7{,}5^2 - 3{,}1^2) \cdot 0{,}049}$;

в) $\dfrac{14^2 - 15^2 + 6^2}{12^2 - 13^2 + 15^2}$; г) $\dfrac{19^2 - 2 \cdot 19 \cdot 18 + 18^2}{0{,}7^3 - 0{,}9^3}$.

941. а) $\dfrac{\left(\frac{97^3 - 53^3}{44} + 97 \cdot 53\right) : (152{,}5^2 - 27{,}5^2)}{(36{,}5^2 - 17{,}5^2) : \left(\frac{57^3 + 33^3}{90} - 57 \cdot 33\right)}$;

б) $\dfrac{(94{,}5^2 - 30{,}5^2) : \left(\frac{69^3 + 29^3}{98} - 69 \cdot 29\right)}{(133{,}5^2 - 58{,}5^2) : \left(\frac{79^3 - 41^3}{38} + 79 \cdot 41\right)}$.

942. Сократите дробь:

а) $\dfrac{8a^2c + 16abc - 4ac^2}{6bc^2 - 12abc - 24b^2c}$; б) $\dfrac{30m^2k - 70mnk - 40mk^2}{56n^2k + 32nk^2 - 24mnk}$;

в) $\dfrac{15a^3bc - 30a^2b^2c + 15ab^3c}{12a^3c^2 - 12ab^2c^2}$; г) $\dfrac{80m^2n^3k^2 - 20m^4nk^2}{16m^3nk^2 - 64m^2n^2k^2 + 64mn^3k^2}$.

Упростите выражение (943—944):

943. а) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a}$; б) $\dfrac{1}{b} + \dfrac{3}{2b}$; в) $\dfrac{3}{x-a} - \dfrac{x}{x-a}$;

г) $\dfrac{b}{a-b} - \dfrac{5}{b-a}$; д) $\dfrac{3k}{b} + \dfrac{2b}{k}$; е) $\dfrac{3b}{(b-1)^2} + \dfrac{2}{1-b}$;

ж) $\dfrac{2x-1}{x^2-4} + \dfrac{4}{x-2}$; з) $\dfrac{7}{m} - \dfrac{4}{m-2n} - \dfrac{m-n}{4n^2-m^2}$;

и) $\dfrac{3x}{x^2-2x+1} - \dfrac{6}{x^2-1} - \dfrac{3x-2}{x^2+2x+1}$.

944. а) $\dfrac{ba^2}{(1-a)^2} - \dfrac{b}{(a-1)^2}$; б) $\dfrac{2a}{(a-1)^3} + \dfrac{1+a^2}{(1-a)^3}$.

945. Преобразуйте данную дробь в сумму дробей, **например:**

$$\frac{3x^2 - 8x + 4}{x} = \frac{3x^2}{x} - \frac{8x}{x} + \frac{4}{x} = 3x - 8 + \frac{4}{x}.$$

а) $\frac{m+n}{3}$; б) $\frac{x-2}{5}$; в) $\frac{1-2x}{x}$;

г) $\frac{3a-8b}{ab}$; д) $\frac{x^2-2x}{x^3}$; е) $\frac{4y-9y^2}{12y}$;

ж) $\frac{5x^3+2x^2-x-8}{2x}$; з) $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$;

и) $\frac{12-7x+x^2}{x-4}$; к) $\frac{12m^4-9m^2+m-6}{3m^2}$.

946. Вместо A, B и C подберите целые выражения так, чтобы равенство было верным, и упростите полученную дробь:

а) $\frac{a-1}{a+1} + \frac{a+1}{a-1} = \frac{(a-1)(a-1)+(a+1)(a+1)}{A}$;

б) $\frac{m}{3m-1} + \frac{2m}{5-2m} = \frac{m(5-2m)+2m(3m-1)}{A}$;

в) $\frac{B}{x+2} - \frac{C}{x-1} = \frac{(x-1)(x-1)+3x(x+2)}{A}$;

г) $\frac{B}{p-q} - \frac{C}{p^2-q^2} = \frac{(p+q)(p+q)-2pq}{A}$.

Упростите выражение (947—950):

947. а) $\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right) : \left(\frac{a^2}{a^2-b^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)$;

б) $\left(\frac{x^2y-xy^2}{x-y} + xy\right) \cdot \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)$;

в) $\left(\frac{n}{m-n} + \frac{m}{m+n}\right) \cdot \left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{n^2}{m^2} - 2\right)$;

г) $\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + 4x\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)$;

д) $\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right)\left(1 - \frac{a}{x}\right) \cdot \frac{x^3}{a^3-x^3}$;

е) $\frac{4x-3}{3-2x} - \frac{4+5x}{3+2x} - \frac{3+x-10x^2}{4x^2-9}$.

948. а) $\frac{x^5}{x^2-6x+9} \cdot \frac{x^2-9}{x^3+3x^2} - \frac{3x^5+81x^2}{x^2} : (x^2-9)$;

б) $\frac{a^2}{a^2+4a+4} \cdot \frac{a^2-4}{a^3-2a^2} + \frac{a^5-8a^2}{a} : (a^2-4)$;

в) $\left(\dfrac{m+2}{8-8m+2m^2}+\dfrac{1}{4-2m}-\dfrac{2}{m^2-4m+4}\right)\cdot 3m-3m;$

г) $\left(\dfrac{2}{a^2-4a+4}-\dfrac{1}{4-2a}-\dfrac{a+2}{2(2-a)^2}\right)\cdot 5a-5a;$

д) $\left(\dfrac{1}{2-4c}+\dfrac{1+c}{8c^3-1}:\dfrac{1+2c}{4c^2+2c+1}\right)\cdot\dfrac{4c-2}{2c+1}-\dfrac{1}{(1+2c)^2};$

е) $\left(\dfrac{1}{2-4b}+\dfrac{b+1}{8b^3-1}\cdot\dfrac{4b^2+2b+1}{1+2b}\right):\dfrac{2b+1}{4b-2}-\dfrac{1}{(2b+1)^2}.$

949. а) $\dfrac{x}{x-2y}+\dfrac{y}{x+2y}+\dfrac{x^2+3xy-2y^2}{4y^2-x^2};$

б) $\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^5-1}-\dfrac{x^2-x+1}{x^3+1}.$

950. а) $\dfrac{a+\frac{1}{b}}{a-\frac{1}{b}};$ б) $\dfrac{m-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{m}};$ в) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}};$ г) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{m}{n}}{\frac{a}{b}+\frac{m}{n}};$

д) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}};$ е) $\dfrac{\frac{1}{1-m}+\frac{1}{1+m}}{\frac{1}{1-m}-\frac{1}{1+m}};$ ж) $\dfrac{\frac{c}{c-1}-\frac{c+1}{c}}{\frac{c}{c+1}-\frac{c-1}{c}}.$

951. **Доказываем.** Известно, что $x+\dfrac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что:

а) $x^2+\dfrac{1}{x^2};$ б) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

целое число.

952. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2};$ б) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3};$ в) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1};$ г) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}.$

953. Представьте в виде разности дробей:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2};$ б) $\dfrac{1}{3\cdot 4};$ в) $\dfrac{1}{x(x+1)};$ г) $\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}.$

954. Вычислите:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{9\cdot 10};$

б) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 100};$

в) $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\ldots+\dfrac{1}{98\cdot 100}.$

955. **Доказываем.** Докажите, что при любом натуральном n:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}<1$;

б) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}<\frac{1}{2}$.

956. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$;

б) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$;

в) $\frac{2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+4)}$;

г) $\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}$.

Доказываем. Докажите тождество (957—958):

957. а) $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=x+y$;

б) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right):\left(1+\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{x-y}$;

в) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)=-m$;

г) $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)=a-b$.

958. а) $\left(\frac{m^2+2m}{4m^2-n^2}-\frac{1}{2m+n}\right):\frac{m^2+n}{20m^2+10mn}+\frac{5n}{n-2m}=5$;

б) $\frac{5a}{5a+3b}+\left(\frac{5a+3b}{5a-3b}-\frac{25a^2}{25a^2-9b^2}\right)\cdot\frac{5a-3b}{10a+3b}=1$;

в) $\left(\frac{2a}{a^2-16}-\frac{4}{4+a}\right)\cdot\frac{a+4}{8-a}+\frac{a^2}{32-8a}=-\frac{a+4}{8}$;

г) $\frac{1}{x}\left(\frac{y^2-xy}{x+y}\right)^2\left(\frac{x+y}{(x-y)^2}+\frac{x+y}{xy-y^2}\right)+\frac{x}{x+y}=1$;

д) $\frac{m}{m^2-2m+1}-\frac{1}{1-m}\cdot\frac{m}{m+1}-\frac{2}{m+1}=\frac{m}{(m-1)^2}-\frac{m-2}{m^2-1}$;

е) $\left(\frac{a}{b^2+ab}-\frac{a-b}{a^2+ab}\right):\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}+\frac{1}{a+b}\right)=\frac{a}{b}-1$.

Доказываем (959—960).

959. В «Арифметике» Диофанта (III в.) содержится много тождеств. Докажите два из них, данные в современной записи:

а) $\dfrac{144}{x^4 - 60x^2 + 900} \cdot 30 + \dfrac{60}{x^2 - 30} = \dfrac{60x^2 + 2520}{x^4 - 60x^2 + 900}$;

б) $\dfrac{96}{x^4 - 12x^2 + 36} - \dfrac{12}{6 - x^2} = \dfrac{12x^2 + 24}{x^4 - 12x^2 + 36}$.

960. Докажите тождество Л. Эйлера:

$$a^3 + b^3 + \left(\frac{b(2a^3 + b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3 = \left(\frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3.$$

961. При каких значениях букв данная дробь равна нулю:

а) $\dfrac{x}{x^2 + 2}$; б) $\dfrac{6m}{m - 8}$; в) $\dfrac{a - 4}{a + 1}$;

г) $\dfrac{2y - 5}{y^2}$; д) $\dfrac{3x + 7}{2x - 5}$; е) $\dfrac{6 - 9x}{5 + 4x}$?

Найдите значение выражения (962—963):

962. а) $\dfrac{7}{5a + 5} - \dfrac{3}{10a + 10}$ при $a = 10$;

б) $\dfrac{2a - 1}{2a} - \dfrac{2a}{2a - 1} - \dfrac{1}{2a - 4a^2}$ при $a = -\dfrac{1}{2}$.

963. а) $\left(\dfrac{x - 2}{x^2 - 2x + 4} - \dfrac{6x - 13}{x^3 + 8}\right) : \dfrac{15 - 5x}{2x^3 + 16}$ при $x = 3{,}5$;

б) $\left(\dfrac{x - 1}{x^2 - x + 1} + \dfrac{4x + 5}{x^3 + 1}\right) : \dfrac{2 - x}{4x^2 - 4x + 4}$ при $x = 0{,}6$;

в) $\dfrac{8a^3 - 27b^3}{(3b + 2a)^2 - 6ab}$ при $a = 2{,}5$; $b = -1\dfrac{2}{3}$;

г) $\dfrac{64a^3 + 8b^3}{(2a - b)^2 + 2ab}$ при $a = -0{,}25$; $b = 1\dfrac{7}{8}$.

Линейные уравнения

Решите уравнение (964—977):

964. а) $x - 11 = 17$; б) $6 + x = 2$; в) $12 + x = -6$;
г) $x + 13 = 5$; д) $7x = -14$; е) $-17x = 51$;
ж) $6x = 7$; з) $2x = -13$; и) $-x = 2$.

965. а) $x + 2 = 1$; б) $x - 3 = 2$; в) $2x = 3$;
г) $\dfrac{1}{2}x = 4$; д) $2x + 5 = 2$; е) $2x - \dfrac{1}{2} = 1$;
ж) $1 - x = 3$; з) $2 - x = 7$.

966. а) $x - 5 = 6$; б) $5 + x = 3$; в) $x + 7 = 7$;
г) $x - 6 = 6$; д) $x + 3 = -6$; е) $x + 12 = 7$;
ж) $2 + x = -1$; з) $x - 3 = -3$; и) $2x = 4$;
к) $-5x = 100$; л) $3x = 2$; м) $11 = 5x$;
н) $2x = 0$; о) $-x = 1$; п) $\frac{1}{2}x = 3$.

967. а) $3x + 2x = 10$; б) $5x + x = 6$;
в) $4x - 3x = 5$; г) $4x + 2x - x = 10$.

968. а) $3x - x = 8$; б) $2x - 3x + 2 = 5$;
в) $3x - 7 - 5x + 4x = 1$; г) $2y - 5 - 12y + 3 + 3y = 12$.

969. а) $2x + (3x + 1) = 4$; б) $(2x + 5) + (3x - 8) = 7$;
в) $2x - (x - 1) = 3$; г) $(2x - 3) + (x + 1) = 13$.

970. а) $3(x - 2) = 8$; б) $(x + 2)4 = 7$;
в) $(2x + 1)9 = 9$; г) $5(2 - 3x) - 7 = 0$;
д) $3(x - 5) + 8 = 17$; е) $6(x - 3) + 2(x + 2) = 10$;
ж) $5(x - 1) - 4(x - 2) = 10$.

971. а) $2(x - 3) = 6$; б) $(x - 2)4 = 15$;
в) $5(2x - 1) - 7 - x = 0$; г) $3(x - 3) - 5 - (2x - 5)4 = 0$.

972. а) $(2x + 5) + (3x + 8) = 7$; б) $2x + (x - 3) - 23 - (2 - 3x) = 0$;
в) $4 + x - 8 + (2x - 5) = 0$; г) $(2x - 3) - (x + 1) = 1$.

