Геометрия

7

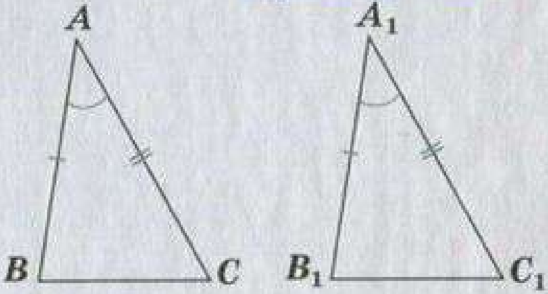
8

9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

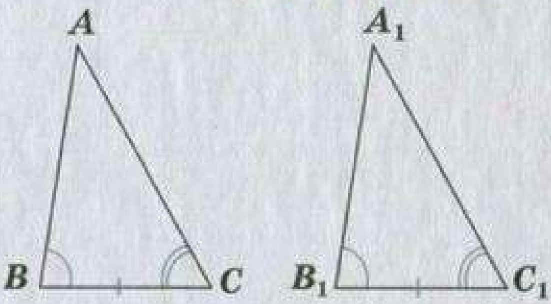
первый признак



Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

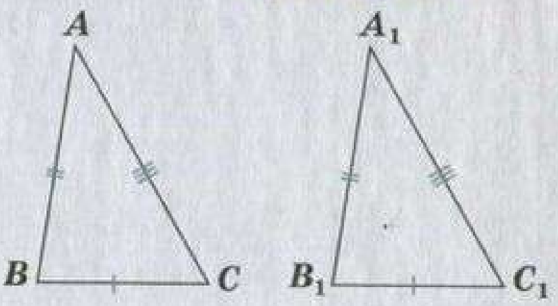
второй признак



Если $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

третий признак

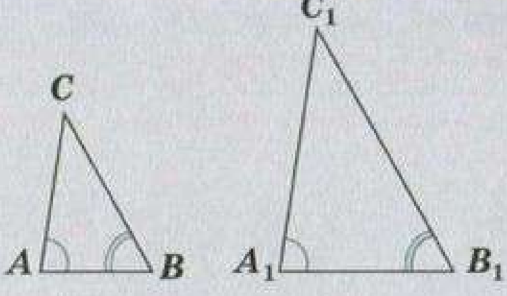


Если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

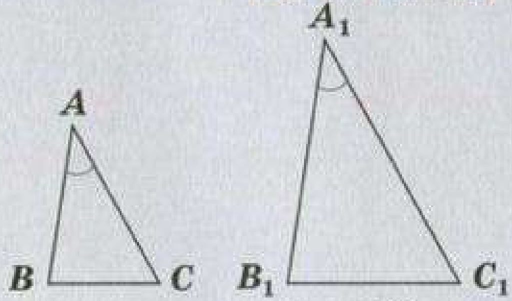
первый признак



Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,

то $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

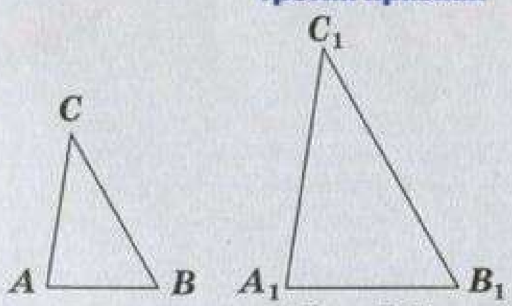
второй признак



Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$,

то $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

третий признак



Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$,

то $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

ФГОС

Геометрия

7–9 классы

Учебник для общеобразовательных организаций

2-е издание

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

Москва «Просвещение» 2014

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36

А в т о р ы: Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина

Издание подготовлено под научным руководством академика **А. Н. Тихонова**

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/583 от 14 10.11) и Российской академии образования (№ 01-5/7д-346 от 17.10.11)

Геометрия. 7—9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2014. — 383 с. : ил. — ISBN 978-5-09-032008-5.
Г36

Содержание учебника позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС основного общего образования. Учебник включает трёхступенчатую систему задач, а также исследовательские задачи, темы рефератов, список рекомендуемой литературы, что позволит учащимся расширить и углубить свои знания по геометрии.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-09-032008-5

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый предмет — геометрию и будете заниматься ею пять лет. Что это такое — геометрия?

Геометрия — одна из самых древних наук, она возникла очень давно, ещё до нашей эры. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» — по-гречески земля, а «метрео» — мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений. В результате этой деятельности появились и постепенно накапливались различные правила, связанные с геометрическими измерениями и построениями. Таким образом, геометрия возникла на основе практической деятельности людей, а в дальнейшем сформировалась как самостоятельная **наука, занимающаяся изучением геометрических фигур.**

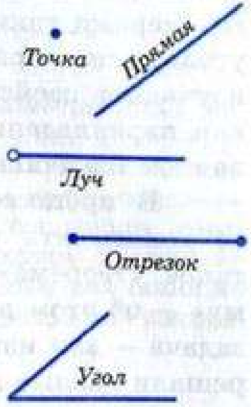


Рис. 1

На уроках математики вы познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и представляете себе, что такое точка, прямая, отрезок, луч, угол (рис. 1), как они могут быть расположены относительно друг друга. Вы знакомы с такими фигурами, как треугольник, прямоугольник, окружность, круг и др. (рис. 2); знаете, как измеряются отрезки с помощью линейки с миллиметровыми делениями и как измеряются углы с помощью транспортира. Но всё это лишь самые первые геометрические сведения. Теперь вам предстоит расширить и углубить ваши знания о геометрических фигурах. Вы познакомитесь с новыми фигурами и со многими важными и интересными свойствами уже известных вам фигур. Вы узнаете о том, как используются свойства геометрических фигур в практической деятельности. Во всём этом вам поможет учебник и, конечно, учитель.

Рис. 2

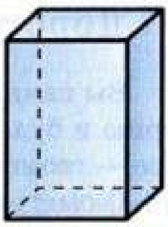
Школьный курс геометрии делится на **планиметрию и стереометрию.** В планиметрии рассматриваются свойства фигур на плоскости. Примерами таких фигур являются отрезки, треугольники, прямоугольники. В стереометрии изучаются свойства фигур в пространстве, таких, как параллелепипед, шар, цилиндр (рис. 3). Мы начнём изучение геометрии с планиметрии.

В процессе изучения геометрии вы будете доказывать **теоремы** и решать **задачи.** Что такое «теорема» и что значит «доказать теорему» — об этом вы скоро узнаете. Ну а что такое задача — вам известно, на уроках математики вы решали разные задачи.

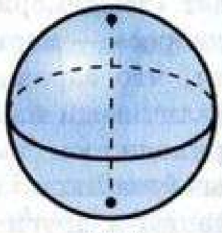
В нашем учебнике геометрии много задач: есть задачи и практические задания к каждому параграфу, дополнительные задачи к каждой главе и, наконец, задачи повышенной трудности. Основными являются задачи к параграфу. Более трудные задачи отмечены звёздочкой. Задачи, отмеченные знаком ☐, имеют электронную версию[1]. В конце книги к задачам даны ответы и указания.

Всем, кто проявит интерес к геометрии, кому понравится решать задачи и доказывать теоремы, мы советуем порешать не только обязательные задачи, но и задачи со звёздочкой, дополнительные задачи и задачи повышенной трудности. Решать такие задачи непросто, но интересно. Не всегда удаётся сразу найти решение. В таком случае не унывайте, а проявите терпение и настойчивость. Радость от решения трудной задачи будет вам наградой за упорство. Не бойтесь заглядывать вперёд, читать те параграфы, которые ещё не проходили в классе. Задавайте вопросы учителю, товарищам, родителям.

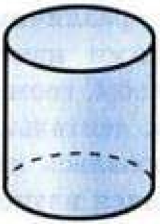
Доброго вам пути, ребята!



Прямоугольный параллелепипед



Шар



Цилиндр

Рис. 3

[1] Единая коллекция ЦОР. Набор ЦОР к учебнику «Геометрия. 7—9 классы» авторов Л. С. Атанасяна и др. Электронный адрес school-collection.edu.ru.

Глава I

Начальные геометрические сведения

В этой главе речь пойдёт о простейших геометрических фигурах — точках, прямых, отрезках, лучах, углах. С ними вы познакомились на уроках математики в 5 и 6 классах. К тому, что вы знаете об этих фигурах, мы добавим новые сведения, и они послужат нам опорой для изучения в следующих главах свойств более сложных фигур. Ещё мы расскажем о практических приложениях геометрии — о том, как геометрия помогает прокладывать прямолинейные дороги и как проводится измерение углов на местности.

§1 Прямая и отрезок

1 Точки, прямые, отрезки

Вспомним, что нам известно о точках и прямых. Мы знаем, что для изображения прямых на чертеже пользуются линейкой (рис. 4), но при этом можно изобразить лишь часть прямой, а всю прямую мы представляем себе простирающейся бесконечно в обе стороны.

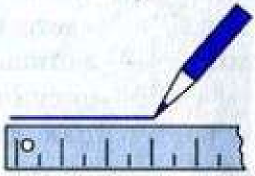
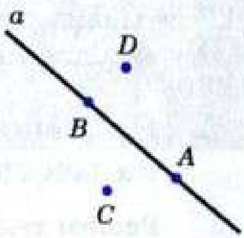


Рис. 4

Обычно прямые обозначают малыми латинскими буквами, а точки — большими латинскими буквами. На рисунке 5 изображены прямая a и точки A, B, C и D. Точки A и B лежат на прямой a, а точки C и D не лежат на этой прямой. Можно сказать, что прямая a проходит через точки A и B, но не проходит через точки C и D. Отметим, что через точки A и B нельзя провести другую прямую, не совпадающую с прямой a. Вообще,



Прямая и точки

Рис. 5

через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну[1].

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые различны.

Рассмотрим теперь две прямые. Если они имеют общую точку, то говорят, что эти прямые пересекаются. На рисунке 6 прямые a и b пересекаются в точке O, а прямые p и q не пересекаются. Две прямые не могут иметь двух и более общих точек. В самом деле, если бы две прямые имели две общие точки, то каждая из прямых проходила бы через эти точки. Но через две точки проходит только одна прямая. Таким образом, можно сделать вывод: **две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек.**

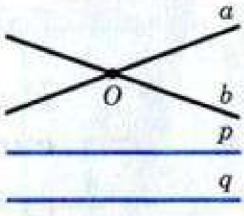


Рис. 6

Прямую, на которой отмечены две точки, например A и B, иногда обозначают двумя буквами: AB или BA. Для краткости вместо слов «точка A лежит на прямой a» используют запись $A \in a$, а вместо слов «точка B не лежит на прямой a» — запись $B \notin a$.

На рисунке 7, *а* выделена часть прямой, ограниченная двумя точками. Такая часть прямой называется **отрезком**. Точки, ограничивающие отрезок, называются его **концами**. На рисунке 7, *б* изображён отрезок с концами A и B. Такой отрезок обозначается AB или BA. Отрезок AB содержит точки A и B и все точки прямой AB, лежащие между A и B.