973. а) $2(x + 1)9 = 9$;
б) $0{,}1(1{,}2x - 2) - 2(0{,}5 + x) = 0{,}68$;
в) $\frac{1}{2}(x + 8) + 1\frac{1}{3} + 2\left(1\frac{1}{5} - x\right) = 0$;
г) $\frac{2}{5}(0{,}5x - 3) - 0{,}2\left(2\frac{1}{2} - 5x\right) - \frac{1}{3}(0{,}5x - 3) = 0$.

974. а) $5(2 - 3x) - 3(2 - x) - 2(3x - 8) + 7(2x - 8) = 0$;
б) $0{,}6(x - 0{,}6) - 1 - 0{,}8(0{,}4 - x) = 0$;
в) $-2\left(3\frac{1}{2}x - 0{,}3\right) + x - 0{,}3\left(x - \frac{1}{10}\right) = 0$.

975. а) $\frac{2x - 3}{4} = 0$; б) $\frac{5x + 11}{7} = 0$; в) $\frac{7x - 3}{5} = 0$; г) $\frac{3x + 4}{13} = 0$.

976. а) $\frac{x}{3} = 2$; б) $\frac{x}{4} = \frac{2}{3}$; в) $\frac{2x}{3} = 5$;
г) $\frac{4x}{7} = -1\frac{2}{5}$; д) $\frac{x - 1}{2} = 1$; е) $-\frac{x + 1}{2} + \frac{2x}{3} = 0$;

ж) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$; з) $-\frac{2x}{3} + \frac{x}{4} - 1 = 0$;

и) $\frac{x}{5} - 2 - \frac{2x}{7} = 0$; к) $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{2} = 19$.

977. а) $(x + 1)(x - 1) - (x - 2)(x + 3) = 0$;
б) $(2x - 1)(x + 2) - (x - 5)(2x + 1) = 0$;
в) $3(x + 1)(x + 2) = 9 + (3x - 4)(x + 2)$;
г) $5(2x + 3)(x + 2) - 2(5x - 4)(x - 1) = 12$.

978. *Из папируса Ахмеса (ок. 2000 г. до н. э.).* Решите уравнение:

а) $x + \frac{1}{5}x = 21$; б) $\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10$;

в) $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 10$; г) $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 37$;

д) $3x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x = 1$.

Решите уравнение, считая, что a, b, c, y — данные числа, а x — неизвестное **(979—982)**:

979. а) $x - a = 0$; б) $x + a = 1$; в) $x + a = 2b$;
г) $c + x = a - b$; д) $x + y = 2$; е) $y - 3 = a + x$.

980. а) $2x = a$; б) $ax = 1$, $a \neq 0$; в) $bx = c$, $b \neq 0$;
г) $cx = -y$, $c \neq 0$; д) $xy = 0{,}5$, $y \neq 0$; е) $-ax = b$, $a \neq 0$.

981. а) $6(x - a) = 7(x + b)$; б) $5(x + b) = 3(a - x)$;
в) $a(b + x) = 3a - (x - a)b$, $a + b \neq 0$;
г) $2a - (a + b)x = (a - b)x$, $a \neq 0$;
д) $c - (c + a)x = (a - c)x - (b + ax)$, $a \neq 0$;
е) $ax - b(a - x) = c(b - x) - b(c - x)$, $a + c \neq 0$.

982. а) $(x + a) + (2x - 3a) = a$; б) $(2b - 3x) + (x - 5b) = 4x + 6b$;
в) $(2x - c) - (5c - x) = 3c$; г) $3x - (a - 2x) = 7x - (x + 3a)$.

983. Решите уравнение, считая, что a, b, k, m, n, p, q, y — данные числа, а x — неизвестное:
а) $ax = 3 + b$; б) $2px = q$; в) $kx + y = 0$;
г) $2yx - q = 3$; д) $2m - nx = 1$; е) $3a^2b - 6abx = ab$.

984. *Из «Арифметики» Диофанта (III в.).* Решите уравнение

$$(b + x)a = \frac{(a + b)x + (a + x)b}{2},$$

где x — неизвестное, a и b — известные числа.
Определите, при каком условии:
а) уравнение имеет единственный корень;
б) уравнение не имеет корней;
в) корнем уравнения является любое число x.

Системы линейных уравнений

985. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 3x + 4y = 17; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 6y = 0, \\ x + y = -4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3{,}2x - 1{,}2y = 2, \\ 0{,}5x + 0{,}6y = 1{,}1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5{,}1x - 3{,}8y = 13, \\ 1{,}7x - 0{,}8y = 9; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4{,}8x + 2{,}5y = 23, \\ 1{,}2x - 0{,}5y = 17; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = 4, \\ 3x - y + z = 6; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x - y - z = -2, \\ x + 2y - 3z = 1, \\ 3x - 2y + z = -5; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 3x - 5y = -1, \\ 5x - 3z = 12, \\ 2y - 5z = -1. \end{cases}$

986. *Из «Арифметики» Диофанта (III в.).* Решите системы для всех возможных значений a, b, c и d:

а) $\begin{cases} x + y = a, \\ x - 3y = b; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = a, \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{c} = d; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = a, \\ \dfrac{x}{b} - \dfrac{y}{c} = d. \end{cases}$

Текстовые задачи

987. Решите задачу, составив числовое выражение:

а) Куплено 3 кг яблок по 30 р. за 1 кг и 2,5 кг груш, килограмм которых стоит дороже на 10 р. Определите стоимость покупки.

б) В первой бригаде 12 рабочих, во второй — в 3 раза больше, чем в первой, а в третьей — на 22 рабочих меньше, чем в двух первых бригадах вместе. Сколько рабочих в третьей бригаде?

988. В бидоне 6 л кваса. Из него отлили в 5 раз больше, чем осталось. Сколько литров кваса осталось в бидоне?

989. а) Расстояние между сёлами 18 км. Путник прошёл в 5 раз больше, чем осталось пройти. Сколько километров он уже прошёл?

б) Некто подсчитал, что прошедшая часть суток в 2 раза меньше оставшейся. Сколько времени прошло с начала суток?

в) Некто подсчитал, что с начала года прошло в 4 раза больше дней, чем осталось до конца года. В каком месяце он вёл подсчёты?

990. *Задачи аль-Хорезми (VIII—IX вв.).*

а) Найдите два числа, зная, что их сумма равна 10, а их отношение — 4.

б) Разность двух чисел равна двум, а их отношение — числу, обратному двум. Найдите эти числа.

991. Брат и сестра коллекционируют открытки. У брата в 2 раза больше открыток, чем у сестры, а всего у них 60 открыток. Сколько открыток у каждого?

992. *Старинная задача.* Три швеи заработали в одном доме 21 р. 15 к., причём первая работала 4 дня по 10 ч ежедневно, вторая — 5 дней по 9 ч и третья — 7 дней по 8 ч. Сколько получит каждая из заработанной суммы сообразно времени, употреблённому на работу?

993. За две книги заплатили 150 р. Определите стоимость каждой книги, если известно, что одна из них на 40 р. дешевле.

994. а) Сумма двух чисел равна 106, а их разность равна 42. Найдите числа.
б) Сумма двух чисел равна 201, а их разность равна 99. Найдите числа.

995. а) Одно число больше другого на 56. Сумма этих чисел равна 420. Найдите числа.
б) Одно число меньше другого на 105. Сумма этих чисел равна 203. Найдите числа.

996. а) На первой полке в 2 раза больше книг, чем на второй, но на 23 книги меньше, чем на двух полках вместе. Сколько книг на каждой полке?
б) В субботу магазин продал в 3 раза больше конфет, чем в пятницу, но на 50 кг меньше, чем за оба эти дня. Сколько килограммов конфет продано в каждый из этих дней?

997. а) Сумма двух чисел, одно из которых на 5 больше другого, равна 19. Найдите эти числа.
б) Сумма двух чисел, одно из которых на 5 меньше другого, равна 19. Найдите эти числа.
в) Сумма двух чисел, одно из которых в 5 раз больше другого, равна 19. Найдите эти числа.
г) Сумма двух чисел, одно из которых в 5 раз меньше другого, равна 19. Найдите эти числа.

998. *Задачи С. А. Рачинского*[1]. а) Два мальчика играли в шашки. Через несколько минут на доске осталось пустых чёрных клеток втрое больше, чем занятых шашками, а у одного мальчика на 2 шашки больше, чем у другого. Сколько шашек осталось у каждого?
б) Дочь ткала одна 4 дня по 3 аршина в день, но потом стала ткать и мать — по 5 аршин в день. Когда их тканья стало поровну, они прекратили работу. Сколько аршин они соткали вдвоём?
в) Я всем своим ученикам дал орехов поровну. Четверо из них съели по 12 орехов, и тогда у этих четверых осталось столько

[1] Сельский учитель С. А. Рачинский (1838—1902) изображён на картине Н. П. Богданова-Бельского «Устный счёт» (с. 254).

орехов, сколько получил от меня каждый из них. По скольку орехов я раздавал?

г) Некто имел 5 детей и дал им пряников поровну. Трое из них съели по 5 пряников, и тогда у всех троих осталось столько пряников, сколько у двух остальных. Сколько всех пряников роздано?

д) Если к моим деньгам прибавить 4 р., у меня будет столько же, сколько у моего брата. Если к моим деньгам прибавить 55 р., у меня будет в 4 раза больше, чем у моего брата. Сколько денег у каждого?

999. **Ищем информацию.** Используя учебник, справочную литературу и Интернет, подготовьте сообщение о С. А. Рачинском и его книге «1001 задача для умственного счёта».

1000. Скорость течения реки 2,5 км/ч. За сколько часов катер, имеющий собственную скорость 20 км/ч, проплывёт расстояние между пристанями 12,6 км туда и обратно?

1001. Скорость лодки по течению 12 км/ч, а против течения 9 км/ч. Какова скорость течения реки и собственная скорость лодки?

1002. а) Расстояние, равное 42 км, лодка проплывает по течению за 1,4 ч, а против течения за 1,6 ч. Какова скорость течения реки и собственная скорость лодки?
б) Расстояние между пристанями, равное 42 км, теплоход проходит по течению за 1,2 ч, а против течения за 1,4 ч. За сколько часов это расстояние проплывут плоты?

1003. *Старинная задача.* Некто, отправляясь в лавку, взял с собой 10 р. Если бы он издержал ещё четверть тех денег, которые у него остались после покупки, то у него от взятых с собой денег осталось бы только 75 к. Сколько он издержал?

1004. Дачник пришёл от дачи на станцию за 13 мин до отхода поезда. Если бы он на каждый километр тратил на 3 мин больше, то пришёл бы за 1 мин до отправления поезда. Далеко ли от станции живёт дачник?

1005. *Старинная задача.* Если предположить, что лошадь бежит втрое медленнее поезда железной дороги, то она будет от него отставать на одну версту каждые 3 мин. Определите скорость поезда. Выразите ответ в километрах в час с точностью до десятых. (1 верста ≈ 1,067 км.)

1006. От Москвы до Курска 537 км. Из Москвы в Курск вышел поезд со скоростью 60 км/ч. Через 6 ч, в 20 ч 55 мин, на промежуточной станции первый поезд встретился с поездом, вышедшим из Курска в Москву в 17 ч 55 мин. Определите, с какой скоростью двигался до встречи второй поезд.

1007. К приезду начальника на станцию обычно присылают машину. Приехал он однажды на час раньше, пошёл пешком и, встретив посланную за ним машину, прибыл с ней на место на 10 мин раньше обычного срока. Во сколько раз скорость машины больше скорости начальника?

1008. а) Найдите $\frac{3}{4}$ от числа 324.

б) Найдите число, $\frac{3}{4}$ которого равны 324.

в) Какую часть числа 450 составляет число 180?

1009. а) Найдите число, $\frac{2}{5}$ которого равны $\frac{3}{5}$ от 600.
б) Найдите число, 0,6 которого равны 0,1 от 120.

1010. а) Найдите 0,13 числа 400.
б) Найдите число, 0,3 которого равны 999.

1011. а) Найдите 13% числа 40.
б) Найдите число, 12% которого равны 24.
в) Сколько процентов числа 480 составляет число 360?

1012. а) Число 250 уменьшите на $\frac{2}{5}$ этого числа.
б) Число 300 увеличьте на $\frac{4}{15}$ этого числа.

1013. а) Число уменьшили на $\frac{1}{9}$ этого числа и получили 80. Найдите число.
б) Число увеличили на $\frac{3}{7}$ этого числа и получили 500. Найдите число.

1014. Сумма 12 000 р. увеличилась на вкладе в банке на 5%. Какая сумма получилась?

1015. В нашем классе 30 учащихся. В прошлом году $\frac{3}{5}$ класса учились на «4» и «5». В этом году число ребят, которые учатся на «4» и «5», увеличилось на $\frac{1}{9}$. Сколько ребят теперь учатся на «4» и «5»?

1016. а) Через первую трубу бассейн наполняется за 12 ч, через вторую трубу — за 24 ч. За сколько часов бассейн наполнится через обе эти трубы?
б) Первая бригада может выполнить задание за 36 дней, а вторая — за 45 дней. За сколько дней две бригады выполнят задание, работая вместе?

1017. а) Два велосипедиста одновременно отправились навстречу друг другу из двух сёл. Первый мог бы проехать расстояние между сёлами за 30 мин, второй — за 45 мин. Через сколько минут они встретятся?
б) Пешеход может пройти расстояние между двумя сёлами за 6 ч, а велосипедист может проехать это расстояние за 3 ч. Через сколько часов они встретятся, если отправятся одновременно из этих сёл навстречу друг другу?