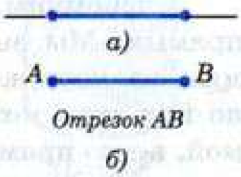


Рис. 7

2 Провешивание прямой на местности

Решим такую задачу: с помощью данной линейки построить отрезок более длинный, чем сама линейка. С этой целью приложим к листу бумаги линейку, отметим точки A и B и какую-нибудь точку C, лежащую между A и B (рис. 8, *а*). Затем

Рис. 8

передвинем линейку вправо так, чтобы её левый конец оказался около точки C, и отметим точку D около правого конца линейки (рис. 8, *б*). Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Если мы проведём теперь отрезок AB, а затем отрезок BD, то получим отрезок AD, более длинный, чем линейка.

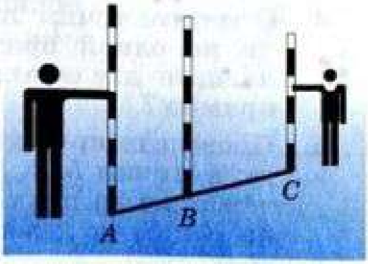
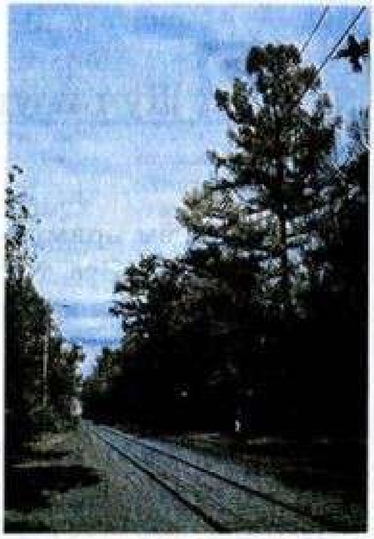


Рис. 9

Аналогичный приём используется для «проведения» длинных отрезков прямых на местности. Этот приём заключается в следующем. Сначала отмечают какие-нибудь точки A и B. Для этой цели используют две вехи — шесты длиной около 2 м, заострённые на одном конце для того, чтобы их можно было воткнуть в землю. Третью веху ставят так, чтобы вехи, стоящие в точках A и B, закрывали её от наблюдателя, находящегося в точке A (точка C на рисунке 9). Следующую веху ставят так, чтобы её закрывали вехи, стоящие в точках B и C, и т. д.



Описанный приём называется **провешиванием** прямой (от слова «веха»). Он широко используется на практике, например при рубке лесных просек, при прокладывании шоссейных или железных дорог, линий высоковольтных передач и т. д.

Практические задания

1 Проведите прямую, обозначьте её буквой a и отметьте точки A и B, лежащие на этой прямой, и точки P, Q и R, не лежащие на ней. Опишите взаимное расположение точек A, B, P, Q, R и прямой a, используя символы $\in$ и $\notin$.

2 Отметьте три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и проведите прямые AB, BC и CA.

3 Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи.

4 Отметьте точки A, B, C, D так, чтобы точки A, B, C лежали на одной прямой, а точка D не лежала на ней. Через каждые две точки проведите прямую. Сколько получилось прямых?

5 Проведите прямую a и отметьте на ней точки A и B. Отметьте: а) точки M и N, лежащие на отрезке AB; б) точки P и Q, лежащие на прямой a, но не лежащие на отрезке AB; в) точки R и S, не лежащие на прямой a.

6 Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько отрезков получилось на прямой?

7 ☐ На рисунке 10 изображена прямая, на ней отмечены точки A, B, C и D. Назовите все отрезки: а) на которых лежит точка C; б) на которых не лежит точка B.

Рис. 10

§2 Луч и угол

3 Луч

Проведём прямую a и отметим на ней точку O (рис. 11). Эта точка разделяет прямую на две части, каждая из которых называется **лучом, исходящим из точки** O (на рисунке 11 один из лучей выделен цветной линией). Точка O называется **началом** каждого из лучей. Обычно луч обозначают либо малой латинской буквой (например, луч h на рисунке 12, *а*), либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку на луче (например, луч OA на рисунке 12, *б*).

Точка O разделяет прямую на два луча

Рис. 11

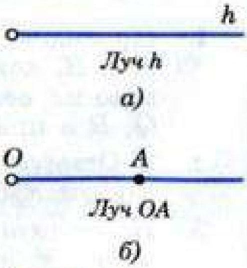


Рис. 12

4 Угол

Напомним, что **угол** — это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называются **сторонами угла**, а их общее начало — **вершиной угла**.

На рисунке 13 изображён угол с вершиной O и сторонами h и k. На сторонах отмечены точки A и B. Этот угол обозначают так: $\angle hk$, или $\angle AOB$, или $\angle O$.

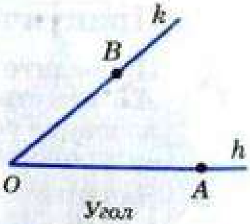


Рис. 13

Угол называется **развёрнутым**, если обе его стороны лежат на одной прямой. Можно сказать, что каждая сторона развёрнутого угла является продолжением другой стороны. На рисунке 14 изображён развёрнутый угол с вершиной C и сторонами p и q.

Рис. 14

Любой угол разделяет плоскость на две части. Если угол неразвёрнутый, то одна из частей называется **внутренней**, а другая — **внешней областью** этого угла (рис. 15, *а*). На рисунке 15, *б* изображён неразвёрнутый угол. Точки A, B, C лежат внутри этого угла (т. е. во внутренней области угла), точки D и E — на сторонах угла, а точки P и Q — вне угла (т. е. во внешней области угла).

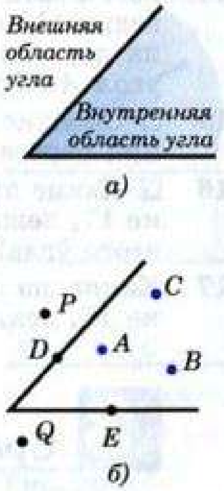


Рис. 15

Если угол развёрнутый, то любую из двух частей, на которые он разделяет плоскость, можно считать внутренней областью угла.

Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

Если луч исходит из вершины неразвёрнутого угла и проходит внутри угла, то он делит этот угол на два угла. На рисунке 16, *а* луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB. Если угол AOB развёрнутый, то любой луч OC, не совпадающий с лучами OA и OB, делит этот угол на два угла: AOC и COB (рис. 16, *б*).

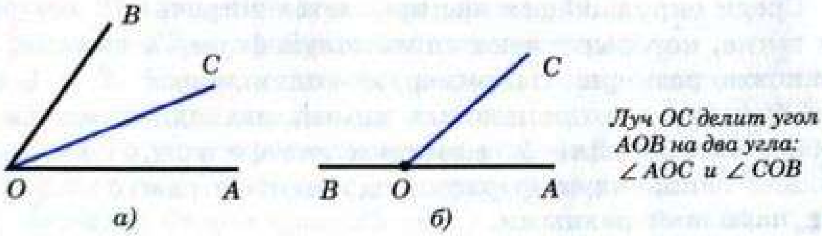


Рис. 16 а) б)

Практические задания

8 Проведите прямую, отметьте на ней точки A и B и на отрезке AB отметьте точку C. а) Среди лучей AB, BC, CA, AC и BA назовите совпадающие лучи; б) назовите луч, который является продолжением луча CA.

9 Начертите три неразвёрнутых угла и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle hk$, $\angle M$.

10 Начертите два развёрнутых угла и обозначьте их буквами.

11 Начертите три луча h, k и l с общим началом. Назовите все углы, образованные данными лучами.

12 Начертите неразвёрнутый угол hk. Отметьте две точки внутри этого угла, две точки вне этого угла и две точки на сторонах угла.

13 Начертите неразвёрнутый угол. Отметьте точки A, B, M и N так, чтобы все точки отрезка AB лежали внутри угла, а все точки отрезка MN лежали вне угла.

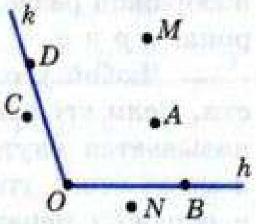


Рис. 17

14 Начертите неразвёрнутый угол AOB и проведите: а) луч OC, который делит угол AOB на два угла; б) луч OD, который не делит угол AOC на два угла.

15 Сколько неразвёрнутых углов образуется при пересечении двух прямых?

16 Какие из точек, изображённых на рисунке 17, лежат внутри угла hk, а какие — вне этого угла?

17 Какие из лучей, изображённых на рисунке 18, делят угол AOB на два угла?

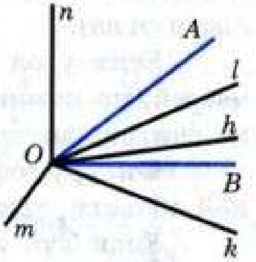


Рис. 18

§3 Сравнение отрезков и углов

5 Равенство геометрических фигур

Среди окружающих нас предметов встречаются такие, которые имеют одинаковую форму и одинаковые размеры. Например, два одинаковых листа бумаги, две одинаковые книги, два одинаковых автомобиля. В геометрии две фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры, называют равными.

На рисунке 19 изображены фигуры Φ_1 и Φ_2. Чтобы установить, равны они или нет, поступим так. Скопируем фигуру Φ_1 на кальку. Передвигая кальку и накладывая её на фигуру Φ_2 той или другой стороной, попытаемся совместить копию фигуры Φ_1 с фигурой Φ_2. Если они совместятся, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2.

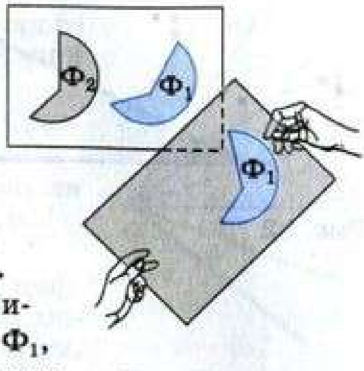


Рис. 19

Мы можем представить себе, что на фигуру Φ_2 накладывается не копия фигуры Φ_1, равная этой фигуре, а сама фигура Φ_1. Поэтому в дальнейшем будем говорить о наложении самой фигуры (а не копии) на другую фигуру. Итак, две геометрические фигуры называются **равными**, если их можно совместить наложением.

6 Сравнение отрезков и углов

На рисунке 20, *а* изображены два отрезка. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого (рис. 20, *б*). Если при этом два других конца также совместятся, то отрезки полностью совместятся и, значит, они равны. Если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого. На рисунке 20, *в* отрезок AC составляет часть отрезка AB, поэтому отрезок AC меньше отрезка AB (пишут так: $AC < AB$).

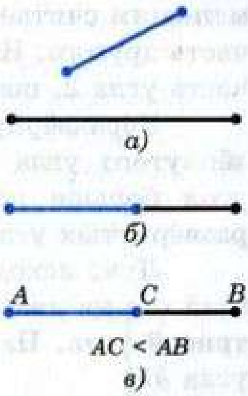


Рис. 20

Точка отрезка, делящая его пополам, т. е. на два равных отрезка, называется **серединой отрезка**. На рисунке 21 точка C — середина отрезка AB.

Точка C – середина отрезка AB

Рис. 21

На рисунке 22, *а* изображены неразвёрнутые углы 1 и 2. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один угол на другой так, чтобы сторона одного угла совместилась со стороной другого, а две другие оказались по одну сторону от совместившихся сторон (рис. 22, *б*).

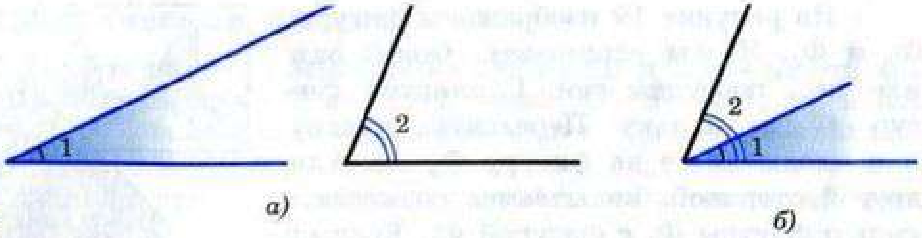


Рис. 22

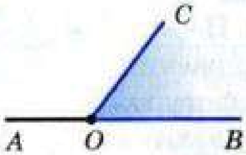


Рис. 23

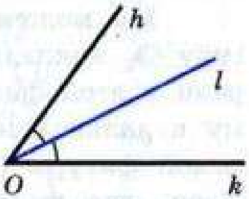


Рис. 24

Если две другие стороны также совместятся, то углы полностью совместятся и, значит, они равны. Если же эти стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составляет часть другого. На рисунке 22, *б* угол 1 составляет часть угла 2, поэтому $\angle 1 < \angle 2$.

Неразвёрнутый угол составляет часть развёрнутого угла (рис. 23), поэтому развёрнутый угол больше неразвёрнутого угла. Любые два развёрнутых угла, очевидно, равны.

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется **биссектрисой угла**. На рисунке 24 луч l — биссектриса угла hk.

Задачи

18 На луче с началом O отмечены точки A, B и C так, что точка B лежит между точками O и A, а точка A — между точками O и C. Сравните отрезки OB и OA, OC и OA, OB и OC.

19 Точка O является серединой отрезка AB. Можно ли совместить наложением отрезки: а) OA и OB; б) OA и AB?

20 ☐ На рисунке 25 отрезки AB, BC, CD и DE равны. Укажите: а) середины отрезков AC,

Рис. 25

AE и CE; б) отрезок, серединой которого является точка D; в) отрезки, серединой которых является точка C.

21 Луч OC делит угол AOB на два угла. Сравните углы AOB и AOC.

22 ❑ Луч l — биссектриса угла hk. Можно ли наложением совместить углы: а) hl и lk; б) hl и hk?

23 ❑ На рисунке 26 углы, обозначенные цифрами, равны. Укажите: а) биссектрису каждого из углов AOC, BOF, AOE; б) все углы, биссектрисой которых является луч OC.

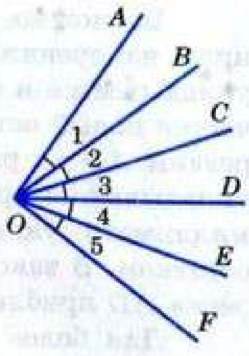


Рис. 26

§4 Измерение отрезков

7 Длина отрезка

На практике часто приходится измерять отрезки, т. е. находить их длины. Измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за **единицу измерения** (его называют также **масштабным отрезком**). Если, например, за единицу измерения принят сантиметр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается сантиметр. На рисунке 27 в отрезке AB сантиметр укладывается ровно два раза. Это означает, что длина отрезка AB равна 2 см. Обычно говорят кратко: «Отрезок AB равен 2 см» — и пишут: $AB = 2$ см.

Может оказаться так, что отрезок, принятый за единицу измерения, не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке — получается остаток. Тогда единицу измерения делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и определяют, сколько раз одна такая часть укладывается в остатке. Например, на рисунке 27 в отрезке AC сантиметр укладывается 3 раза, и в остатке ровно 4 раза укладывается одна десятая часть сантиметра (миллиметр), поэтому длина отрезка AC равна 3,4 см.

$AB = 2$ *см*, $AC = 3{,}4$ *см*, $AD \approx 3{,}8$ *см*

Рис. 27

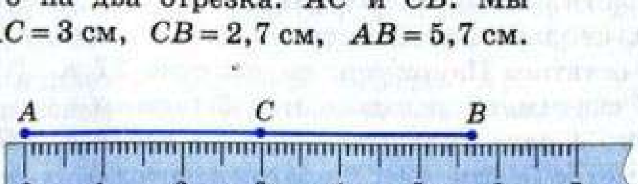
Возможно, однако, что и взятая часть единицы измерения (в данном случае миллиметр) не укладывается в остатке целое число раз, и получается новый остаток. Так будет, например, с отрезком AD на рисунке 27, в котором сантиметр укладывается три раза с остатком, а в остатке миллиметр укладывается восемь раз вновь с остатком. В таком случае говорят, что длина отрезка AD приближённо равна 3,8 см.

Для более точного измерения этого отрезка указанную часть единицы измерения (миллиметр) можно разделить на 10 равных частей и продолжить процесс измерения. Мысленно этот процесс можно продолжать и дальше, измеряя длину отрезка со всё большей точностью. На практике, однако, пользуются приближёнными значениями длин отрезков.

За единицу измерения можно принимать не только сантиметр, но и любой другой отрезок. **Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину некоторым положительным числом.** Это число показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в измеряемом отрезке.

Если два отрезка равны, то единица измерения и её части укладываются в этих отрезках одинаковое число раз, т. е. **равные отрезки имеют равные длины.** Если же один отрезок меньше другого, то единица измерения (или её часть) укладывается в этом отрезке меньшее число раз, чем в другом, т. е. **меньший отрезок имеет меньшую длину.**

На рисунке 28 изображён отрезок AB. Точка C делит его на два отрезка: AC и CB. Мы видим, что $AC = 3$ см, $CB = 2,7$ см, $AB = 5,7$ см.



$AC + CB = AB$

Рис. 28

Таким образом, $AC + CB = AB$. Ясно, что и во всех других случаях, **когда точка делит отрезок на два отрезка, длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.**

Если длина отрезка CD в k раз больше длины отрезка AB, то пишут $CD = kAB$.

Длина отрезка называется также **расстоянием** между концами этого отрезка.

8 Единицы измерения. Измерительные инструменты

Для измерения отрезков и нахождения расстояний на практике используют различные единицы измерения. Стандартной международной единицей измерения отрезков выбран **метр** — отрезок, приближённо равный $\frac{1}{40\,000\,000}$ части земного меридиана. Эталон метра в виде специального металлического бруска хранится в Международном бюро мер и весов во Франции. Копии эталона хранятся в других странах, в том числе и в России. Один метр содержит сто сантиметров. В одном сантиметре десять миллиметров.

При измерении небольших расстояний, например расстояния между точками, изображёнными на листе бумаги, за единицу измерения принимают сантиметр или миллиметр. Расстояние между отдельными предметами в комнате измеряют в метрах, расстояние между населёнными пунктами — в **километрах**. Используются и другие единицы измерения, например **дециметр**, **морская миля** (1 миля равна 1,852 км). В астрономии для измерения очень больших расстояний за единицу измерения принимают **световой год**, т. е. путь, который свет проходит в течение одного года.

Мы назвали единицы измерения расстояний, которые используются на практике в наше время. В старину в разных странах существовали

Рис. 29

Рис. 30

свои единицы измерения. Так, на Руси использовались аршин (0,7112 м), сажень (2,1336 м) и др.

На практике для измерения расстояний пользуются различными инструментами. Например, в техническом черчении употребляется **масштабная миллиметровая линейка.** Для измерения диаметра трубки используют **штангенциркуль** (рис. 29). С его помощью можно измерять расстояния с точностью до 0,1 мм. Для измерения расстояний на местности пользуются **рулеткой**, которая представляет собой ленту с нанесёнными на ней делениями (рис. 30).

Практические задания

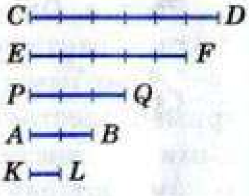


Рис. 31

24 Измерьте ширину и длину учебника геометрии и выразите их в сантиметрах и в миллиметрах.

25 Измерив толщину учебника геометрии без обложки, найдите толщину одного листа.

26 ❑ Найдите длины всех отрезков, изображённых на рисунке 31, если за единицу измерения принят отрезок: а) KL; б) AB.

27 ❑ Начертите отрезок AB и луч h. Пользуясь масштабной линейкой, отложите на луче h от его начала отрезки, длины которых равны $2AB$, $\frac{1}{2}AB$ и $\frac{1}{4}AB$.

28 Начертите прямую и отметьте на ней точки A и B. С помощью масштабной линейки отметьте точки C и D так, чтобы точка B была серединой отрезка AC, а точка D — серединой отрезка BC.

29 Начертите прямую AB. С помощью масштабной линейки отметьте на этой прямой точку C, такую, что $AC = 2$ см. Сколько таких точек можно отметить на прямой AB?

Задачи

30 ☐ Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка AC, если $AB = 7,8$ см, $BC = 25$ мм.

31 ☐ Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка BC, если:
а) $AB = 3,7$ см, $AC = 7,2$ см;
б) $AB = 4$ мм, $AC = 4$ см.

32 Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 12$ см, $BC = 13,5$ см. Какой может быть длина отрезка AC?

33 ☐ Точки B, D и M лежат на одной прямой. Известно, что $BD = 7$ см, $MD = 16$ см. Каким может быть расстояние BM?

34 Точка C — середина отрезка AB, равного 64 см. На луче CA отмечена точка D так, что $CD = 15$ см. Найдите длины отрезков BD и DA.

35 Расстояние между Москвой и С.-Петербургом равно 650 км. Город Тверь находится между Москвой и С.-Петербургом в 170 км от Москвы. Найдите расстояние между Тверью и С.-Петербургом, считая, что все три города расположены на одной прямой.

36 Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см?

Решение

Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то больший из отрезков AB, BC и AC равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков (отрезок AC) равен 5 см, а сумма двух других ($AB + BC$) равна 7 см. Поэтому точки A, B и C не лежат на одной прямой.

37 Точка C — середина отрезка AB, точка O — середина отрезка AC. Найдите:
а) AC, CB, AO и OB, если $AB = 2$ см;
б) AB, AC, AO и OB, если $CB = 3,2$ м.

38 ☐ На прямой отмечены точки O, A и B так, что $OA = 12$ см, $OB = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков OA и OB, если точка O:
а) лежит на отрезке AB;
б) не лежит на отрезке AB.

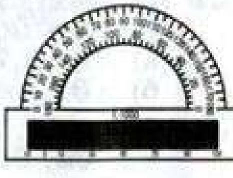
39 Отрезок, длина которого равна a, разделён произвольной точкой на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.

40 ☐ Отрезок, равный 28 см, разделён на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

§5 Измерение углов

9 Градусная мера угла

Измерение углов аналогично измерению отрезков — оно основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают **градус** — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла. Эта единица измерения углов была введена много веков назад, ещё до нашей эры.



Транспортир

Рис. 32

Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется **градусной мерой угла.** Для измерения углов используется транспортир (рис. 32).

На рисунке 33, *а* изображён угол AOB, градусная мера которого равна 150°. Обычно говорят кратко: «Угол AOB равен 150°» — и пишут: $\angle AOB = 150°$. На рисунке 33, *б* угол hk равен 40° ($\angle hk = 40°$). Определённые части градуса носят специальные названия: $\frac{1}{60}$ часть градуса называется **минутой,** $\frac{1}{60}$ часть минуты называется **секундой.** Минуты обозначают знаком «′», а секунды — знаком «″». Например, угол в 60 градусов, 32 минуты и 17 секунд обозначается так: 60°32′17″.