1018. Один мастер может выполнить заказ за 2,4 ч, а другой — за 4 ч. За сколько часов они выполнят заказ при совместной работе?

1019. Имеющихся на складе материалов хватит для работы первого цеха на 30 дней или второго цеха на 42 дня. Хватит ли имеющихся на складе материалов для работы двух цехов в течение 18 дней?

1020. Первая бригада, работая отдельно, может выполнить задание за 3 дня, а вместе со второй бригадой — за 2 дня. За сколько дней вторая бригада может выполнить то же задание, работая отдельно?

1021. *Задача Д. Пойи.* Том может выполнить работу за 3 ч, Дик — за 4 ч, а Гарри — за 6 ч. За какое время они могут выполнить эту работу, делая её вместе (предполагается при этом, что они не мешают друг другу)?

1022. Разделите число a в отношении 2 : 3, если:
а) $a = 200$; б) $a = 355$.

1023. Разделите число 777 в отношении $m : n$, если:
а) $m = 3$, $n = 4$; б) $m = 6$, $n = 1$.

1024. Две сестры коллекционируют открытки. У старшей сестры в n раз больше открыток, чем у младшей, а всего у них m открыток. Сколько открыток у каждой, если:
а) $n = 3$, $m = 280$; б) $n = 4$, $m = 395$?

1025. В магазин привезли m кг арбузов и дынь. Масса арбузов была в n раз больше массы дынь. Какова масса дынь, если $m = 600$, $n = 3$?

1026. а) Вася решил в 3 раза больше задач, чем Петя, а Петя решил на 12 задач меньше, чем Вася. Сколько задач решил каждый?
б) Вера выучила в n раз меньше стихотворений, чем Поля, а Поля выучила на 6 стихотворений больше, чем Вера. Сколько стихотворений выучила каждая девочка, если $n = 3, 4, 7$?

1027. Поезд прошёл расстояние AB за t ч со скоростью v км/ч. С какой скоростью должен был бы идти поезд, чтобы прийти в B на a часов раньше, если:
а) $t = 5$, $v = 80$, $a = 1$; б) $t = 6$, $v = 60$, $a = 2$?

1028. Некоторую работу a человек могут выполнить за c дней. За сколько дней эту работу могут выполнить b человек, если:
а) $a = 12$, $b = 15$, $c = 30$; б) $a = 18$, $b = 20$, $c = 50$?

1029. Некоторую работу a человек могут выполнить за c дней. За сколько дней эту работу выполнят такие же работники, если их будет на b человек меньше? Известно, что:
а) $a = 30$, $b = 10$, $c = 28$; б) $a = 42$, $b = 7$, $c = 30$.

1030. Какой смысл имеет дробь $\frac{a}{b}$, если:

а) a — расстояние, b — время движения;
б) a — расстояние, b — скорость?

1031. Пешеход прошёл расстояние s км со скоростью v км/ч. Сколько это заняло времени в часах; в минутах?

1032. Два пешехода вышли из двух пунктов одновременно навстречу друг другу со скоростями 4 км/ч и 5 км/ч. Через сколько часов они встретятся, если расстояние между пунктами равно s км?

1033. Два пешехода отправляются одновременно из одного пункта в противоположных направлениях. Их скорости x км/ч и y км/ч.

а) Какое расстояние будет между пешеходами через 2 ч?
б) Через сколько часов расстояние между пешеходами будет s км?

1034. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, удалённых на расстояние s км. Скорости пешеходов x км/ч и y км/ч. Через сколько часов они встретятся?

1035. Два поезда одновременно вышли из одного пункта в противоположных направлениях, и через 2 ч расстояние между ними было s км. Скорость одного поезда v км/ч. Определите скорость другого.

1036. Два поезда одновременно вышли из одного пункта в одном направлении и через 3 ч расстояние между ними было s км. Скорость одного поезда v км/ч. Определите скорость другого, если известно, что она:
а) больше v; б) меньше v.

1037. *Задача Ариабхаты (V—VI вв.).* Два светила находятся на данном расстоянии d друг от друга, движутся одно к другому с данными скоростями x и y. Определите точку их встречи (т. е. расстояние от места встречи до первоначального положения светил).

1038. Скорость катера по течению реки x км/ч, против течения — y км/ч. Какова скорость течения реки и собственная скорость катера?

1039. **Доказываем.** Докажите, что сумма скорости катера по течению реки и его скорости против течения есть удвоенная собственная скорость катера.

1040. Катер прошёл s км по течению реки за x ч, а против течения — за y ч. Какова скорость течения реки?

1041. Из города вышел пешеход со скоростью a км/ч, через t ч вслед за ним вышел второй пешеход со скоростью b км/ч. Через сколько часов после своего выхода второй пешеход догонит первого, если:
а) $a = 5$, $b = 6$, $t = 3$; б) $a = 4$, $b = 5$, $t = 4$?

1042. Поезд из пункта A в пункт B шёл t ч со скоростью v км/ч. За сколько часов он пройдёт расстояние AB, увеличив скорость на a км/ч, если:
а) $t = 3$, $v = 60$, $a = 30$; б) $t = 4$, $v = 75$, $a = 25$?

1043. Два пешехода вышли из одного пункта одновременно в одном направлении со скоростями 4,5 км/ч и 6 км/ч. Какое расстояние будет между ними через t ч, если:
а) $t = 2$; б) $t = 3{,}2$; в) $t = 2{,}4$?

1044. Из города A выехала грузовая машина со скоростью 60 км/ч. Через t ч вслед за ней из того же города выехала легковая машина со скоростью 80 км/ч. Через сколько часов легковая машина догонит грузовую, если:
а) $t = 2$; б) $t = 2{,}5$; в) $t = 3{,}4$?

1045. *Старинная задача.* Взрослому работнику платят в неделю a р., а мальчику — на b р. меньше. Сколько заработали они вместе, если первый работал a недель, а второй — b недель, при:
а) $a = 5$, $b = 3$; б) $a = 6$, $b = 4$?

1046. *Старинная задача.* Купец купил b пудов товара за c р., а продал каждый пуд за a р. Сколько прибыли он получил, если:
а) $a = 3$, $b = 20$, $c = 50$; б) $a = 0{,}84$, $b = 25$, $c = 18{,}6$?

1047. Поезд за t ч проходит s км. Какой путь прошёл бы поезд за то же время при скорости, большей первоначальной на a км/ч, если:
а) $a = 10$, $s = 210$, $t = 3$; б) $a = 20$, $s = 240$, $t = 4$?

1048. Некто занял денег. Через месяц он вернул a р., ещё через месяц — b р., выплатив за 2 месяца $\frac{1}{n}$ всей суммы. Сколько денег он ещё остался должен, если:
а) $a = 50$, $b = 40$, $n = 5$; б) $a = 80$, $b = 30$, $n = 7$?

1049. Некоторую работу a человек могут выполнить за c дней. Сколько человек могут выполнить ту же работу за d дней, если:
а) $a = 15$, $c = 12$, $d = 18$; б) $a = 24$, $c = 27$, $d = 18$?

1050. Некоторую работу a человек могут выполнить за c дней. Сколько человек ещё надо пригласить, чтобы выполнить эту работу на d дней раньше, если:
а) $a = 12$, $c = 14$, $d = 2$; б) $a = 28$, $c = 30$, $d = 9$?

1051. *Старинная задача.* Половину некоторой работы a человек совершили в c дней, после чего для окончания этой работы к ним прибыло ещё b человек, работавших с таким же успехом, как и первые. Сколько времени длилась вся работа?

1052. Колонна солдат длиной s км движется со скоростью x км/ч. Из конца колонны в её начало отправился сержант со скоростью y км/ч, затем с той же скоростью он возвратился в конец колонны. Сколько времени затратил сержант на путь туда и обратно, если:
а) $s = 0{,}45$, $x = 4$, $y = 5$; б) $s = 0{,}55$, $x = 5$, $y = 6$?

1053. Два путника вышли одновременно навстречу друг другу из городов A и B и встретились через a часов. Ещё через b часов первый путник пришёл в город B. Через сколько часов после встречи второй путник придёт в город A, если:
а) $a = 3$, $b = 2$; б) $a = 2$, $b = 3$?

1054. Два путника вышли одновременно навстречу друг другу из городов A и B и встретились через a часов. Ещё через b часов первый пришёл в город B. Сколько времени второй путник шёл из города B в город A, если:
а) $a = 2$, $b = 1$; б) $a = 4$, $b = 8$?

1055. На распродаже товаров цены будут снижены на 25%. Сколько будет стоить товар, цена которого сейчас a р., если:
а) $a = 50$; б) $a = 120$?

1056. Сколько процентов числа a составляет число b, если:
а) $a = 40$, $b = 50$; б) $a = 50$, $b = 40$?

1057. Увеличьте число a на $p\%$, уменьшите число a на $p\%$, если:
а) $a = 40$, $p = 10$; б) $a = 50$, $p = 50$.

1058. Увеличьте число a на $p\%$. Полученное число увеличьте ещё раз на $p\%$, если:
а) $a = 400$, $p = 20$; б) $a = 200$, $p = 30$.

1059. Торговец получил товар по оптовой цене a р., увеличил цену на 20%. Для проверки он уменьшил новую цену на 20% и удивился, так как не получил прежнего результата. Должен ли получиться прежний результат?

1060. Увеличьте положительное число a на $p\%$. Полученное число уменьшите на $p\%$. Получится ли снова число a? Почему?

1061. На сколько процентов число a больше числа b, если:
а) $a = 50$, $b = 40$; б) $a = 80$, $b = 40$?

1062. Торговец купил товар за a р., продал его дороже — за b р. Какова прибыль торговца в процентах, если:
а) $a = 8$, $b = 10$; б) $a = 6$, $b = 7{,}2$?

1063. Торговец купил товар за a р., продал его дешевле — за b р. Каков убыток торговца в процентах, если:
а) $a = 8$, $b = 7$; б) $a = 6$, $b = 5{,}1$?

1064. Банк начисляет $p\%$ на вложенную сумму ежемесячно. На сколько процентов увеличится сумма за год? Ответ округлите до целых с недостатком, если:
а) $p = 4$; б) $p = 5$.

1065. На сколько процентов число b меньше числа a, если:
а) $a = 50$, $b = 40$; б) $a = 80$, $b = 40$?

1066. Число увеличили на $p\%$. Во сколько раз увеличили число, если:
а) $p = 50$; б) $p = 100$?

1067. Число увеличили в n раз. На сколько процентов увеличили число, если:
а) $n = 1{,}3$; б) $n = 3$?

1068. Через первую трубу бассейн наполняется за a часов, через вторую трубу — за b часов, через обе трубы — за x часов.
а) Какое равенство связывает a, b и x?
б) Выразите x через a и b.
в) Выразите a через x и b.

1069. Через первую трубу бассейн наполняется за a часов, через вторую трубу — за b часов, через третью трубу — за c часов. За сколько часов бассейн наполнится через три трубы при их совместной работе?

1070. Бак наполняют три трубы: через первую трубу — за a часов, через вторую трубу — за b часов, а через все три трубы — за x часов. За сколько часов бак наполнится через третью трубу?

1071. *Старинная задача.* A и $Б$ вместе могут выполнить некоторую работу за a дней, A и $В$ — за b дней, $Б$ и $В$ — за c дней. За сколько дней A, $Б$ и $В$ порознь выполнили бы эту работу?

1072. Рядовой Степанов почистил бак картошки за 4 ч, и у него 20% всей картошки ушло в очистки. За сколько часов он начистит такой же (по массе) бак картошки?

1073. Рядовой Кузнецов начистил бак картошки за 4 ч, и у него 20% всей картошки ушло в очистки. За сколько часов он почистит такой же (по массе) бак картошки?

1074. Рядовой Смирнов может почистить бак картошки за 3 ч, а начистит такой же (по массе) бак картошки за 4 ч. Сколько процентов картошки идёт у него в очистки?

1075. Рядовой Иванов может почистить котёл картошки за 4 ч, а рядовой Петров — за 6 ч. У рядового Иванова 10% картошки идёт в очистки, а у рядового Петрова — 15%. Однажды они сели вместе чистить котёл картошки. Сколько процентов картошки уйдёт в очистки при совместной работе?

1076. Число уменьшили на $p\%$, полученное число уменьшили ещё раз на $q\%$. На сколько процентов уменьшили число, если: а) $p = 20$, $q = 20$; б) $p = 30$, $q = 40$?

1077. Трава при сушке теряет $p\%$ своей массы. Сколько сена получится из m т свежей травы, если:
а) $p = 80$, $m = 6$; б) $p = 75$, $m = 8$?

1078. Виноград при сушке теряет $p\%$ своей массы. Сколько свежего винограда нужно взять, чтобы получить n кг изюма (сушёного винограда), если:
а) $p = 75$, $n = 3$; б) $p = 80$, $n = 5$?

1079. На некотором участке пути машинист уменьшил скорость поезда на $p\%$. На сколько процентов увеличится время движения на этом участке?

1080. Яблоки содержат $p\%$ воды, после сушки они содержат $q\%$ воды. Сколько сушёных яблок получится из m кг свежих, если:
а) $p = 70$, $m = 30$, $q = 40$; б) $p = 65$, $m = 80$, $q = 20$?

1081. Груши содержат $p\%$ воды, после сушки они содержат $q\%$ воды. Сколько свежих груш надо взять для получения n кг сушёных, если:
а) $p = 70$, $n = 36$, $q = 20$; б) $p = 65$, $n = 35$, $q = 25$?

1082. Яблоки, содержащие $p\%$ воды, при сушке потеряли $q\%$ своей массы. Сколько процентов воды содержат сушёные яблоки, если:
а) $p = 66$, $q = 60$; б) $p = 64$, $q = 55$?

1083. До просушки влажность зерна составляла $p\%$, а после просушки составила $q\%$. Сколько процентов потеряло зерно в массе, если:
а) $p = 19$, $q = 10$; б) $p = 23$, $q = 12$?

1084. Три брата поместили разные суммы на вклад в банке. Первый поместил a р. под $p\%$ годовых, второй — $2a$ р. под $\frac{p}{2}\%$ годовых, третий — $\frac{a}{2}$ р. под $2p\%$ годовых. Докажите, что через год доходы братьев от вложения денег будут одинаковые.

1085. Два брата поместили на 2 года разные суммы на вклад в банке. Первый поместил a р. под $p\%$ годовых, второй — $2a$ р. под $\frac{p}{2}\%$ годовых. Чей доход от вложенных денег окажется больше, если по прошествии каждого года начисляются проценты на всю сумму вклада?

1086. Частный инвестор купил 200 акций известной фирмы по 100 р. за акцию. Когда цена каждой акции увеличилась на $p\%$, он продал половину акций. А когда цена каждой акции увеличилась ещё на $q\%$, он продал остальные акции. Вычислите прибыль, полученную частным инвестором от продажи всех купленных им акций.

1087. Отцу и сыну вместе 52 года. Пять лет тому назад отец был в 5 раз старше сына. Сколько лет каждому?

1088. Двум туристам необходимо доехать от мотеля до станции технического обслуживания. Первый ехал со скоростью 50 км/ч и успел на станцию за 2 ч до её закрытия. Второй, выехавший одновременно с первым, ехал со скоростью 35 км/ч и опоздал на 1 ч. На каком расстоянии от мотеля находилась станция технического обслуживания?

1089. *Старинная задача.* Двое выехали одновременно из одного города в другой. Первый ехал по 12 вёрст в час и приехал на место двумя часами раньше второго, который ехал по 9 вёрст в час. Каково расстояние между городами?

1090. *Старинная задача.* Продавая аршин сукна по 5 р., торговец получил бы на всём остатке этого сукна 12 р. прибыли. Продавая же по 3 р., он получил бы 4 р. убытку. Как велик остаток этого сукна и почём ему самому обошёлся аршин его?

1091. Поезд прошёл расстояние от пункта A до пункта B за 5 ч. На обратном пути он увеличил скорость на 20 км/ч и прошёл это расстояние за 4 ч. Определите скорость поезда на пути из пункта A в пункт B и расстояние от пункта A до пункта B.

1092. Велосипедист выехал из города и ехал по трассе со скоростью 12 км/ч. Через некоторое время он проколол шину и отправился назад пешком со скоростью 4 км/ч. Как далеко от города уехал велосипедист, если на путь туда и обратно он затратил 2,4 ч?

1093. Велосипедист подсчитал, что если он поедет со скоростью 6 км/ч, то опоздает на 1 ч; если поедет со скоростью 9 км/ч, то приедет на 1 ч раньше намеченного срока. Определите:
а) через какое время надо приехать;
б) каково расстояние;
в) с какой скоростью надо ехать, чтобы приехать вовремя.

1094. Товарный поезд шёл от станции A до станции B со скоростью 60 км/ч, возвращался порожняком от станции B до станции A со скоростью 80 км/ч. Весь путь занял 14 ч (не считая времени разгрузки). Каково расстояние AB?

1095. Если учеников, пришедших на школьную математическую олимпиаду, в классе посадить по одному за каждую парту, то не хватит 11 парт, а если посадить по двое за парту, то останется ещё 5 свободных парт. Сколько учеников пришло на олимпиаду и сколько парт в классе?

1096. Если каждый ученик класса сдаст на подарок по 3 р., то получится больше запланированного на 10 р. Если каждый сдаст по 2,5 р., то получится меньше запланированного на 5 р. Сколько учеников в классе?

1097. *Старинная задача (Китай, II в.).* Сообща покупают буйвола. Если каждые семь семей внесут по 190 (денежных единиц), то недостаток равен 330. Если же каждые 9 семей внесут по 270, то избыток равен 30. Сколько семей и сколько стоит буйвол?

1098. Мальчики составляют 45% всех учащихся в школе. Известно, что 30% всех мальчиков и 40% всех девочек учатся без троек. Сколько процентов всех учащихся школы учатся без троек?

1099. В некотором царстве, в некотором государстве правительство приняло постановление о запрете рекламы спиртных напитков. Это постановление поддержало 69% всего взрослого населения, причём среди женщин 94%, а среди мужчин 41%. Определите, кого в этом царстве-государстве больше — мужчин или женщин и на сколько процентов.

1100. В некотором царстве, в некотором государстве правительство решило осуществить одну из двух мер: поднять зарплату всем гражданам на 20% или понизить цены на все товары на 20%.
а) Какая из двух мер выгоднее гражданам этого государства?
б) На сколько процентов повысилась бы покупательская способность граждан при одновременном введении этих мер?

1101. Половина дороги, соединяющей два горных селения, проходит по ровной местности. Автобус едет в гору всегда со скоростью 30 км/ч, на ровном участке — 50 км/ч, а под гору со скоростью 60 км/ч. Найдите расстояние между горными селениями, если путь туда и обратно без остановок занимает ровно 2 ч 15 мин.

1102. Пешеход вышел из пункта A в пункт B со скоростью 5 км/ч. Через 2,4 ч навстречу ему из пункта B в пункт A выехал велосипедист со скоростью 11 км/ч. Их встреча произошла ровно на полпути между этими пунктами. Каково расстояние между пунктами A и B?

1103. *Задача Д. Пойи.* Патрульный самолёт в тихую, безветренную погоду делает 220 миль в час. Запас топлива рассчитан на 4 ч полёта. На какое расстояние может удалиться этот самолёт, если ему необходимо вернуться к месту вылета и если против направления, в котором он первоначально летит, дует ветер, скорость которого равна 20 милям в час?

1104. Проливной дождь лил 6 ч подряд и наполнил некоторую часть открытого бассейна. Если бы дождь прекратился, то насос откачал бы воду за 2 ч. Определите, за сколько часов насос откачает воду из бассейна, если дождь продолжает лить. Считайте процессы наполнения бассейна и откачки воды равномерными.

1105. а) Одно число в 2 раза больше другого. Если меньшее из этих чисел увеличить в 4 раза, а большее увеличить в 2 раза, то их сумма будет равна 80. Найдите числа.
б) Одно число в 3 раза больше другого. Если одно из чисел увеличить в 2 раза, то сумма станет равной 105. Найдите числа. Сколько решений имеет задача? Как следует изменить формулировку задачи, чтобы решение было единственным?

1106. а) Одно из чисел на 17 больше другого. Если меньшее число увеличить в 2 раза, а большее — на 16, то их сумма станет равной 99. Найдите числа.
б) Одно из чисел на 15 меньше другого. Если большее число уменьшить в 3 раза, то их сумма станет равной 69. Найдите числа.

1107. а) Даны два числа. Если первое число умножить на 2, то полученное число будет на 1 больше второго; если второе число умножить на 2, то полученное число будет на 55 больше первого. Найдите числа.
б) Даны два числа. Если первое число умножить на 4, то полученное число будет на 10 больше второго; если второе число уменьшить на 30, то полученное число будет больше первого на 35. Найдите числа.

1108. Первая бригада может выполнить задание за 56 ч, а вторая — за 112 ч. Мастер рассчитал, что работу можно организовать так: сначала над выполнением задания несколько дней будет работать первая бригада, а затем — вторая. При этом задание будет выполнено за 8 дней. Сколько дней должна работать каждая бригада? Считайте рабочий день по 8 ч.

1109. Брат нашёл в 2 раза больше белых грибов, чем его сестра. Если сестра даст брату 1 гриб, то у него их станет в 3 раза больше, чем у сестры. Сколько белых грибов нашёл каждый?

1110. У старшего брата в 9 раз больше значков, чем у младшего брата. Если старший брат даст младшему всего 5 значков, то у старшего брата будет в 4 раза больше значков, чем у младшего. Сколько значков у каждого?

1111. Брат и сестра одновременно начали сбор малины: брат собирал ягоды в четырёхлитровую корзину, а сестра — в трёхлитровую. Брат собирал ягоды в 1,5 раза быстрее сестры. В какой-то момент они поменялись корзинами и закончили сбор ягод одновременно. Сколько литров ягод собрал брат за всё время? Сколько литров ягод собрала сестра до обмена корзинами?

1112. Отец и сын принялись косить два соседних участка. Когда сын выкосил половину меньшего участка, они присели отдохнуть и подсчитали, что отец косит в 2 раза быстрее сына и что если они будут работать так же хорошо, но поменяются участками, то закончат работу одновременно. Определите площадь каждого участка, если один из них больше другого на 1 сотку.

1113. Девушка подошла к роднику с двумя кувшинами. Вода из родника текла двумя струями — одна давала в 3 раза больше воды, чем другая. Девушка поставила одновременно два кувшина под струи, и, когда набралась половина меньшего кувшина, она поменяла кувшины местами. Как это ни удивительно, но кувшины наполнились одновременно. Определите объём каждого кувшина, если вместе они вмещают 8 л.

1114. *Старинная задача.* Торговец, имея сотню лимонов, раздал их трём разносчикам, с тем чтобы они продавали их по одной и той же цене. Возвратясь домой, первый отдаёт хозяину вырученные от продажи 1 р. 80 к. и оставшиеся непроданными 4 лимона, второй отдаёт 1 р. 60 к. и 3 лимона, третий отдаёт 1 р. 20 к. и 1 лимон. Сколько лимонов дано было каждому для продажи?

1115. а) Если к натуральному числу приписать справа нуль, то оно увеличится на 333. Найдите это число.
б) Если в записи натурального числа зачеркнуть последнюю цифру 0, то оно уменьшится на 666. Найдите это число.

1116. а) Если к натуральному числу приписать справа цифру 6, то оно увеличится на 672. Найдите это число.
б) Если в записи числа зачеркнуть последнюю цифру 9, то оно уменьшится на 612. Найдите это число.

1117. а) Если к данному двузначному натуральному числу приписать справа или слева цифру 2, то полученные трёхзначные числа будут равны. Найдите двузначное число.
б) Если к записи данного пятизначного натурального числа приписать справа цифру 2 и полученное таким образом число разделить на число, полученное из данного приписыванием цифры 2 слева, то получится 3. Найдите это число.

1118. Старший брат сказал младшему: «Дай мне 8 орехов, тогда у меня орехов будет вдвое больше, чем у тебя». А младший брат сказал старшему: «Ты дай мне 8 орехов, тогда у нас будет поровну». Сколько орехов у каждого?

1119. Чтобы проплыть некоторое расстояние по течению, лодке требуется времени в 3 раза меньше, чем против течения. Во сколько раз собственная скорость лодки больше скорости течения?

1120. Пловец проплыл по течению быстрой реки 150 м. Когда же он поплыл против течения, то за такое же время его снесло течением на 50 м ниже по течению. Во сколько раз скорость течения реки больше скорости пловца?

1121. Путник вышел из пункта A в пункт B. Первую половину времени, затраченного им на переход, он шёл со скоростью 5 км/ч, а затем пошёл со скоростью 4 км/ч. Второй путник вышел из пункта A в пункт B одновременно с первым, но он половину пути шёл со скоростью 4 км/ч, а затем пошёл со скоростью 5 км/ч. Кто из путников раньше пришёл в пункт B?

1122. а) Велосипедист ехал из пункта A в пункт B со скоростью 15 км/ч, а возвращался назад со скоростью 10 км/ч. Какова средняя скорость велосипедиста на всём участке?

б) Велосипедист ехал со скоростью 15 км/ч, потом точно такое же время со скоростью 10 км/ч. Какова средняя скорость велосипедиста на всём участке?

1123. Лодка проплыла по реке расстояние между пристанями за 3,5 ч, а обратно — за 2,5 ч. Во время движения собственная скорость лодки была постоянна. Сколько времени заняло бы движение лодки с той же собственной скоростью на такое же расстояние по озеру?

1124. Вертолёт пролетел расстояние от пункта A до пункта B за 66 мин, а обратно — за 55 мин. За сколько минут он пролетел бы расстояние от пункта A до пункта B и обратно в безветренную погоду, если скорость вертолёта, скорость ветра и его направление постоянны?

1125. Скорость велосипедиста в 3 раза больше скорости пешехода. Они одновременно отправились из двух городов навстречу друг другу. Во сколько раз больше времени после встречи будет в пути пешеход, чем велосипедист?

1126. Две старушки вышли одновременно навстречу друг другу из двух городов. Они встретились в полдень и достигли каждая чужого города: первая — в 4 ч пополудни, а вторая — в 9 ч. Узнайте, когда они вышли из своих городов.

1127. На дороге, соединяющей два горных селения, нет ровных участков. Автобус едет в гору всегда со скоростью 30 км/ч, а под гору со скоростью 60 км/ч. Найдите расстояние между горными селениями, если путь туда и обратно без остановок занимает ровно 2 ч.

1128. Если разделить двузначное число на сумму его цифр, то получится частное 6 и остаток 3. Если же разделить это число на сумму его цифр, увеличенную на 2, то получится частное 5 и остаток 5. Найдите это двузначное число.

1129. У мальчика было 75 р. пяти- и десятирублёвыми монетами. Если бы пятирублёвых монет было столько, сколько десятирублёвых, а десятирублёвых — столько, сколько пятирублёвых, то всего у него оказалось бы 90 р. Сколько было у мальчика в отдельности пяти- и десятирублёвых монет?