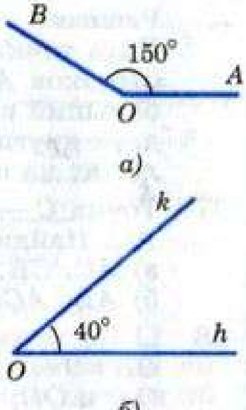


Рис. 33

Если два угла равны, то градус и его части укладываются в этих углах одинаковое число раз, т. е. **равные углы имеют равные градусные меры.**

Если же один угол меньше другого, то в нём градус (или его часть) укладывается меньшее число раз, чем в другом угле, т. е. **меньший угол имеет меньшую градусную меру.**

Так как градус составляет $\frac{1}{180}$ часть развёрнутого угла, то он укладывается в развёрнутом угле ровно 180 раз, т. е. **развёрнутый угол равен 180°.**

Неразвёрнутый угол меньше развёрнутого угла, поэтому **неразвёрнутый угол меньше 180°.**

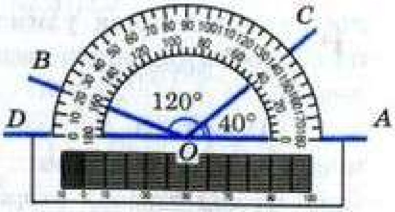


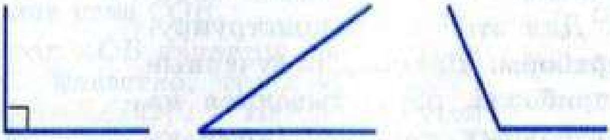
Рис. 34

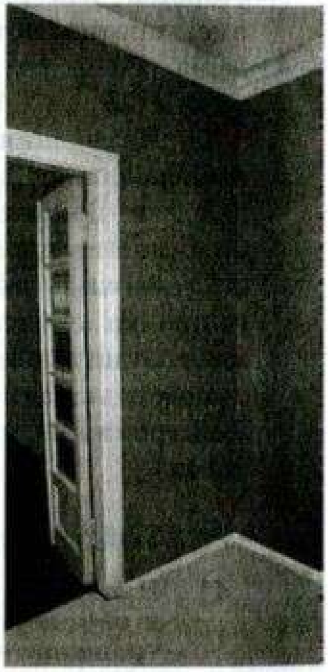
На рисунке 34 изображены лучи с началом в точке O. Луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB. Мы видим, что $\angle AOC = 40°$, $\angle COB = 120°$, $\angle AOB = 160°$. Таким образом,

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB.$$

Ясно, что и во всех других случаях, **когда луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.**

Угол называется **прямым**, если он равен 90° (рис. 35, *а*), **острым**, если он меньше 90°, т. е. меньше прямого угла (рис. 35, *б*), **тупым**, если он больше 90°, но меньше 180°, т. е. больше прямого, но меньше развёрнутого угла (рис. 35, *в*).





Прямой угол *Острый угол* *Тупой угол*

Рис. 35 *а)* *б)* *в)*

Прямые углы мы видим в окружающей нас обстановке: прямой угол образуют линии пересечения стен и потолка в комнате, два края стола прямоугольной формы и т. д.

10 Измерение углов на местности

Рис. 36

Измерение углов на местности проводится с помощью специальных приборов. Простейшим из них является **астролябия** (рис. 36). Она состоит из двух частей: диска, разделённого на градусы, и вращающейся вокруг центра диска линейки (алидады). На концах алидады находятся два узких окошечка, которые используются для установки её в определённом направлении.

Для того чтобы измерить угол AOB на местности, треножник с астролябией ставят так, чтобы отвес, подвешенный к центру диска, находился точно над точкой O. Затем устанавливают алидаду вдоль одной из сторон OA или OB и отмечают деление, против которого находится указатель алидады. Далее поворачивают алидаду, направляя её вдоль другой стороны измеряемого угла, и отмечают деление, против которого окажется указатель алидады. Разность отсчёта и даёт градусную меру угла AOB.

Измерения углов проводятся в различных исследованиях, например в астрономии при определении положения небесных тел. Очень важно с достаточной точностью измерять углы при определении положения искусственных спутников на орбитах. Для этой цели конструируют специальные приборы. Данные, полученные с помощью этих приборов, обрабатываются на электронно-вычислительных машинах (компьютерах).

Практические задания

41 Начертите три неразвёрнутых угла и один развёрнутый угол и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle CDE$, $\angle hk$ и $\angle MNP$. С помощью транспортира измерьте углы и запишите результаты измерений.

42 Начертите луч OA и с помощью транспортира отложите от луча OA углы AOB, AOC и AOD так, чтобы $\angle AOB = 23°$, $\angle AOC = 67°$, $\angle AOD = 138°$.

43 Начертите угол, равный 70°, и с помощью транспортира проведите его биссектрису.

44 Начертите угол AOB и с помощью транспортира проведите луч OC так, чтобы луч OA являлся биссектрисой угла BOC. Всегда ли это выполнимо?

Задачи

45 ☐ Градусные меры двух углов равны. Равны ли сами углы?

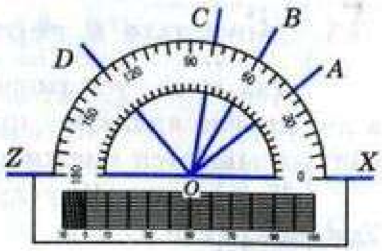


Рис. 37

46 На рисунке 37 изображены лучи с общим началом O.
а) Найдите градусные меры углов AOX, BOX, AOB, COB, DOX;
б) назовите углы, равные $20°$;
в) назовите равные углы;
г) назовите все углы со стороной OA и найдите их градусные меры.

47 ☐ Луч OE делит угол AOB на два угла. Найдите $\angle AOB$, если:
а) $\angle AOE = 44°$, $\angle EOB = 77°$;
б) $\angle AOE = 12°37'$, $\angle EOB = 108°25'$.

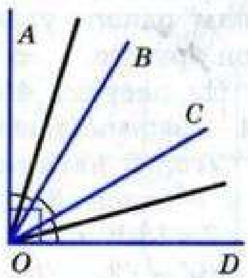


Рис. 38

48 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол COB, если $\angle AOB = 78°$, а угол AOC на $18°$ меньше угла BOC.

49 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOC, если $\angle AOB = 155°$, а угол AOC на $15°$ больше угла COB.

50 ☐ Угол AOB является частью угла AOC. Известно, что $\angle AOC = 108°$, $\angle AOB = 3\angle BOC$. Найдите угол AOB.

51 ☐ На рисунке 38 угол AOD — прямой, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов AOB и COD.

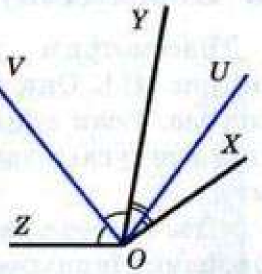


Рис. 39

52 На рисунке 39 луч OV является биссектрисой угла ZOY, а луч OU — биссектрисой угла XOY. Найдите угол XOZ, если $\angle UOV = 80°$.

53 Луч l является биссектрисой неразвёрнутого угла hk. Может ли угол hl быть прямым или тупым?

§6 Перпендикулярные прямые

11 Смежные и вертикальные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными**.

На рисунке 40 углы AOB и BOC смежные. Так как лучи OA и OC образуют развёрнутый угол, то

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180°.$$

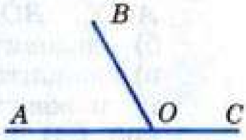


Рис. 40

Таким образом, **сумма смежных углов равна 180°.**

Два угла называются **вертикальными,** если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

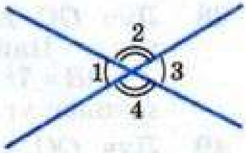


Рис. 41

На рисунке 41 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные.

Угол 2 является смежным как с углом 1, так и с углом 3. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180°$. Отсюда получаем: $\angle 1 = 180° - \angle 2$, $\angle 3 = 180° - \angle 2$. Таким образом, градусные меры углов 1 и 3 равны. Отсюда следует, что и сами углы равны.

Итак, **вертикальные углы равны.**

12 Перпендикулярные прямые

Рассмотрим две пересекающиеся прямые (рис. 42). Они образуют четыре неразвёрнутых угла. Если один из них прямой (угол 1), то остальные углы также прямые (объясните почему).

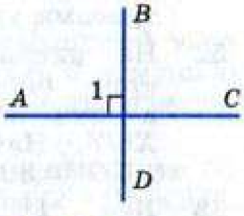


Рис. 42

Две пересекающиеся прямые называются **перпендикулярными** (или взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла.

Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$ (читается: «Прямая AC перпендикулярна к прямой BD»).

Отметим, что **две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются** (рис. 43, *а*).

В самом деле, рассмотрим прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные к прямой PQ (рис. 43, *б*). Мысленно перегнём рисунок по прямой PQ так, чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. Так как прямые углы 1 и 2 равны, то луч PA наложится на луч PA_1. Аналогично, луч QB наложится на луч QB_1.

Поэтому, если предположить, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, то эта точка наложится на некоторую точку M_1, также лежащую на этих прямых (рис. 43, *в*), и мы получим, что через точки M и M_1 проходят две прямые: AA_1 и BB_1. Но это невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно и, значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.

Для проведения перпендикулярных прямых используют чертёжный угольник и линейку (рис. 44).

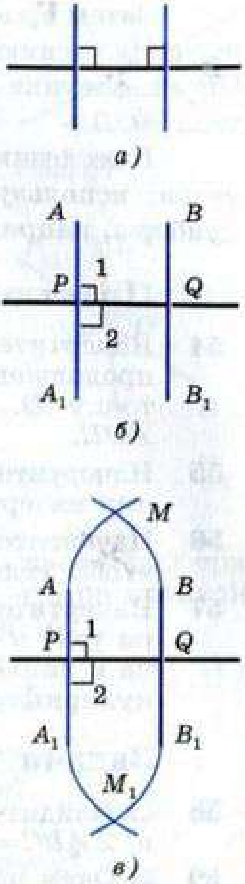


Рис. 43

13 Построение прямых углов на местности

Для построения прямых углов на местности применяют специальные приборы, простейшим из которых является **экер**.

Экер представляет собой два бруска, расположенных под прямым углом и укреплённых на треножнике (рис. 45). На концах брусков вбиты гвозди так, что прямые, проходящие через них, взаимно перпендикулярны.

Чтобы построить на местности прямой угол с заданной стороной OA, устанавливают треножник с экером так, чтобы отвес находился точно над точкой O, а направление одного бруска совпало с направлением луча OA. Совмещение этих направлений можно осуществить с помощью вехи, поставленной на луче.

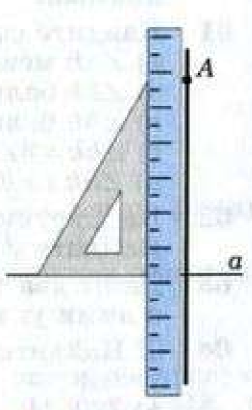


Рис. 44

Затем провешивают прямую линию по направлению другого бруска (прямая OB на рисунке 45). Получается прямой угол AOB.