1130. В одном бидоне на 5 л молока больше, чем в другом. Если из первого бидона перелить во второй 8 л, то во втором бидоне станет в два раза больше молока, чем останется в первом. Сколько литров молока в каждом бидоне?

1131. Составьте задачу, которая решалась бы с помощью уравнения или системы уравнений:

а) $16 - (x + 1) = 5;$ б) $16 - (x - 1) = 5;$

в) $\begin{cases} x + y = 13, \\ x - y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 5y = 28, \\ 2x + 4y = 22. \end{cases}$

1132. Бассейн заполняют горячей и холодной водой, текущей из двух кранов. Оба крана заполняют бассейн за 1 ч 20 мин. Если первый кран работает 10 мин, а второй — 12 мин, то заполняется $\frac{2}{15}$ бассейна. За какое время заполнит бассейн кран с холодной водой?

Задания на исследование

1. Из бочки, содержащей 100 л сока, отливают 10 л сока и вливают в неё 10 л воды. Перемешав полученную смесь, из бочки отливают 10 л смеси и опять вливают в неё 10 л воды, и так делают неоднократно. Можно ли в результате таких операций получить смесь, содержащую 72,9 л сока?

2. Из бочки, содержащей 100 л сока, отливают 1 л сока и вливают в неё 1 л воды. Перемешав полученную смесь, из бочки отливают 1 л смеси и опять вливают в неё 1 л воды, и так делают неоднократно. Можно ли в результате таких операций получить смесь, содержащую 50 л сока?

3. а) При каком наибольшем натуральном числе n число 10! делится на n^n? $(10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10.)$
б) При каком наименьшем натуральном числе n число 10! не делится на n^n?

4. Обыкновенную дробь с числителем 1 называют **аликвотной дробью**. Например, дроби $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ — аликвотные дроби.
а) Сколькими различными способами, не учитывая порядка слагаемых, можно представить дробь $\frac{1}{6}$ в виде суммы двух аликвотных дробей, знаменатели которых — различные числа?
б) Придумайте способ записи аликвотной дроби в виде суммы двух аликвотных дробей. Рассмотрите случаи: знаменатель дроби — простое число; знаменатель дроби — составное число.

5. *Из ЕГЭ.* Сколькими различными способами, не учитывая порядка слагаемых, можно представить дробь $\frac{1}{25}$ в виде суммы двух различных аликвотных дробей?

6. Сколькими различными способами, не учитывая порядка слагаемых, можно представить дробь $\frac{1}{12}$ в виде суммы двух аликвотных дробей с разными знаменателями?

7. Найдите все пары натуральных чисел m и n, удовлетворяющие уравнению $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12}$, если одно из чисел чётное, а другое нечётное.

8. Учитель хочет составить несколько вариантов задачи на совместную работу: «Первая бригада может выполнить задание за a дней, а вторая — за b дней. За сколько дней они выполнят это задание при совместной работе?» При этом он хочет, чтобы в каждом варианте был один и тот же ответ — «за 24 дня». Сколько различных вариантов задачи он может составить, если $a > b$?

9. *Из ЕГЭ.* Найдутся ли хотя бы три десятизначных натуральных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

10. Натуральное число, записанное несколькими единицами, умножили на другое натуральное число, записанное несколькими единицами. Какой получился результат, если в записи первого числа m единиц, а в записи второго числа n единиц ($m \geqslant n$, $2 \leqslant n \leqslant 9$)? Какая цифра будет повторяться в середине записи произведения? Сколько раз?

11. Найдите несократимую дробь $\frac{p}{q}$, такую, что $\frac{p}{q} = \frac{123\overbrace{444\ldots4}^{100}321}{1234\underbrace{555\ldots5}_{99}4321}$

(100 четвёрок в числителе и 99 пятёрок в знаменателе).

12. *Из ЕГЭ.* Найдите все тройки натуральных чисел m, n и k, удовлетворяющие уравнению:

а) $5 \cdot k! = m! - n!$;

б) $k! = 3 \cdot m! + 6 \cdot n!$ $(1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$.

13. Отличное от нуля число увеличили на $p\%$, полученный результат уменьшили на $q\%$. В результате снова получили первое число. Найдите все пары натуральных чисел $(p;\ q)$, удовлетворяющие условию задачи.

14. На окружности отметили n точек, каждую соединили хордой хотя бы с одной из других отмеченных точек. Оказалось, что из первой точки выходит одна хорда, из второй — две, ..., из $(n - 1)$-й точки выходит $(n - 1)$ хорда. Сколько хорд выходит из n-й точки?

Решите задачу для: а) $n = 5$; б) нечётных $n \geqslant 3$.

15. Встретились n друзей. Первый пожал руку одному из друзей, второй — двум, третий — трём, ..., $(n - 1)$-й пожал руку $(n - 1)$ другу (в любой паре друзей не более одного рукопожатия). Сколько рук пожал n-й друг?

Решите задачу для: а) $n = 6$; б) чётных $n \geqslant 4$.

Задания для самоконтроля

1. Расположите в порядке убывания числа: –16,7; –17,6; –17,06; –17,76.

2. Расположите выражения в порядке возрастания их значений. В ответе укажите последовательность их номеров.

1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$ 3) $\frac{0,9}{4}$ 4) $0,48\cdot 0,25$

3. Три тетради и две ручки стоят 24 р. Сколько стоит тетрадь, если она на 2 р. дешевле ручки?
Пусть тетрадь стоит x р. Какое уравнение соответствует условиям задачи?

1) $3(x-2)+2x=24$ 2) $3x+2(x+2)=24$
3) $3(x+2)+2x=24$ 4) $3x+2(x-2)=24$

4. От города до посёлка автомобиль доехал за 3 ч. Если бы его скорость была на 25 км/ч выше, он затратил бы на этот путь на 1 ч меньше. Чему равно расстояние от города до посёлка?
Пусть x км — расстояние от города до посёлка. Какое уравнение соответствует условию задачи?

1) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=25$ 2) $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}=25$
3) $\frac{2}{x}-\frac{3}{x}=25$ 4) $\frac{3}{x}-\frac{2}{x}=25$

5. Группа из двенадцати детей и двоих взрослых идёт на экскурсию в музей. Взрослый билет стоит 200 р. Билет для школьника продаётся со скидкой 50% . Сколько нужно заплатить за билеты для всей группы? Ответ дайте в рублях.

6. Суточная норма потребления углеводов составляет 280 г. Порция омлета в среднем содержит 39 г углеводов. Сколько примерно процентов от суточной нормы потребления углеводов получит человек, съев порцию омлета?

1) 7% 2) 0,7% 3) 14% 4) 0,14%

7. Площадь территории России составляет $1,7\cdot 10^7$ км^2, а Германии — $3,6\cdot 10^5$ км^2. Во сколько раз площадь территории России больше площади территории Германии?

1) примерно в 2,1 раза 2) примерно в 470 раз
3) примерно в 4,7 раза 4) примерно в 47 раз

8. В каком случае преобразование выполнено верно?

1) $(4-b)(b+4)=b^2-16$
2) $-(b-1)(3-4b)=(1-b)(4b-3)$
3) $(b+1)(3-2b)=3+b-2b^2$
4) $(b-4)^2=b^2-4b+16$

9. В каком случае выражение преобразовано в тождественно равное?

1) $(x-4)^2 = x^2 - 4x + 16$
2) $-2(x-y) = -2y - 2x$
3) $(x-y)(y-x) = -x^2 + 2xy - y^2$
4) $(-x-3y)2 = -2x - 3y$

10. Чему равна плотность тела (в кг/м^3), если его масса равна a кг, а его объём 700 дм^3?

1) $0{,}7a$ кг/м^3 2) $700a$ кг/м^3 3) $\frac{10a}{7}$ кг/м^3 4) $\frac{a}{7}$ кг/м^3

11. За x граммов печенья заплатили a р. Составьте выражение для вычисления цены одного килограмма этого печенья (в рублях).

1) $\frac{1000a}{x}$ 2) $\frac{ax}{1000}$ 3) $\frac{a}{x}$ 4) $\frac{1000x}{a}$

12. Упростите выражение $\frac{2}{3x} - \frac{1}{x}$.

1) $-\frac{1}{3x}$ 2) $\frac{1}{3x}$ 3) $-\frac{1}{3}$ 4) $-\frac{1}{3x^2}$

13. Упростите выражение $\frac{2}{3x} - \frac{3}{11x}$.

1) $\frac{13}{33x}$ 2) $\frac{1}{8x}$ 3) $8x$ 4) $\frac{19}{33x}$

14. Решите уравнение $10 - 2(x+1) = 5 - 4x$.

15. Решите уравнение $4 - 5x = 17 - 3(x+1)$.

16. Найдите значение выражения $\frac{a-b}{c}$ при $a = 3{,}25$; $b = 2{,}65$; $c = 7{,}5$.

17. Найдите частное $\frac{12{,}1 \cdot 10^{-5}}{0{,}11 \cdot 10^{-3}}$. Ответ запишите в виде десятичной дроби.

18. Найдите наименьшее значение выражения

$$(3x - 4y - 2)^2 + (x - 5y + 3)^2$$

и значения x и y, при которых оно достигается.

Список дополнительной литературы

1. *Агаханов Н. Х.* Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Просвещение, 2010.
2. *Баврин И. И.* Старинные задачи / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. — М.: Просвещение, 1994.
3. *Галкин Е. В.* Задачи с целыми числами: 7—11 кл. / Е. В. Галкин. — М.: Просвещение, 2011.
4. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: VII—VIII кл. / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982.
5. *Дорофеева А. В.* Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2007.
6. *Игнатьев Е. И.* В царстве смекалки / Е. И. Игнатьев. — М.: Наука, 1979.
7. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. — М.: Наука, 1991.
8. *Нестеренко Ю. В.* Задачи на смекалку / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. — М.: Дрофа, 2006.
9. *Нестеренко Ю. В.* Лучшие задачи на смекалку / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. — М.: АСТ-ПРЕСС, 1999.
10. *Олехник С. Н.* Старинные занимательные задачи / С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов. — М.: Дрофа, 2006.
11. *Перельман Я. И.* Живая математика / Я. И. Перельман. — М.: Наука, 1978.
12. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.: АСТ, Астрель, 2002.
13. *Пичурин Л. Ф.* За страницами учебника алгебры / Л. Ф. Пичурин. — М.: Просвещение, 1999.
14. *Симонов Р. А.* Кирик-Новгородец — учёный XII века / Р. А. Симонов. — М.: Наука, 1980.
15. *Спивак А. В.* Тысяча и одна задача по математике: кн. для учащихся 5—7 кл. / А. В. Спивак. — М.: Просвещение, 2010.
16. *Чистяков В. Д.* Старинные задачи по элементарной математике / В. Д. Чистяков. — Минск: Вышэйшая школа, 1978.
17. *Чулков П. В.* Арифметические задачи / П. В. Чулков. — М.: МЦНМО, 2009.
18. *Шевкин А. В.* Текстовые задачи по математике. 7—11 классы / А. В. Шевкин. — М.: Илекса, 2011.

19. *Шевкин А. В.* Школьная математическая олимпиада: Задачи и решения. Выпуск 1 / А. В. Шевкин. — М.: Илекса, 2008.

20. *Шевкин А. В.* Школьная математическая олимпиада: Задачи и решения. Выпуск 2 / А. В. Шевкин. — М.: Илекса, 2008.

Интернет-библиотеки

21. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета: http://lib.mexmat.ru/books/3275

22. Интернет-библиотека сайта Московского центра непрерывного математического образования: http://ilib.mirror1.mccme.ru/

23. Математические этюды: http://etudes.ru/

Предметный указатель

Ответы

§ 1

18. а) Цифра 0 встречается 9 раз, остальные цифры — по 20 раз. **19.** а) На 2 нуля; б) на 12 нулей. **26.** а) 8; б) 25; в) 81. **31.** а) 2^7; б) 3^7; в) 4^7; г) 5^2. **33.** а) 2^4; б) 3^8; в) 3^{14}. **44.** При $n = 41$ имеем: $n^2 - n + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ делится на 1, на 41, на 41^2. **48.** а) 1, 17; б) 1, 3, 5, 9, 15, 45; г) 1, 2, 4, 7, 14, 17, 28, 34, 68, 119, 238, 476. **49.** а) 19; б) 2, 3; в) 2, 7; г) 2, 29. **56.** а) 50; б) 20; в) 10; г) 90. **57.** 33.

§ 2

66. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{6}{25}$; в) $\frac{31}{250}$; г) $\frac{8}{27}$. **67.** а) $\frac{8}{9}$; б) $\frac{7}{8}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{35}{17}$. **74.** а) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$; б) $\frac{13}{20}$, $\frac{47}{50}$, $\frac{1}{125}$. **85.** а) 0,(3); 0,(2); 2,4(0); 12,(0). **86.** а) $\frac{8}{9}$; в) $\frac{13}{99}$. **92.** а) 0,(4); б) 0,68; в) 0,13(91); г) 0,3125. **99.** а) $-\frac{21}{50}$; б) $-\frac{5}{12}$; в) $\frac{5}{54}$; г) $-\frac{8}{21}$; д) $1\frac{1}{5}$. **100.** а) $-1{,}53$; б) $-5{,}28$; в) 3,8; г) 0,264; д) $-1{,}75$. **105.** а) $-\frac{1}{3}$; б) $-1\frac{2}{9}$; в) $-2\frac{5}{9}$; г) $-\frac{17}{99}$.

§ 3

118. а) При $a \geqslant 0$; при $a \leqslant 0$. **123.** Если $a = -b$, $b \neq 0$. **140.** а) 2,35; б) 3,21; в) $-3{,}149$; г) $-5{,}22$. **141.** Да. **146.** а) 3,(27); б) 52,(12); в) 0. **150.** а) 0,222; б) 1,23; в) 12,0. **151.** а) $-0{,}333$; б) $-1{,}27$; в) $-12{,}0$. **152.** а) 127,02; б) 0,13; в) $-1{,}35$. **153.** а) 3, 5, 2; б) 3, 5, 2; в) 3, 5, 2, 0; л) 6, 7; м) 1, 0, 0. **154.** 1039,930; 1039,93; 1039,9; 1040; $1040 = 1{,}04 \cdot 10^3$. **155.** а) 3,4; б) 1,4. **158.** а) 7,9; б) -11. **161.** а) $7{,}2 < a + b < 7{,}4$; б) $7{,}23 < a + b < 7{,}25$. **164.** Да.

Дополнения к главе 1

177. а) 7 и 7161; б) 1 и 141 219; в) 1 и 50 955; г) 2 и 77 682; д) 97 и 3395; е) 111 и 1998; ж) 333 и 1998; з) 1 и 3 998 000; и) 1 и 675. **179.** а) $12n + 1$, где n — любое целое число; б) $12n + 11$, где n — любое целое число.

§ 4

183. а) $-\frac{78}{121}$; б) -90; в) $-2{,}5$; г) -1; д) $-4{,}5$; е) -9. **184.** а) Выражение не имеет смысла; б) $-\frac{3}{7}$; в) $\frac{54}{95}$. **188.** а) 4,2 км/ч. **189.** а) 36%. **190.** а) 31 200 р. **193.** а) vt; б) ab; в) $2(k + t)$; г) $2\pi r$; д) πR^2; е) abc. **196.** а) $\frac{150}{n+1}$ и $\frac{150n}{n+1}$ марок;

б) $\dfrac{ab}{b+c}$ и $\dfrac{ac}{b+c}$ см; в) $\dfrac{a}{n+1}$ и $\dfrac{an}{n+1}$ см. **197.** а) $\dfrac{2x+3y}{5}$ км/ч; б) $\dfrac{5a+4b}{a+b}$ км/ч. **198.** $\dfrac{60}{u+v}+\dfrac{60}{u-v}$ ч. **199.** а) $\dfrac{4p+q}{5}$%; б) $\dfrac{60x+40y}{x+y}$%. **200.** а) $\dfrac{3ap}{25}$ р.; б) $a\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^2$ р. **214.** а) $6a^2b$; б) $8b^2c^4$; в) $54c^2e^3$; г) $42e^5k^2$. **215.** д) $-25c^4k^3$; е) $63k^3p^6$; ж) $-40p^4x^7$; з) $-150x^4y^3$. **216.** а) $1\dfrac{1}{3}a^3b^5$; б) $\dfrac{2}{9}b^4c^5$; г) $-2k^4p^4$; д) $-3p^3x^5$; е) x^3y^4; ж) a^4x^7; з) $-4\dfrac{13}{18}a^4c^4$. **217.** а) $2{,}5a^3b^3c^3$; в) $-210b^3c^3e^6$; ж) $-72a^2k^3x^3$. **219.** н) $2{,}25c^4$; о) $-2\dfrac{10}{27}e^9$; п) $1\dfrac{15}{49}a^2b^2$; р) $-\dfrac{1}{216}p^3x^9$. **220.** а) $(5a)^2$; б) $(7b)^2$; д) $(8k^4)^2$; е) $\left(\dfrac{1}{7}p^4\right)^2$; ж) $\left(1\dfrac{1}{2}a^5x^3\right)^2$; з) $\left(1\dfrac{2}{3}b^8y^5\right)^2$. **221.** а) $(2a)^3$; б) $(3b)^3$; в) $(5c^2)^3$; г) $(6e^2)^3$; д) $\left(\dfrac{1}{3}a^5c\right)^3$; е) $\left(\dfrac{1}{5}b^2y^4\right)^3$; ж) $\left(2\dfrac{1}{2}a^6p^3\right)^3$; з) $\left(1\dfrac{1}{3}b^2c^8\right)^3$. **228.** а) $-6b$; б) $32a$; в) $-8b^3$; ж) $12b^7c^2$; з) $-12e^3k^5$. **240.** а) $20a^2b$; б) $11a^5b^2$.

§ 5

253. а) $0{,}9x+0{,}3y$; б) $38{,}1a-2{,}7b$; в) $-1\dfrac{2}{3}x+1\dfrac{13}{20}y$; г) $10{,}4a-1{,}7x$. **259.** а) $3b$; б) $8x$ и $4y$. **271.** д) $1{,}1ab-3bc+2cx$; е) $\dfrac{5}{6}x^2y^2-1\dfrac{5}{6}a^2b-\dfrac{3}{4}ab-\dfrac{3}{4}$. **273.** а) $5a-8b$; б) $3a+6b$; в) $-3a+10b$; г) $-5a+8b$. **281.** а) 0; б) 0. **289.** а) $3a$; б) $a-b$; в) b; г) $2b$. **294.** а) a^2+2a+1; б) x^2+3x+2. **295.** а) $20m^2+38mn+14n^2$; б) $36a^2+63ab+5b^2$. **297.** а) $-a^2-2ab-b^2$; б) $-x^2+y^2$. **302.** а) Да; б) да. **309.** а) $(x-y)(a-b)$; б) $(a-b)(x-y)$; в) $(m-n)(3+a)$. **310.** в) $(a-b)(2x+1)$; г) $(a+3)(a+1)$; д) $(m-2n)(x+1)$; е) $(a-b)(x+1)$. **315.** г) $2p^2-p-17$; д) $2x^2-5x+6$. **317.** в) $0{,}5m^3+0{,}5m^2+0{,}125$; г) 0. **324.** а) Не при любых значениях a, например, при $a=1$ равенство $-1^2=(-1)^2$ неверно; б) при любых значениях a. **328.** а) -13; б) 45; в) $3{,}591$; г) $-1{,}216$; д) $-42\dfrac{7}{8}$; е) $15\dfrac{5}{8}$; ж) $10\dfrac{70}{81}$; з) 192; и) $-0{,}0256$. **330.** Нет, $-a=0$ при $a=0$; $-a>0$ при $a<0$. **331.** а) a — любое число, $b=-a$; б) a — любое число, $a\neq 0$, $b=\dfrac{1}{a}$; в) a — любое число, $b=1$; $a=0$, b — любое число; г) a — любое число, $a\neq 0$, $b=-\dfrac{1}{a}$.

§ 6

345. а) $(x+y)^2$; б) $(a+2b)^2$; з) $(2m+3n)^2$; и) $(x^2+y^3)^2$. **347.** ж) $9m^2$; з) $-q^2$. **353.** а) $a^2-2ab^2+b^4$; б) $x^4-2x^2y+y^2$; в) $m^6-2m^3n^2+n^4$. **357.** а) $(a-b)^2$; г) $(5-3c)^2$; ж) $(x^2-3y)^2$. **360.** ж) $-11p^2+5pq+12q^2$; з) $50m^2+32mn-20n^2$;

и) p^2. **365.** г) $(5p)^2$; д) $(m^4n^3k^3)^2$; е) $(7a^2b^3c^6)^2$. **370.** а) $(2x+1)^2+4$; в) $(4x+1)^2-2$; ж) $2(x+1)^2+3$; и) $3(x-2)^2+4$. **378.** а) 4899; б) 6396; в) 89 999; г) 249 996; д) 8,9999; е) 99,96. **387.** У брата на 9 кусков больше, чем у сестры. **388.** а) $4(x+1)(2x+1)$; в) $(3x+2)(5x+4)$. **389.** а) $(x+4y)(5x-2y)$; в) $(3x-y)\times$ $\times(7x-3y)$; д) $(x^2-y)(3x^2-y)$; ж) $(x^2-2y)(5x^2-2y)$. **396.** а) 5^3; в) $(3x)^3$; г) $(4y)^3$; д) $(my)^3$; е) $(a^2b)^3$; ж) $(xy^2)^3$; з) $\left(\frac{1}{2}p\right)^3$; и) $(0,1c^2)^3$. **400.** а) $x+1$; б) $2a^6$; в) $4m^2-4m+27$; г) $-2q^6$. **411.** а) -2; б) a^4-27; в) $-2p^5+12p^2+100$; г) $2n^6-4n^5-m^3$. **416.** а) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$; в) $x^3+6x^2+12x+8$. **433.** а) a^2. У к а з а н и е. Преобразуйте данное выражение в квадрат разности $a+1$ и 1; б) m^2; в) $4q^2$; г) $4x^2$. **434.** а) $x^2+2xy+y^2-z^2$. **437.** а) a^8-17a^4+16; б) $a^2+b^2-c^2$; в) a^6-b^6; г) a^3+b^3; д) a^3-b^3; е) $4a^2-8$. **438.** а) -1; б) $4x^2-$ $-6x+21$; в) $5m^2-20m+20$; г) $28p^2-100p+95$; д) $90a^2-75a-9$; е) $-2a^2+$ $+4a+6$; ж) $-40x+3$; з) $z^2-2xz+2yz$; и) $-4yz$; к) $4yz$. **439.** а) $7a^2-2a+7$; б) $3m^2-7m+17$; в) $-4ab$; г) $4ab$; д) $-x^2-10x-1$; е) $-32a^2+20ab+7b^2$. **443.** а) $(a-b)^2$. **446.** а) $2^{64}-1$. У к а з а н и е. Добавьте множитель $(2-1)$; б) 1; в) 1. **455.** а) $4c^2(4a^2bc-3ac+7b^2-2abc^3)$; б) $3xz(4xy+6y^3z-9x^4z^5-8y^4z^3)$. **463.** ж) $(1,5-c^2)(1,5+c^2)$; з) $(1,25a^5-0,1b)(1,25a^5+0,1b)$; и) $(x-y)(x+y)\times$ $\times(x^2+y^2)$. **464.** в) $-(m+1)^2$; г) $-(n-3)^2$; д) $(x^2-y)^2$. **468.** а) $2(2m+n)\times$ $\times(-m+13n)$; б) $4(3y-2x)(x+2)$; в) $25(a-3)$. **477.** а) $(x-1)(x+1)(x^2-2)$. У к а з а н и е. Замените $-3x^2$ на $-x^2-2x^2$; б) $(bc-b-c-1)(bc+b+c-1)$. У к а з а н и е. Замените $-4bc$ на $-2bc-2bc$ и представьте полученное выражение в виде разности квадратов.

§ 7

488. д) $\frac{(x-y)^2}{4xy}$; е) $\frac{5m}{7n(a-b)}$; ж) $\frac{p}{2q}$; з) $\frac{4(a+b)}{9}$. **494.** и) $\frac{2(a-b)}{a^2-ab+b^2}$; к) x^2+ $+xy+y^2$. **499.** а) $\frac{x}{x-2}$ и $\frac{-1}{x-2}$; д) $\frac{15}{2x-8}$ и $\frac{14}{2x-8}$; е) $\frac{2x-6}{2x-10}$ и $\frac{5}{2x-10}$. **509.** а) -1; б) $\frac{2}{x-y}$; в) $\frac{5a}{a-b}$; г) $\frac{3m+3}{n-m}$. **512.** а) $\frac{3a}{2}$; б) $\frac{2x}{3}$. **515.** а) $\frac{2a+b}{a(a+b)}$; б) $\frac{2a}{a^2-b^2}$; ж) $\frac{5a^2-4ab}{(a-2b)(a+b)}$; з) $\frac{4x^2-xy}{(x-y)(2x-y)}$. **517.** а) $-\frac{1}{12x}$; б) $\frac{9}{4m}$; в) $\frac{2q+3}{pq}$; г) $\frac{a-by}{xy}$; д) $\frac{m^2-n}{mn^2}$; е) $\frac{a^2+12b}{3ab^2}$. **518.** а) $\frac{m(b+c)}{abc}$; б) $\frac{a(2b-5n)}{bmn}$; в) $\frac{2ab-8b^2+4a}{bm}$; г) $\frac{z-y}{yz}$. **519.** а) $\frac{2x-3}{x^3}$; б) $\frac{7-3am^2}{m^4}$; в) $\frac{a^4+b^4}{a^5b^7}$; г) $\frac{4b^2-3x^2}{b^3x^4}$; д) $\frac{3az^4-3bx^6y}{x^7y^5z^5}$; е) $\frac{mn(3ac^5n+b^3m^6)}{a^4b^6c^3}$. **520.** а) $\frac{1}{a-1}$; б) $\frac{13a}{6(x+1)}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{5}{a+b}$; е) $\frac{y^2-x^2}{xy(a-b)}$; ж) $-\frac{1}{xy}$; з) $\frac{n+1}{mn(m-2n)}$; и) $\frac{3+2p}{p^2q(2p-3q)}$; к) $\frac{19}{6a^2(a-4b)}$. **521.** а) $\frac{5a+9}{a^2-9}$;