В геодезии для построения прямых углов используют более совершенные приборы, например **теодолит**.

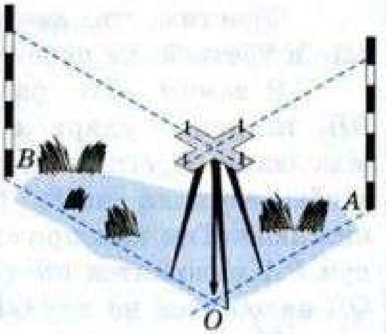


Рис. 45

Практические задания

54 Начертите острый угол AOB и на продолжении луча OB отметьте точку D. Сравните углы AOB и AOD.

55 Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них начертите смежный угол.

56 Начертите неразвёрнутый угол hk. Постройте угол h_1k_1 так, чтобы углы hk и h_1k_1 были вертикальными.

57 Начертите неразвёрнутый угол MON и отметьте точку P внутри угла и точку Q — вне его. С помощью чертёжного угольника и линейки через точки P и Q проведите прямые, перпендикулярные к прямым OM и ON.

Задачи

58 ❑ Найдите угол, смежный с углом ABC, если:
а) $\angle ABC = 111°$; б) $\angle ABC = 90°$; в) $\angle ABC = 15°$.

59 ❑ Один из смежных углов прямой. Каким (острым, прямым, тупым) является другой угол?

60 ❑ Верно ли утверждение: если смежные углы равны, то они прямые?

61 Найдите смежные углы hk и kl, если:
а) $\angle hk$ меньше $\angle kl$ на $40°$;
б) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $120°$;
в) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $47°18'$;
г) $\angle hk = 3\angle kl$;
д) $\angle hk : \angle kl = 5 : 4$.

62 На рисунке 46 углы BOD и COD равны. Найдите угол AOD, если $\angle COB = 148°$.

63 Даны два равных угла. Равны ли смежные с ними углы?

64 ❑ Найдите изображённые на рисунке 41 углы:
а) 1, 3, 4, если $\angle 2 = 117°$;
б) 1, 2, 4, если $\angle 3 = 43°27'$.

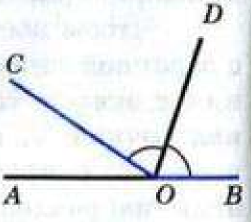


Рис. 46

65 ❑ Найдите неразвёрнутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если:
а) сумма двух из них равна 114°;
б) сумма трёх углов равна 220°.

66 ❑ На рисунке 41 найдите углы 1, 2, 3, 4, если:
а) $\angle 2 + \angle 4 = 220°$;
б) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$;
в) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$.

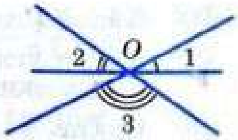


Рис. 47

67 ❑ На рисунке 47 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите сумму углов: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

68 На рисунке 48 $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$. Найдите углы AOC, BOD, COE и COD.

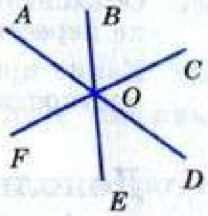


Рис. 48

69 ❑ Прямая a пересекает стороны угла A в точках P и Q. Могут ли обе прямые AP и AQ быть перпендикулярными к прямой a?

70 ❑ Через точку A, не лежащую на прямой a, проведены три прямые, пересекающие прямую a. Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой a.

Вопросы для повторения к главе I

1 Сколько прямых можно провести через две точки?
2 Сколько общих точек могут иметь две прямые?
3 Объясните, что такое отрезок.
4 Объясните, что такое луч. Как обозначаются лучи?
5 Какая фигура называется углом? Объясните, что такое вершина и стороны угла.
6 Какой угол называется развёрнутым?
7 Какие фигуры называются равными?
8 Объясните, как сравнить два отрезка.
9 Какая точка называется серединой отрезка?
10 Объясните, как сравнить два угла.
11 Какой луч называется биссектрисой угла?
12 Точка C делит отрезок AB на два отрезка. Как найти длину отрезка AB, если известны длины отрезков AC и CB?
13 Какими инструментами пользуются для измерения расстояний?
14 Что такое градусная мера угла?
15 Луч OC делит угол AOB на два угла. Как найти градусную меру угла AOB, если известны градусные меры углов AOC и COB?

16 Какой угол называется острым? прямым? тупым?

17 Какие углы называются смежными? Чему равна сумма смежных углов?

18 Какие углы называются вертикальными? Каким свойством обладают вертикальные углы?

19 Какие прямые называются перпендикулярными?

20 Объясните, почему две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются.

21 Какие приборы применяют для построения прямых углов на местности?

Дополнительные задачи

71 Отметьте четыре точки так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой. Через каждую пару точек проведите прямую. Сколько получилось прямых?

72 Даны четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения имеют эти прямые, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые?

73 Сколько неразвёрнутых углов образуется при пересечении трёх прямых, проходящих через одну точку?

74 Точка N лежит на отрезке MP. Расстояние между точками M и P равно 24 см, а расстояние между точками N и M в два раза больше расстояния между точками N и P. Найдите расстояние:
а) между точками N и P;
б) между точками N и M.

75 Три точки K, L, M лежат на одной прямой, $KL = 6$ см, $LM = 10$ см. Каким может быть расстояние KM? Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж.

76 Отрезок AB длины a разделён точками P и Q на три отрезка AP, PQ и QB так, что $AP = 2PQ = 2QB$. Найдите расстояние между:
а) точкой A и серединой отрезка QB;
б) серединами отрезков AP и QB.

77 Отрезок длины m разделён:
а) на три равные части;
б) на пять равных частей.
Найдите расстояние между серединами крайних частей.

78 Отрезок в 36 см разделён на четыре не равные друг другу части. Расстояние между серединами крайних частей равно 30 см. Найдите расстояние между серединами средних частей.

79* □ Точки A, B и C лежат на одной прямой, точки M и N — середины отрезков AB и AC. Докажите, что $BC = 2MN$.

80 Известно, что $\angle AOB = 35°$, $\angle BOC = 50°$. Найдите угол AOC. Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж с помощью линейки и транспортира.

81 Угол hk равен $120°$, а угол hm равен $150°$. Найдите угол km. Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж.

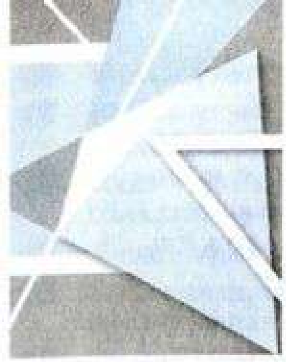
82 Найдите смежные углы, если:
а) один из них на $45°$ больше другого;
б) их разность равна $35°$.

83 Найдите угол, образованный биссектрисами двух смежных углов.

84 Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

85* □ Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A, B и D лежат на одной прямой.

86 □ Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Через точку A проведены прямые m и n так, что $m \perp a$, $n \perp b$. Докажите, что прямые m и n не совпадают.



Глава II

Треугольники

В этой главе вы начнёте изучение свойств треугольников и окружностей. Треугольник — одна из самых простых и вместе с тем самых важных фигур в геометрии. То же самое можно сказать об окружности. Оказывается, что эти простые фигуры таят в себе много интересного и неожиданного. Различные их свойства вы будете изучать на протяжении всего курса геометрии. При этом мы будем формулировать и доказывать теоремы. Что такое теорема и что значит доказать теорему, вы узнаете в данной главе, где появятся первые теоремы о треугольниках.

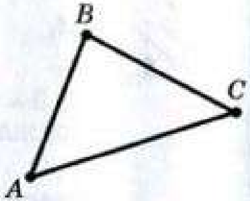
§1 Первый признак равенства треугольников

14 Треугольник

Отметим какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками (рис. 49, *а*). Получим геометрическую фигуру, которая называется **треугольником.** Отмеченные три точки называются **вершинами,** а отрезки — **сторонами** треугольника. На рисунке 49, *б* изображён треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA. Такой треугольник будем обозначать так: $\triangle ABC$ (читается: «треугольник ABC»). Этот же треугольник можно обозначить иначе, записав буквы A, B, C в другом порядке: $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ и т. д.

Треугольник

а)



Треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA

б)

Рис. 49

Три угла — $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ — называются **углами треугольника** ABC. Часто их обозначают одной буквой: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Сумма длин трёх сторон треугольника называется его **периметром.**

Напомним, что две фигуры, в частности два треугольника, называются равными, если их можно совместить наложением. На рисунке 50 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Каждый из этих треугольников можно наложить на другой так, что они полностью совместятся, т. е. попарно совместятся их вершины и стороны. Ясно, что при этом совместятся попарно и углы этих треугольников.

Таким образом, **если два треугольника равны, то элементы (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника.**

Отметим, что **в равных треугольниках против соответственно равных сторон** (т. е. совмещающихся при наложении) **лежат равные углы, и обратно: против соответственно равных углов лежат равные стороны.** Так, например, в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, изображённых на рисунке 50, против соответственно равных сторон AB и A_1B_1 лежат равные углы C и C_1.

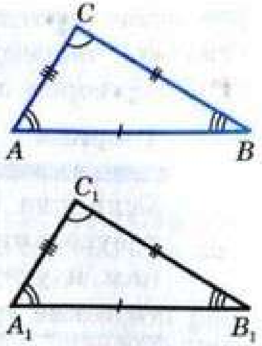


Рис. 50

Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Оказывается, что равенство двух треугольников можно установить, не накладывая один треугольник на другой, а сравнивая только некоторые их элементы. Как это сделать, мы обсудим в следующих пунктах.

Такая возможность — установить равенство двух фигур, не производя наложения одной на другую, а измеряя и сравнивая лишь некоторые элементы этих фигур, важна для практики, например для сравнения двух земельных участков, которые, конечно, нельзя наложить друг на друга.

15 Первый признак равенства треугольников

В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путём рассуждений, называется **теоремой**, а сами рассуждения называются **доказательством теоремы.** Фактически мы уже имели дело с теоремами и их доказательствами. Так, утверждение о равенстве вертикальных углов является теоремой, а рассуждения, которые мы провели, чтобы установить равенство вертикальных углов, и есть доказательство этой теоремы. В этом параграфе мы докажем одну из теорем о равенстве треугольников.

Теорема

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, углы A и A_1 равны (рис. 51). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1; в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны. **Теорема доказана.**

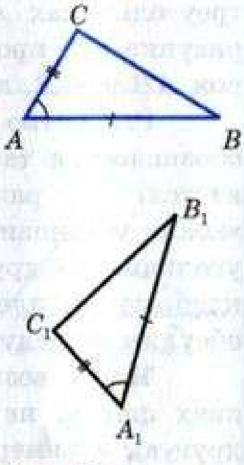


Рис. 51

Доказанная теорема выражает **признак** (равенство у треугольников двух сторон и угла между ними), по которому можно сделать вывод о равенстве треугольников. Он называется **первым признаком равенства треугольников.**

Практические задания

87 Начертите треугольник и обозначьте его вершины буквами M, N и P. а) Назовите все углы и стороны треугольника; б) с помощью масштабной линейки измерьте стороны и найдите периметр треугольника.