б) $\frac{5m-9n}{m^2-n^2}$; в) $\frac{2x-2}{9x^2-4}$; г) $\frac{p}{2(p^2-4q^2)}$; д) $\frac{a}{a^3-b^3}$; е) $\frac{m^2+mn+n^2}{2(m^3+n^3)}$; ж) $\frac{2y}{(x-2y)^2}$; з) $\frac{p^2-pq+q^2}{(p+q)(q^3-p^3)}$. **522.** а) $\frac{3m-13}{m-2}$; б) $\frac{2y}{x+y}$; в) $\frac{a^2+b^2}{b}$; г) $\frac{a^2+b^2}{2a}$; д) $\frac{2b^2}{b-a}$; е) $\frac{2a^2}{a+b}$. **525.** а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{2}{3n}$; в) $\frac{2}{p}$; г) $2ab$; д) 4. **526.** а) $\frac{2ab-2b^2}{a}$; б) $\frac{2x-2y}{xy}$; в) $\frac{4n}{m+n}$; г) $\frac{2(b+1)}{a+2}$. **531.** а) $\frac{1}{5}m$; б) $-\frac{1}{4}a$; д) $\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$; е) $x-1,5$. **534.** а) $ab+ac+bc$; б) $15x^2-5x+5$; в) $\frac{a^2}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+b$; г) $6x+\frac{3x^3}{y}+12x^2$. **535.** а) $\frac{a}{x}$; б) $1-2a$; в) -1; г) $\frac{a^2}{bc}$; д) $-\frac{1}{x}$; е) $-0,5$; ж) $-\frac{x}{n}$; з) 3. **536.** а) $a+\frac{1}{b}$; б) $\frac{3a-2b^2}{6b}$; в) $2x+\frac{1}{3b}$. **537.** а) 0; б) $\frac{2}{m+2}$; в) $\frac{3x}{4ay}$; г) $\frac{d-c}{d}$. **539.** а) b; б) a. **544.** а) При $x=2$; б) при $x=-4$; в) при $x=2$; г) при $x=-2,5$. **548.** а) 0,96; б) 0,1; в) -4; г) $-10\frac{1}{9}$. **549.** а) 6; б) 0,5. **550.** 2. **553.** а) При любых значениях x, кроме $x=0$; б) при любых значениях x и y, кроме $x=y=0$; в) при любых значениях m и n, таких, что $|m|\neq|n|$. **557.** а) 3,5; б) 3,5. **558.** в) -5, -1, 1, 5; г) -2, 0, 2, 4; д) -2, 0. **565.** а) При любых значениях a и b; в) при $b\neq 0$; г) при $a\neq 0$ и $b\neq 0$; д) при $x\neq -y$.

§ 8

571. а) 1; б) 1; в) 1; г) 1. **572.** а) 2; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{4}$. **573.** а) 1; б) выражение не имеет смысла. **574.** а) 2^3; б) 2^8; в) 3^{-2}; г) 3^{-1}; д) 3^{-4}; е) 5^1; ж) 2^{-4}. **575.** а) 10 000; 1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; б) 32; 16; 8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$; в) -27; 9; -3; 1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{27}$. **576.** а) 1; -1; -1; -1; -1; б) 1; -1; 1; 1; -1; в) $\frac{1}{4}$; -4; 4; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$. **584.** а) a^{-1}; б) a^1; в) a^8; г) a^0; д) a^{-10}; е) a^9. **587.** а) a^6b^{-15}; б) $a^{14}b^{-4}$; в) $a^{12}b^{20}$. **594.** а) $3^4>4^3$; б) $2^4=4^2$; в) $10^{20}>20^{10}$; г) $100^{200}>200^{100}$; д) $1999^{2000}>1998^{1999}$. **595.** а) $(a^2)^5$; б) $(a^2)^6$; в) $(a^2)^{21}$. **596.** а) $(a^5)^{10}$; б) $(a^2)^{25}$; в) $(a^{10})^5$. **600.** а) $(a^{-2})^{-25}$; б) $(a^{-5})^{-10}$; в) $(a^{10})^5$; г) $(a^{-10})^{-5}$; д) $(a^{-25})^{-2}$. **605.** а) При $n=2$; б) при $n=10$; в) при $n=-6$. **606.** а) $2,74\cdot 10^3$; б) $3,82\cdot 10^{-2}$; в) $1,1\cdot 10^7$. **607.** а) $6\cdot 10^2$; б) $6\cdot 10^5$; в) $4\cdot 10^4$; г) $5\cdot 10^4$. **608.** а) $1,65\cdot 10^3$; б) $3,94\cdot 10^{-15}$; в) $2,54\cdot 10^{14}$. **612.** а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; б) $\frac{1}{(a+b)^2}$. **613.** а) 0,3; б) $\frac{4}{9}$; в) 8. **615.** а) $a^{-1}-b^{-1}$; б) $a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$. **616.** а) При $a\neq 3$

и $a \neq -3$. **617.** а) $\frac{a+b}{b-a}$; е) $\frac{ab}{b-a}$. **618.** а) $-\frac{1}{3\,998\,000}$; б) $\frac{1999}{949\,494}$. **619.** а) $\frac{2a}{1-3a}$; б) $\frac{a}{2-2a}$; в) $\frac{2x^2+6x}{9}$; г) $\frac{-3x(x-1)}{4}$. **620.** а) $\frac{4}{143}$; в) -126. **621.** а) $\frac{14}{11}$.

Дополнения к главе 2

623. а) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$; б) $a+b$; в) $\frac{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}{a^2+ab+b^2}$; г) $\frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4}{a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6}$; д) $\frac{1}{a-b}$; е) $a+b$; ж) $\frac{a^2+2a+4}{a^3+2a^2+4a+8}$; з) $a+3$; и) $\frac{a^4+2a^3+4a^2+8a+16}{a^2+2a+4}$; к) $\frac{a^4-2a^3+4a^2-8a+16}{a^6-2a^5+4a^4-8a^3+16a^2-32a+64}$; л) $\frac{1}{a-2}$; м) $a+1$. **624.** а) Да; б) да. **625.** а) Частное x^2-5x+6, остаток 0; частное x^2-2x-3, остаток 0; частное x^2-x-2, остаток 0; б) частное x^2+x-1, остаток 7; частное x^2+x+1, остаток 7; частное x^2+x-2, остаток 10; в) частное x, остаток $-x-1$; частное x^2, остаток x^2-1; частное $x-1$, остаток 0. **626.** а) $x-1$; б) $x-1$; в) x^2-x; г) x^2-4x+3. **627.** а) $x+1$; б) $x-1$; в) $\frac{x-1}{x+1}$; г) $\frac{x+2}{x-2}$. **629.** а) x^8+x^4+1; б) $x^{10}-x^8+x^6-x^4+x^2-1$; в) $x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1$; г) $x^{11}-x^{10}+x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$. **630.** а) При $n=-7, -1, 1, 7$; б) при $n=-5, -3, -1, 1$; в) при $n=1, 3$.

§ 9

641. а) $\frac{10}{k}$; в) $-\frac{a}{k}$. **643.** а) При $k \neq 0$; б) при $k=0$ и $b \neq 0$; в) при $k=0$ и $b=0$. **647.** а) Да; б) да; в) да; г) нет; д) да; е) да. **649.** ж) 6; з) $\frac{1}{21}$; и) 0; к) 0; л) 0; м) 0. **650.** а) $1\frac{1}{7}$; б) -3; в) 0,04; г) $-0{,}4$. **651.** и) 2,5; к) $\frac{2}{3}$; л) -4; м) 4,5. **652.** а) 6; б) $\frac{2}{9}$; в) 5; г) 2; д) $\frac{16}{27}$; е) $7\frac{5}{7}$; ж) 28; з) 7,2. **653.** а) Нет корней; в) x — любое число; д) 2,2; е) 1; ж) 5,5; з) $1\frac{5}{7}$; и) нет корней; к) нет корней; л) x — любое число. **654.** а) $2\frac{1}{11}$; б) 2,75; в) $1\frac{1}{3}$; г) нет корней. **656.** ж) 6; з) 8. **657.** а) 5; б) 2; в) 3; г) 0; д) 6; е) 2; ж) 3; з) 1. **658.** 49 и 37. **659.** а) 820, 1240 и 1170 учащихся; б) 65, 81 и 130 книг; в) 33, 11 и 26 см; г) 1300, 650 и 450 рабочих. **660.** а) 65 и 50 р.; б) 50 км/ч. **663.** а) 6 рыбок; б) 0,5 кг. **664.** а) 9 и 1 см; б) $8\frac{1}{3}$ и $1\frac{2}{3}$ см; в) 5,5 и 4,5 см. **665.** а) 18 и 20; б) 4, 6 и 8; в) 11 и 13; г) 5, 7 и 9. **666.** а) 2,4, 0,9 и 3,2 т; б) 30, 34 и 32 книги.

§ 10

676. а) $y = 5 - x$; б) $y = 2x - 3$; в) $y = 1{,}5x + 3{,}5$; г) $y = 0{,}6x - 1{,}6$. **677.** а) $y = 4x + 3$; б) $y = \frac{1}{3}x + 2$; в) $y = 2 - 3x$. **678.** а) $x = 3y - 2$; б) $x = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{3}$; в) $x = 2y - 3$. **681.** а) При $a = -2{,}5$; б) при $b = 25$. **693.** а) При $a = 2$ и $b = 2$; б) при любом a и $b = 2$. **696.** а) (14; 7); б) (10; −2); в) (2; 6); г) (3; 21). **697.** а) (3; 2); б) (4; 2); в) (5; 3); г) (1; −1); д) (3; 4); е) (−2; 1); ж) (31; 7); з) (2; 1); и) (1; −1); к) (0; −3); л) (8; −4); м) (−3; 3). **698.** а) (2; −3); б) (7; −13); в) (2; 3); г) (−1; −2); д) (−2; 3); е) (4; −5). **699.** а) $\left(-\frac{25}{17}; \frac{23}{17}\right)$; б) $\left(\frac{1}{6}; -\frac{3}{2}\right)$. **700.** а) (−5; 4); б) (0; 1); в) (5; −18); г) (−4; −11). **701.** а) (4; −1); б) (−5; −1); в) (0,5; 2,5); г) (−1; 5). **702.** а) (−1; 2); б) (5; −2); в) (7; 18); г) (2; −1); д) (0; 3); е) (7; 5); ж) (7; −2); з) (5; −6). **703.** а) (−2; 2); б) (2; 3); в) (1; 1); г) (−3; −3). **704.** а) $\left(\frac{2}{9}; 2\frac{5}{9}\right)$; б) (0; 2). **709.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **715.** При $a = 9{,}5$. **716.** Да. **720.** а) (3; 1); б) (−2; 11); в) (3; 1); г) (4; −5). **721.** а) (x; $0{,}5 - x$), где x — любое число; б) (0,5; 0); в) нет решений; г) (x; $0{,}5x - 2$), где x — любое число. **723.** а) Нет решений; б) $\left(15; -11\frac{1}{3}\right)$; в) (7; 5); г) (5; −2); д) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$; е) нет решений. **725.** а) Нет решений; б) (−3; 7); в) нет решений; г) (x; $x + 2$), где x — любое число; д) нет решений; е) (0; y), где y — любое число; ж) (x; y), где x, y — любые числа. **726.** а) Бесконечно много решений; б) единственное решение; в) нет решений; г) единственное решение; д) нет решений; е) бесконечно много решений; ж) бесконечно много решений; з) единственное решение; и) нет решений. **727.** а) При $a = 10$; б) при $a = -5$. **728.** а) Нет; б) да, $a = -2$. **729.** а) При $a = 2$; б) при $a = 6$. **730.** а) Да, $a = -0{,}5$; б) нет. **731.** а) При $a \neq -15$; б) при $a \neq -21$. **733.** а) (1; 1; 1); б) (1; 4; 2); в) (2; 1; 3); г) (3; 2; 1); д) (1; 1; 1); е) (2; 0; 1); ж) (2; 3; −1); з) (3; 3; 3). **734.** а) 3 и 7; б) 6 и 15. **735.** а) 23 и 17; б) 4 и 19. **736.** а) 11 и 5,5; б) 6 и 18; 8,4 и 25,2. **737.** а) 13 и 6; б) 50 и 60. **738.** а) 3 и 5; б) 2,5 и 4. **739.** а) 28 км; б) 42 км. **740.** 80 деталей. **741.** 12 и 45 км/ч. **742.** 24 и 17 км. **743.** 11 и 15 см. **744.** 20 билетов по 100 р. и 10 билетов по 150 р. **745.** Кресло стоит 8000 р., стол — 2000 р. **746.** 6 монет. **748.** 40 и 25 м. **749.** 500 р. и 300 р. Надо считать, что каждая бригада зарабатывает в день одну и ту же сумму (каждая бригада — свою). **750.** 100 пирожных и 200 булочек. **751.** а) 600 и 400; б) 51 и 33,6. **752.** 9, 13 и 16 см. **754.** 41, 53 и 66 см. **755.** 42. **757.** 40 и 170 рупий. **758.** 400 г. **759.** а) 125 кг; б) 20, 25, 30 и 35 р.; в) 6, 5, 4, 3, 3, 2 и 1 год. **760.** 60, 45 и 40 орехов. **761.** а) 3 ч; б) 4 ч; в) 5 ч. **762.** 16, 10 и 10 л.