88 Начертите треугольник DEF так, чтобы угол E был прямым. Назовите: а) стороны, лежащие против углов D, E, F; б) углы, лежащие против сторон DE, EF, FD; в) углы, прилежащие к сторонам DE, EF, FD.

89 С помощью транспортира и масштабной линейки начертите треугольник ABC, в котором: а) $AB = 4,3$ см, $AC = 2,3$ см, $\angle A = 23°$; б) $BC = 9$ см, $BA = 6,2$ см, $\angle B = 122°$; в) $CA = 3$ см, $CB = 4$ см, $\angle C = 90°$.

Задачи

90 ❑ Сторона AB треугольника ABC равна 17 см, сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

91 ❑ Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 4,6 см.

92 ❑ Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

93 ❑ Отрезки AE и DC пересекаются в точке B, являющейся серединой каждого из них. а) Докажите, что треугольники ABC и EBD равны; б) найдите углы A и C треугольника ABC, если в треугольнике BDE $\angle D = 47°$, $\angle E = 42°$.

94 ❑ На рисунке 52 $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABD и ACD равны; б) найдите BD и AB, если $AC = 15$ см, $DC = 5$ см.

95 ❑ На рисунке 53 $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABC и CDA равны; б) найдите AB и BC, если $AD = 17$ см, $DC = 14$ см.

96 ❑ На рисунке 54 $OA = OD$, $OB = OC$, $\angle 1 = 74°$, $\angle 2 = 36°$. а) Докажите, что треугольники AOB и DOC равны; б) найдите $\angle ACD$.

97 ❑ Отрезки AC и BD точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

98 ❑ В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$.

99 ❑ На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на отрезке AC, а точка E — на отрезке AD, причём $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$.

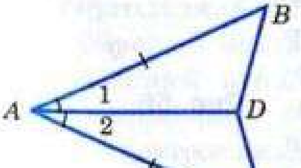


Рис. 52

Рис. 53

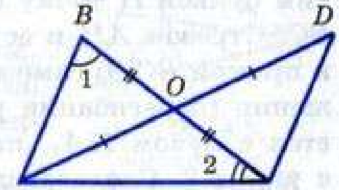
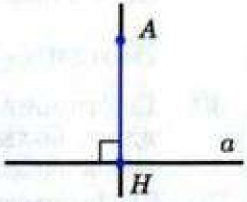


Рис. 54

§2 Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

16 Перпендикуляр к прямой



Отрезок AH — перпендикуляр к прямой a

Рис. 55

Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на этой прямой (рис. 55). Соединим точку A отрезком с точкой H прямой a. Отрезок AH называется **перпендикуляром, проведённым из точки A к прямой a**, если прямые AH и a перпендикулярны. Точка H называется **основанием перпендикуляра.**

Теорема

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

Доказательство

Пусть A — точка, не лежащая на прямой BC (рис. 56, *а*). Докажем сначала, что из точки A можно провести перпендикуляр к прямой BC.

Отложим от луча BC угол MBC, равный углу ABC, как показано на рисунке 56, *а*. Так как углы ABC и MBC равны, то первый из них можно наложить на второй так, что стороны BA и BC первого угла совместятся со сторонами BM и BC второго угла. Наглядно это наложение можно представить себе как перегибание рисунка по прямой BC. При этом точка A наложится на некоторую точку A_1 луча BM (рис. 56, *б*). Обозначим буквой H точку пересечения прямых AA_1 и BC. Отрезок AH и есть искомый перпендикуляр к прямой BC. В самом деле, при указанном наложении (перегибании рисунка) луч HA совмещается с лучом HA_1, поэтому угол 1 совмещается с углом 2. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Но углы 1 и 2 — смежные, значит, каждый из них прямой. Итак, $AH \perp BC$.

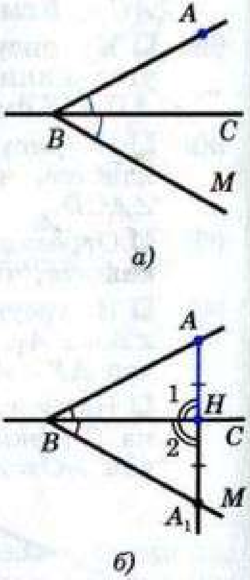


Рис. 56

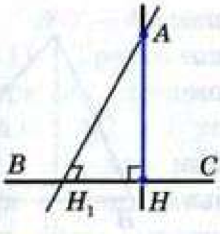


Рис. 57

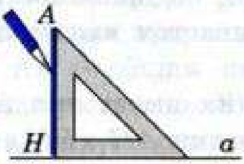
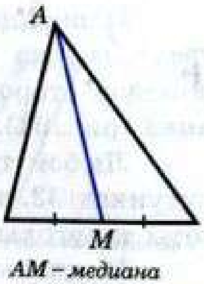
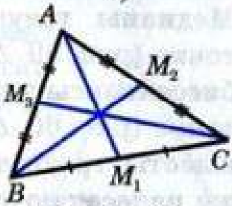


Рис. 58



AM — медиана треугольника

а)



AM_1, BM_2, CM_3 — медианы треугольника ABC

б)

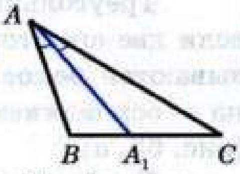
Рис. 59

Докажем теперь, что из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой BC.

Если предположить, что через точку A можно провести ещё один перпендикуляр AH_1 к прямой BC, то получим, что две прямые AH и AH_1, перпендикулярные к прямой BC, пересекаются (рис. 57). Но в п. 12 было доказано, что это невозможно. Итак, из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой BC. **Теорема доказана.**

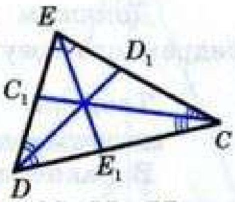
Для проведения на чертеже перпендикуляра из точки к прямой используют чертёжный угольник (рис. 58).

17 Медианы, биссектрисы и высоты треугольника



AA_1 — биссектриса треугольника ABC

а)



CC_1, DD_1, EE_1 — биссектрисы треугольника CDE

б)

Рис. 60

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой треугольника** (рис. 59, *а*).

Любой треугольник имеет три медианы. На рисунке 59, *б* отрезки AM_1, BM_2, CM_3 — медианы треугольника ABC.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой треугольника** (рис. 60, *а*).

Любой треугольник имеет три биссектрисы. На рисунке 60, *б* отрезки CC_1, DD_1 и EE_1 — биссектрисы треугольника CDE.

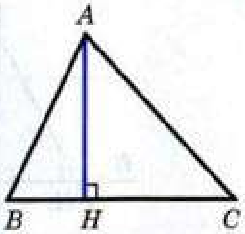
Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой треугольника** (рис. 61).

Любой треугольник имеет три высоты. На рисунках 62, *а*, *б*, *в* отрезки AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC.

Медианы, биссектрисы и высоты треугольника обладают замечательными свойствами:

Медианы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 59, *б*);
биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 60, *б*);
высоты треугольника или их продолжения также пересекаются в одной точке (рис. 62, *а*, *б*, *в*).

Эти утверждения мы докажем в 8 классе.



AH – высота треугольника ABC

Рис. 61

18 Свойства равнобедренного треугольника

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны. Равные стороны называются **боковыми сторонами**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника (рис. 63, *а*).

Треугольник, все стороны которого равны, называется **равносторонним** (рис. 63, *б*).

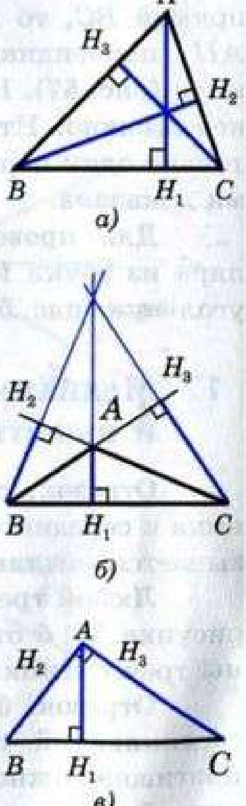
Докажем две теоремы о свойствах равнобедренного треугольника.

Теорема

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и докажем, что $\angle B = \angle C$.



AH_1, BH_2, CH_3 – высоты $\triangle ABC$

Рис. 62

Пусть AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 64). Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$ по условию, AD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$, так как AD — биссектриса). В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, поэтому $\angle B = \angle C$. **Теорема доказана.**

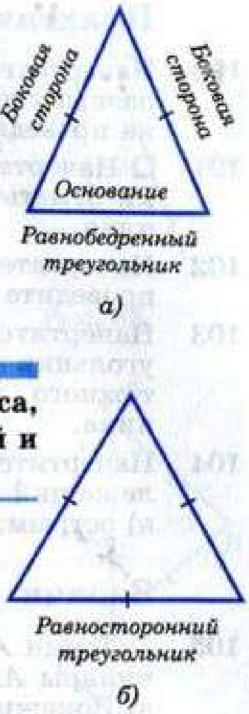


Рис. 63

Теорема

В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

Доказательство

Обратимся снова к рисунку 64, на котором $\triangle ABC$ — равнобедренный треугольник с основанием BC, AD — его биссектриса.

Из равенства треугольников ABD и ACD следует, что $BD = DC$ и $\angle 3 = \angle 4$. Равенство $BD = DC$ означает, что точка D — середина стороны BC, и поэтому AD — медиана треугольника ABC. Так как углы 3 и 4 — смежные и равны друг другу, то они прямые. Следовательно, отрезок AD является также высотой треугольника ABC. **Теорема доказана.**

Мы установили, что биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведённые к основанию, совпадают. Поэтому справедливы также утверждения:

1. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.

2. Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.

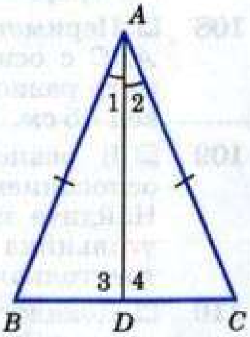


Рис. 64

Практические задания

100 Начертите прямую a и отметьте точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой a. С помощью чертёжного угольника проведите из этих точек перпендикуляры к прямой a.

101 ☐ Начертите треугольник. С помощью масштабной линейки отметьте середины сторон и проведите медианы треугольника.

102 Начертите треугольник. С помощью транспортира и линейки проведите его биссектрисы.

103 Начертите треугольник ABC с тремя острыми углами и треугольник MNP, у которого угол M тупой. С помощью чертёжного угольника проведите высоты каждого треугольника.

104 Начертите три равнобедренных треугольника так, чтобы угол, лежащий против основания, был:
а) острым; б) прямым; в) тупым.

Задачи

105 ☐ Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны.
а) Докажите, что $\angle ABD = \angle CDB$;
б) найдите $\angle ABC$, если $\angle ADB = 44°$.

106 ☐ Медиана AD треугольника ABC продолжена за точку D на отрезок DE, равный AD, и точка E соединена с точкой C.
а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ECD$;
б) найдите $\angle ACE$, если $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$.

107 ☐ В равнобедренном треугольнике основание в два раза меньше боковой стороны, а периметр равен 50 см. Найдите стороны треугольника.

108 ☐ Периметр равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен 40 см, а периметр равностороннего треугольника BCD равен 45 см. Найдите стороны AB и BC.

109 ☐ В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена медиана AM. Найдите медиану AM, если периметр треугольника ABC равен 32 см, а периметр треугольника ABM равен 24 см.