Дополнения к главе 3

763. а) $x = 5n$, $y = 2 - 3n$, где n – любое целое число. **765.** а) Нет; б) да. **767.** 4 стула и 3 табуретки. **768.** Купили воробьёв, горлиц и голубей или 15, 10, 15, или 6, 20, 14. **769.** Задача имеет 3 решения: петухов, кур и цыплят было 12, 4, 84, или 8, 11, 81, или 4, 18, 78. **770.** Задача имеет 8 решений: мужчин, женщин и девушек было 1, 16, 9, или 2, 14, 10, или 3, 12, 11, или 4, 10, 12, или 5, 8, 13, или 6, 6, 14, или 7, 4, 15, или 8, 2, 16. **771.** Задача имеет 26 решений: гусей, уток и чирков было x, $80 - 3x$ и $2x$, где x – любое целое число, $1 \leqslant x \leqslant 26$ (покупали птиц трёх видов, поэтому $x \neq 0$). **772.** Гусей, уток и чирков было 15, 1, 4. **774.** а) (14; 3); б) (–7; –5); в) (3; 5); г) (2; 2; 2); д) (–3; –9; 0); е) (5; 5; 5). **775.** а) (2; 1); б) (3; 2); в) (1; 1); г) (2; 1; 0); д) (0; 0; 1); е) (1; 1; 1); ж) $(1; y; -y)$, где y — любое число; з) $(x; 2; 4 - x)$, где x — любое число; и) (1; 1; 1); к) (2; 1; –1).

Задания для повторения

778. а) 835; б) 4; в) 975; г) 12; д) 47; е) 1426; ж) 114 289; з) 406 945; и) 27; к) 4. **791.** $6 = 2^2 + 2$; $18 = 2^4 + 2$. **793.** Да, число 2. **794.** а) 23; б) 31. **795.** а) 2, 3, 7, 8; б) если само число чётное. **796.** Первое из семи решений: 378 126. **797.** 2519. **801.** а) 0; б) 0. **811.** к) $4\frac{1}{8}$; л) $2\frac{5}{6}$; м) $1\frac{5}{6}$; н) $9\frac{4}{5}$. **812.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{7}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{125}{396}$; д) $\frac{3}{4}$; е) $4\frac{4}{5}$; ж) $3\frac{3}{8}$; з) 0; и) $8\frac{1}{3}$. **813.** а) 3; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $1\frac{1}{2}$; д) $1\frac{3}{4}$; е) 4. **814.** а) $1\frac{1}{2}$; б) $\frac{12}{25}$; в) $1\frac{8}{27}$; г) $\frac{4}{7}$; д) $\frac{1}{3}$; е) $\frac{2}{7}$. **815.** а) $58\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$; в) 33; г) $15\frac{15}{16}$. **821.** в) 0. **822.** в) 4; г) –2. **826.** а) 3; б) $\frac{1}{8}$; в) 1,8; г) 135. **831.** а) $\frac{4}{7}$. **835.** а) –7,7; б) –2; в) 1,7; г) 4,8. **838.** а) 0; б) –0,14. **839.** а) 14,4; б) –5,4; в) –38; г) 36,5; д) 20; е) 0,25; ж) –62,2; з) 4,4. **840.** а) 6; б) 0,5; в) 3,1; г) 32. **842.** а) $10\frac{1}{6}$; б) 0; в) 0,25; г) 4. **847.** а) 0; б) 0; в) 1,4; г) 2. **849.** а) 16; б) 5,375. **850.** а) 0,156. **851.** а) 1,05; б) 0,0115; в) 4,5; г) 0,0003. **862.** а) 0,(8); б) нет; в) 3,6(3). **863.** а) $a = -b$, где b — любое число; б) $a = b$, где b — любое число; в) $a = 0$, b — любое число, $b \neq 0$ или $b = 0$, a — любое число; г) $a = 1$, b — любое число, $b \neq 0$ или $b = 0$, a — любое число. **864.** а) $2a$ и 0. **867.** а) 8; б) 4; в) 34. **874.** а) 16; б) 17,5; в) 54. **876.** а) 12; б) 42. **887.** ab, $2ab$, $4ab$, $5ab$, $8ab$, $10ab$. **899.** а) $10a$; б) $-2x$; в) $-18y$; г) $3a$; д) $-10b$; е) $-5x$; ж) $-4ab$; з) $-7xy$; и) 0; к) $-9ax^2$. **906.** а) 2; б) 5; в) –6; г) $-\frac{1}{4}$. **907.** а) $5a^2b$; б) $26a^3b^3$; в) $pq - p^2 - q^2$; г) $2a^2 + 6m^3$; д) $2y$; е) $2x$. **911.** а) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. **912.** Указание. В заданиях а) – в) примените формулу разности квадратов. **915.** в) Указание. Рассмотрите три случая: $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k - 1$, где k – целое число. **928.** а) $(x^2 + 1) \times (x^4 - x^2 + 2)$; в) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$. **935.** а) 91; б) –46; в) 50 000;

г) 40 000. **936.** а) 66,8; б) 109; в) 10,8; г) 169; д) –0,2; е) $8\frac{331}{722}$; ж) 0,8; з) –100. **938.** а) 2; б) 87; в) 1,48; г) 1. **939.** а) 12,5; б) 0,08; в) $3\frac{19}{110}$. **942.** а) $-\frac{2a}{3b}$; б) $-\frac{5m}{4n}$; в) $\frac{5b(a-b)}{4c(a+b)}$; г) $\frac{5m(2n+m)}{4(2n-m)}$. **947.** а) 2; б) $2(x^2+y^2)$; в) $\frac{m^4-n^4}{m^2n^2}$; г) $4x^2$; д) –1; е) –2. **948.** а) x^2+9; б) $\frac{a^3+2a^2+4a+1}{a+2}$; в) $-3m$; г) $-5a$; д) 0; е) 0. **950.** г) $\frac{an-bm}{an+bm}$; д) 1; е) $\frac{1}{m}$; ж) $\frac{c+1}{c-1}$. **962.** а) 0,1; б) 2. **963.** а) –0,2; б) $12\frac{1}{14}$; в) 10; г) 11. **967.** а) 2; б) 1; в) 5; г) 2. **969.** а) 0,6; б) 2; в) 2; г) 5. **970.** а) $4\frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{4}$; в) 0; г) 0,2; д) 8; е) 3; ж) 7. **971.** а) 6; б) $5\frac{3}{4}$; в) $1\frac{1}{3}$; г) $1\frac{1}{5}$. **972.** а) –1,2; б) $4\frac{2}{3}$; в) 3; г) 5. **973.** а) –0,5; б) –1; в) $\frac{232}{45}$; г) $\frac{21}{31}$. **974.** а) –9; б) 1,2; в) 0,1. **975.** а) 1,5; б) –2,2; в) $\frac{3}{7}$; г) $-1\frac{1}{3}$. **976.** а) 6; б) $2\frac{2}{3}$; в) 7,5; г) –2,45; д) 3; е) 3; ж) 12; з) –2,4. **977.** а) 5; б) $-\frac{1}{4}$; в) $-\frac{5}{7}$; г) $-\frac{10}{53}$. **978.** а) 17,5; б) 9; в) $5\frac{5}{7}$. **979.** а) a; б) $1-a$; в) $2b-a$; г) $a-b-c$; д) $2-y$; е) $y-3-a$. **981.** а) $-6a-7b$; б) $\frac{3a-5b}{8}$; в) $\frac{3a}{a+b}$; г) 1; д) $\frac{b+c}{a}$; е) $\frac{ab}{a+c}$. **982.** а) a; б) $-\frac{3b}{2}$; в) $3c$; г) $2a$. **983.** а) Если $a=0$, $b=-3$, то x — любое число; если $a=0$, $b\neq-3$, то уравнение не имеет корней; если $a\neq0$, то $x=\frac{3+b}{a}$. **984.** а) Если $a\neq2b$, то уравнение имеет единственный корень $x=\frac{ab}{2b-a}$; б) если $a=2b$, $b\neq0$, то уравнение не имеет корней; в) если $a=2b$, $b=0$, то корнем уравнения является любое число x. **986.** а) $\left(\frac{3a+b}{4};\frac{a-b}{4}\right)$, где a и b – любые числа; б) если $c=b$, $a\neq cd$, то система не имеет решений; если $c=b$, $a=cd$, то система имеет решения $(x;\ a-x)$, где x — любое число; если $c\neq b$, то система имеет единственное решение $\left(\frac{ab-bcd}{b-c};\frac{bcd-ac}{b-c}\right)$; в) если $c=-b$, $a\neq-cd$, то система не имеет решений; если $c=-b$, $a=-cd$, то система имеет решения $(x;\ a-x)$, где x — любое число; если $c\neq-b$, то система имеет единственное решение $\left(\frac{bcd+ab}{b+c};\frac{ac-bcd}{b+c}\right)$. **990.** а) 2 и 8; б) 2 и 4; –2 и –4. **998.** а) 3 и 5; б) 60 аршин; в) 16 орехов; г) 75 пряников; д) 13 и 17 р. **1000.** 1,28 ч. **1003.** 9 р. **1004.** 4 км. **1005.** 32,0 км/ч. **1006.** 59 км/ч.

1007. В 11 раз. **1009.** а) 900; б) 20. **1014.** 12 600 р. **1015.** 20. **1016.** а) За 8 ч. **1017.** а) Через 18 мин. **1020.** За 6 дней. **1021.** За 1 ч 20 мин. **1024.** а) 210 и 70; б) 316 и 79. **1025.** 150 кг. **1026.** а) 18 и 6; б) 3 и 9; 2 и 8; 1 и 7. **1028.** а) За 24 дня; б) за 45 дней. **1047.** а) 240 км; б) 320 км. **1048.** а) 360 р.; б) 660 р. **1049.** а) 10; б) 36. **1052.** а) 0,5 ч; б) 0,6 ч. **1053.** а) 4,5 ч; б) $1\frac{1}{3}$ ч. **1054.** а) 6 ч; б) 6 ч. **1055.** а) 37,5 р.; б) 90 р. **1056.** а) 125%; б) 80%. **1057.** а) 44; 36; б) 75; 25. **1058.** а) 576; б) 338. **1061.** а) На 25%; б) на 100%. **1064.** а) На 60%; б) на 79%. **1066.** а) В 1,5 раза; б) в 2 раза. **1069.** За $\frac{abc}{ab+bc+ac}$ ч. **1070.** За $\frac{abx}{ab-ax-bx}$ ч. **1071.** За $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ дней; за $\frac{2abc}{bc+ab-ac}$ дней; за $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ дней. **1072.** За 5 ч. Указание. Обратите внимание: *почистив* бак картошки, рядовой Степанов *начистит* 80% бака картошки. **1073.** За 3,2 ч. **1074.** 25%. **1075.** 12%. **1077.** а) 1,2 т; б) 2 т. **1079.** На $\frac{100p}{100-p}$ %. **1080.** а) 15 кг; б) 35 кг. **1085.** Доход первого брата больше, чем доход второго брата. **1086.** $200p + 100q + pq$. **1087.** 12 и 40 лет. **1088.** 350 км. **1089.** 72 версты. **1090.** 8 аршин по 3,5 р. **1091.** 80 км/ч; 400 км. **1092.** 7,2 км. **1093.** а) Через 5 ч; б) 36 км; в) 7,2 км/ч. **1094.** 480 км. **1095.** 32 ученика, 21 парта. **1096.** 30 учеников. **1097.** 126 семей, 3750 денежных единиц. **1098.** 35,5%. **1099.** Женщин больше, чем мужчин, на 12%. **1100.** а) Вторая мера выгоднее; б) на 50%. **1102.** 44 км. **1103.** Примерно на 436 миль. **1104.** За 3 ч. **1108.** 6 и 2 дня. **1109.** 4 и 8. **1110.** 45 и 5. **1111.** 4,2 и 2,4 л. **1112.** 4 и 5 соток. **1113.** 3 и 5 л. **1114.** 40, 35 и 25 лимонов. **1117.** а) 22; б) 85 714. **1118.** 40 и 56 орехов. **1119.** В 2 раза. **1120.** В 2 раза. **1121.** Первый пришёл раньше второго. **1122.** а) 12 км/ч; б) 12,5 км/ч. **1123.** 2 ч 55 мин. **1124.** За 120 мин. **1126.** В 6 ч утра. **1127.** 40 км. **1128.** 75. **1129.** 7 пятирублёвых и 4 десятирублёвые монеты. **1132.** За 4 ч.

Задания на исследование

1. Указание. Вычислите долю сока в бочке после первой операции (отливают 10 л сока и вливают 10 л воды), после второй операции и т. д. **2.** Указание. Выразите через n долю сока в бочке после n-й операции (отливают 1 л сока и вливают 1 л воды). **3.** а) При $n = 4$; б) при $n = 5$. **5.** Двумя способами. **6.** Семью способами. **8.** 10 вариантов. **9.** Да. **13.** (9900; 99); (4900; 98); (2400; 96); (1900; 95); (1150; 92); (900; 90); (525; 84); (400; 80); (300; 75); (150; 60); (100; 50); (25; 20). **14.** а) 2; б) $\frac{n-1}{2}$. **15.** а) 3; б) $\frac{n}{2}$.

Задания для самоконтроля

1. –16,7; –17,06; –17,6; –17,76. **2.** 2), 4), 3), 1). **3.** 2). **4.** 1). **5.** 1600 р. **6.** 3). **7.** 4). **8.** 3). **9.** 3). **10.** 3). **11.** 1). **12.** 1). **13.** 1). **14.** –1,5. **15.** –5. **16.** 0,08. **17.** 1,1. **18.** 0 при $x = 2$, $y = 1$.

Оглавление

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Никольский Сергей Михайлович
Потапов Михаил Константинович
Решетников Николай Николаевич
Шевкин Александр Владимирович

АЛГЕБРА

7 класс

Учебник для общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Г. Войлокова*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, С. В. Дубова*
Художники *В. А. Андрианов, О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *К. В. Кергелен*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректор *Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 20.03.13. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 19,10 + 0,48 форз. Тираж 15 000 экз. Заказ № 6862.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Тульская типография» ОАО «Издательство «Высшая школа». Россия, 300600, г. Тула, пр. Ленина, д. 108.