110 ☐ Докажите, что если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.

111 ☐ На рисунке 65 $CD = BD$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

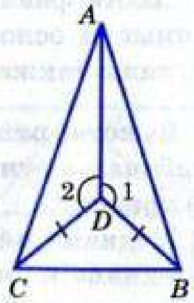


Рис. 65

112 На рисунке 66 $AB = BC$, $\angle 1 = 130°$. Найдите $\angle 2$.

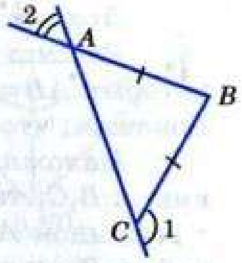


Рис. 66

113 Точки M и P лежат по одну сторону от прямой b. Перпендикуляры MN и PQ, проведённые к прямой b, равны. Точка O — середина отрезка NQ.
а) Докажите, что $\angle OMP = \angle OPM$;
б) найдите $\angle NOM$, если $\angle MOP = 105°$.

114 Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведённые к равным сторонам, равны.

115 Медиана AM треугольника ABC равна отрезку BM. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен сумме двух других углов.

116 Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

117 На рисунке 67 $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что $\angle BAC = \angle CED$.

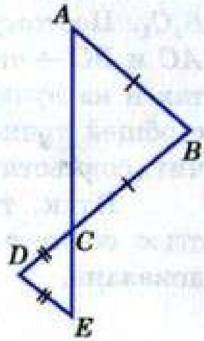


Рис. 67

118 На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что:
а) $\triangle BAM = \triangle CAN$;
б) треугольник AMN равнобедренный.

119 В равнобедренном треугольнике DEK с основанием $DK = 16$ см отрезок EF — биссектриса, $\angle DEF = 43°$. Найдите KF, $\angle DEK$, $\angle EFD$.

120 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. На сторонах AB и CB отмечены соответственно точки E и F так, что $AE = CF$. Докажите, что: а) $\triangle BDE = \triangle BDF$; б) $\triangle ADE = \triangle CDF$.

§3 Второй и третий признаки равенства треугольников

19 Второй признак равенства треугольников

Теорема

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 68). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AB — с равной ей стороной A_1B_1, и вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1B_1.

Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то сторона AC наложится на луч A_1C_1, а сторона BC — на луч B_1C_1. Поэтому вершина C — общая точка сторон AC и BC — окажется лежащей как на луче A_1C_1, так и на луче B_1C_1 и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей — вершиной C_1. Значит, совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1.

Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, поэтому они равны. **Теорема доказана.**

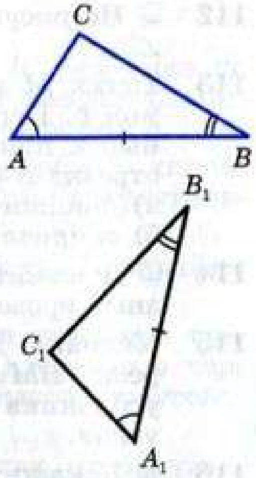


Рис. 68

20 Третий признак равенства треугольников

Теорема

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (рис. 69). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Приложим треугольник ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина B — с вершиной B_1, а вершины C и C_1 оказались по разные стороны от прямой A_1B_1 (рис. 70).

Возможны три случая: луч C_1C проходит внутри угла $A_1C_1B_1$ (рис. 70, *а*); луч C_1C совпада-

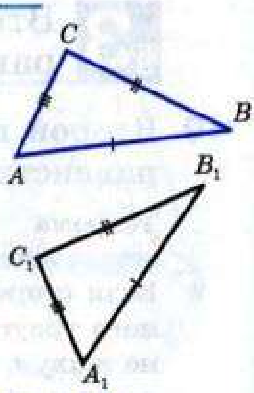


Рис. 69

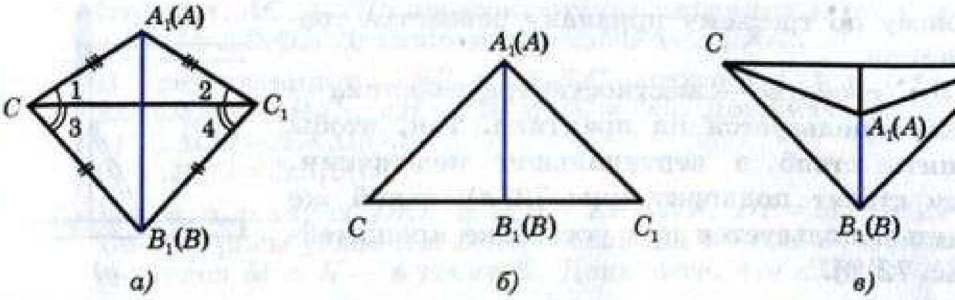


Рис. 70

ет с одной из сторон этого угла (рис. 70, *б*); луч C_1C проходит вне угла $A_1C_1B_1$ (рис. 70, *в*). Рассмотрим первый случай (остальные случаи рассмотрите самостоятельно).

Так как по условию теоремы стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 равны, то треугольники A_1C_1C и B_1C_1C — равнобедренные (см. рис. 70, *а*). По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$. Итак, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. **Теорема доказана.**

Из третьего признака равенства треугольников следует, что **треугольник — жёсткая фигура**. Поясним, что это означает.

Представим себе две рейки, у которых два конца скреплены гвоздём (рис. 71, *а*). Такая конструкция не является жёсткой: сдвигая или раздвигая свободные концы реек, мы можем менять угол между ними. Теперь возьмём ещё одну рейку и скрепим её концы со свободными концами первых двух реек (рис. 71, *б*).

Полученная конструкция — треугольник — будет уже жёсткой. В ней нельзя сдвинуть или раздвинуть никакие две стороны, т. е. нельзя изменить ни один угол. Действительно, если бы это удалось, то мы получили бы новый треугольник, не равный исходному. Но это невозможно, так как новый треугольник должен быть равен

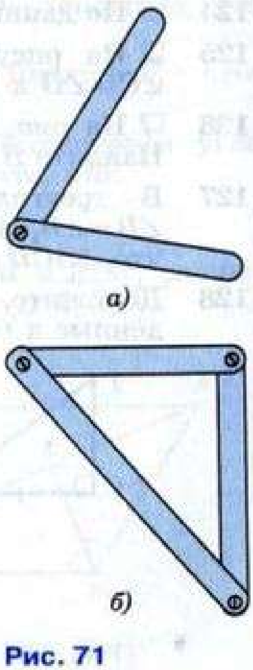
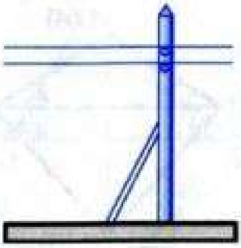


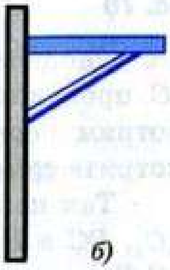
Рис. 71

исходному по третьему признаку равенства треугольников.

Это свойство — жёсткость треугольника — широко используется на практике. Так, чтобы закрепить столб в вертикальном положении, к нему ставят подпорку (рис. 72, *а*); такой же принцип используется при установке кронштейна (рис. 72, *б*).



а)



б)

Рис. 72

Задачи

121 Отрезки AB и CD пересекаются в середине O отрезка AB, $\angle OAD = \angle OBC$.
а) Докажите, что $\triangle CBO = \triangle DAO$;
б) найдите BC и CO, если $CD = 26$ см, $AD = 15$ см.

122 На рисунке 53 (см. с. 31) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.
а) Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$;
б) найдите AB и BC, если $AD = 19$ см, $CD = 11$ см.

123 На биссектрисе угла A взята точка D, а на сторонах этого угла — точки B и C такие, что $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $BD = CD$.

124 По данным рисунка 73 докажите, что $OP = OT$, $\angle P = \angle T$.

125 На рисунке 74 $\angle DAC = \angle DBC$, $AO = BO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

126 На рисунке 74 $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $AC = 13$ см. Найдите BD.

127 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки D и D_1 так, что $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$.

128 Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведённые к соответственно равным сторонам, равны.

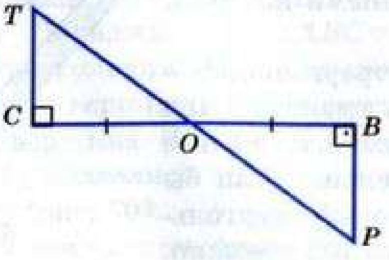


Рис. 73

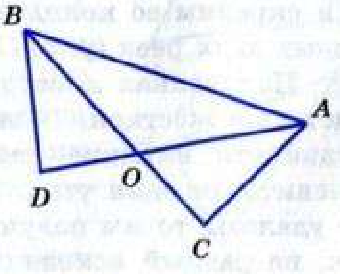


Рис. 74

129 Отрезки AC и BD пересекаются в середине O отрезка AC, $\angle BCO = \angle DAO$. Докажите, что $\triangle BOA = \triangle DOC$.

130 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки CO и C_1O_1 — медианы, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Докажите, что:
а) $\triangle ACO = \triangle A_1C_1O_1$;
б) $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$.

131 В треугольниках DEF и MNP $EF = NP$, $DF = MP$ и $\angle F = \angle P$. Биссектрисы углов E и D пересекаются в точке O, а биссектрисы углов M и N — в точке K. Докажите, что $\angle DOE = \angle MKN$.

132 Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN — равнобедренный.

133 Докажите, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник — равнобедренный.

134 Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника соответственно равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника.

135 Докажите, что если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то треугольники равны.

136 ☐ На рисунке 52 (см. с. 31) $AB = AC$, $BD = DC$ и $\angle BAC = 50°$. Найдите $\angle CAD$.

137 На рисунке 53 (см. с. 31) $BC = AD$, $AB = CD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

138 На рисунке 75 $AB = CD$ и $BD = AC$. Докажите, что: а) $\angle CAD = \angle ADB$; б) $\angle BAC = \angle CDB$.

139 На рисунке 76 $AB = CD$, $AD = BC$, BE — биссектриса угла ABC, а DF — биссектриса угла ADC. Докажите, что:
а) $\angle ABE = \angle ADF$;
б) $\triangle ABE = \triangle CDF$.

140 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы BM и B_1M_1 равны, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

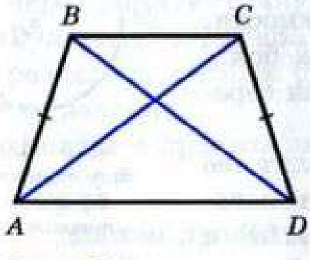


Рис. 75

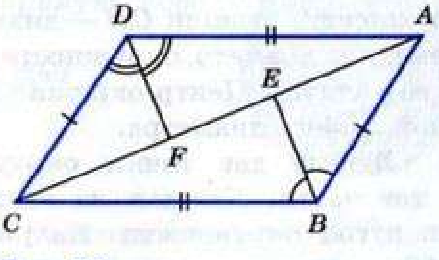


Рис. 76

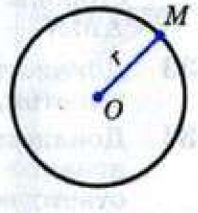
141 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки AD и A_1D_1 — биссектрисы, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ и $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

142 Равнобедренные треугольники ADC и BCD имеют общее основание DC. Прямая AB пересекает отрезок CD в точке O. Докажите, что: а) $\angle ADB = \angle ACB$; б) $DO = OC$.

§4 Задачи на построение

21 Окружность

Предложение, в котором разъясняется смысл того или иного выражения или названия, называется **определением.** Мы уже встречались с определениями, например с определением угла, смежных углов, равнобедренного треугольника и т. д. Дадим определение ещё одной геометрической фигуры — окружности.

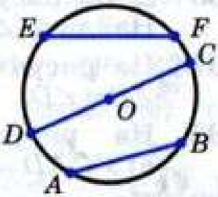


Окружность радиуса r с центром O

Рис. 77

Определение

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.



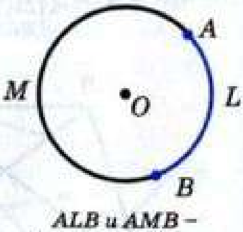
AB и EF – хорды, CD – диаметр

Рис. 78

Данная точка называется **центром** окружности, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, — **радиусом** окружности (рис. 77). Из определения окружности следует, что все радиусы имеют одну и ту же длину.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется её **хордой**. Хорда, проходящая через центр окружности, называется её **диаметром.**

На рисунке 78 отрезки AB и EF — хорды окружности, отрезок CD — диаметр окружности. Очевидно, диаметр окружности в два раза больше её радиуса. Центр окружности является серединой любого диаметра.



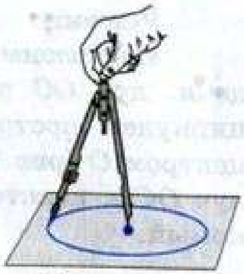
ALB и AMB – дуги окружности, ограниченные точками A и B

Рис. 79

Любые две точки окружности делят её на две части. Каждая из этих частей называется **дугой** окружности. На рисунке 79 ALB и AMB — дуги, ограниченные точками A и B.

Для изображения окружности на чертеже пользуются **циркулем** (рис. 80). Чтобы провести окружность на местности, можно воспользоваться верёвкой (рис. 81).

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом** (рис. 82).



Построение окружности с помощью циркуля

Рис. 80

22 Построения циркулем и линейкой

Мы уже имели дело с геометрическими построениями: проводили прямые, откладывали отрезки, равные данным, чертили углы, треугольники и другие фигуры. При этом мы пользовались масштабной линейкой, циркулем, транспортиром, чертёжным угольником.

Построение окружности с помощью верёвки

Рис. 81

Оказывается, что многие построения можно выполнить с помощью только циркуля и линейки без масштабных делений. Поэтому в геометрии специально выделяют те задачи на построение, которые решаются с помощью только этих двух инструментов.

Что можно делать с их помощью? Ясно, что **линейка позволяет провести произвольную прямую, а также построить прямую, проходящую через две данные точки. С помощью циркуля можно провести окружность произвольного радиуса, а также окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку.** Выполняя эти несложные операции, мы сможем решить много интересных задач на построение:

построить угол, равный данному;

через данную точку провести прямую, перпендикулярную к данной прямой;

разделить данный отрезок пополам

и другие задачи.

Начнём с простой задачи.

Круг

Рис. 82

Задача

На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному.

Решение

Изобразим фигуры, данные в условии задачи: луч OC и отрезок AB (рис. 83, *а*). Затем циркулем построим окружность радиуса AB с центром O (рис. 83, *б*). Эта окружность пересечёт луч OC в некоторой точке D. Отрезок OD — искомый.

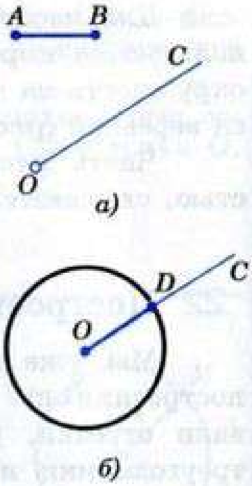


Рис. 83

23 Примеры задач на построение

Построение угла, равного данному

Задача

Отложить от данного луча угол, равный данному.

Решение

Данный угол с вершиной A и луч OM изображены на рисунке 84. Требуется построить угол, равный углу A, так, чтобы одна из его сторон совпала с лучом OM.

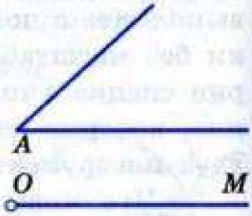


Рис. 84

Проведём окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла. Эта окружность пересекает стороны угла в точках B и C (рис. 85, *а*). Затем проведём окружность того же радиуса с центром в начале данного луча OM. Она пересекает луч в точке D (рис. 85, *б*). После этого построим окружность с центром D, радиус которой равен BC. Окружности с центрами O и D пересекаются в двух точках. Одну из этих точек обозначим буквой E. Докажем, что угол MOE — искомый.

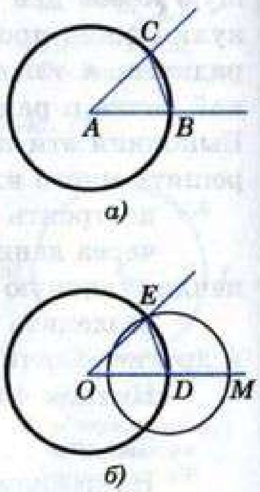


Рис. 85

Рассмотрим треугольники ABC и ODE. Отрезки AB и AC являются радиусами окружности с центром A, а отрезки OD и OE — радиусами окружности с центром O (см. рис. 85, *б*). Так как по построению эти окружности имеют равные радиусы, то $AB = OD$, $AC = OE$. Также по построению $BC = DE$.

Следовательно, $\triangle ABC = \triangle ODE$ по трём сторонам. Поэтому $\angle DOE = \angle BAC$, т. е. построенный угол MOE равен данному углу A.

То же построение можно выполнить и на местности, если вместо циркуля воспользоваться верёвкой.

Построение биссектрисы угла

Задача

Построить биссектрису данного угла.

Решение

Данный угол BAC изображён на рисунке 86. Проведём окружность произвольного радиуса с центром в вершине A. Она пересечёт стороны угла в точках B и C.

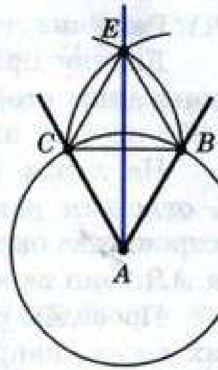


Рис. 86

Затем проведём две окружности одинакового радиуса BC с центрами в точках B и C (на рисунке изображены лишь части этих окружностей). Они пересекутся в двух точках, из которых хотя бы одна лежит внутри угла. Обозначим её буквой E. Докажем, что луч AE является биссектрисой данного угла BAC.

Рассмотрим треугольники ACE и ABE. Они равны по трём сторонам. В самом деле, AE — общая сторона; AC и AB равны как радиусы одной и той же окружности; $CE = BE$ по построению.

Из равенства треугольников ACE и ABE следует, что $\angle CAE = \angle BAE$, т. е. луч AE — биссектриса данного угла BAC.

Замечание

Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный угол на два равных угла? Ясно, что можно, — для этого нужно провести биссектрису этого угла.

Данный угол можно разделить также на четыре равных угла. Для этого нужно разделить его пополам, а затем каждую половину разделить ещё раз пополам.

А можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный угол на три равных угла? Эта задача, получившая название **задачи о трисекции угла**, в течение многих веков привлекала внимание математиков. Лишь в XIX веке было доказано, что для произвольного угла такое построение невозможно.

Построение перпендикулярных прямых

Задача

Даны прямая и точка на ней. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.

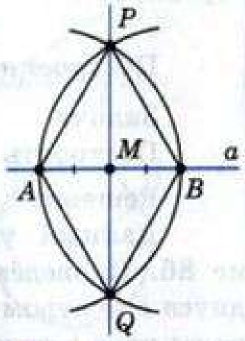


Рис. 87

Решение

Данная прямая a и данная точка M, принадлежащая этой прямой, изображены на рисунке 87.

На лучах прямой a, исходящих из точки M, отложим равные отрезки MA и MB. Затем построим две окружности с центрами A и B радиуса AB. Они пересекаются в двух точках: P и Q.

Проведём прямую через точку M и одну из этих точек, например прямую MP (см. рис. 87), и докажем, что эта прямая — искомая, т. е. что она перпендикулярна к данной прямой a.

В самом деле, так как медиана PM равнобедренного треугольника PAB является также высотой, то $PM \perp a$.

Рис. 88

Построение середины отрезка

Задача

Построить середину данного отрезка.

Решение

Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности с центрами A и B радиуса AB (рис. 88). Они пересекаются в точках P и Q. Проведём прямую PQ. Точка O пересечения этой прямой с отрезком AB и есть искомая середина отрезка AB.

В самом деле, треугольники APQ и BPQ равны по трём сторонам, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 89).

Следовательно, отрезок PO — биссектриса равнобедренного треугольника APB, а значит, и медиана, т. е. точка O — середина отрезка AB.

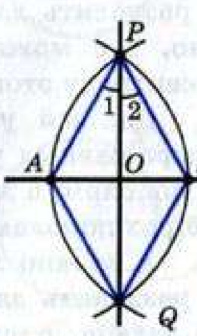


Рис. 89

Задачи

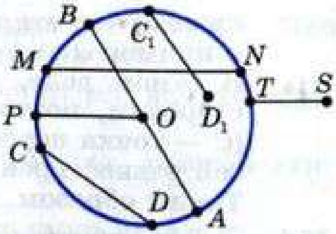


Рис. 90

143 ❑ Какие из отрезков, изображённых на рисунке 90, являются: а) хордами окружности; б) диаметрами окружности; в) радиусами окружности?

144 Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что: а) хорды BD и AC равны; б) хорды AD и BC равны; в) $\angle BAD = \angle BCD$.

145 ❑ Отрезок MK — диаметр окружности с центром O, а MP и PK — равные хорды этой окружности. Найдите $\angle POM$.

146 ❑ Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O. Найдите периметр треугольника AOD, если известно, что $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.

147 На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что угол AOB — прямой. Отрезок BC — диаметр окружности. Докажите, что хорды AB и AC равны.

148 ❑ На прямой даны две точки A и B. На продолжении луча BA отложите отрезок BC так, чтобы $BC = 2AB$.

149 ❑ Даны прямая a, точка B, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на прямой a так, чтобы $BM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

150 ❑ Даны окружность, точка A, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на окружности так, чтобы $AM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

151 ❑ Даны острый угол BAC и луч XY. Постройте угол YXZ так, чтобы $\angle YXZ = 2\angle BAC$.

152 Дан тупой угол AOB. Постройте луч OX так, чтобы углы XOA и XOB были равными тупыми углами.

153 ❑ Даны прямая a и точка M, не лежащая на ней. Постройте прямую, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a.

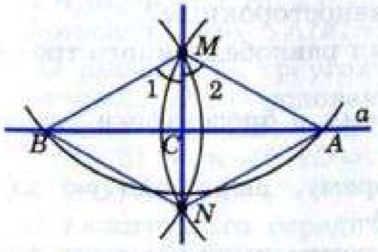


Рис. 91

Решение

Построим окружность с центром в данной точке M, пересекающую данную прямую a в двух точках, которые обозначим буквами A и B (рис. 91). Затем построим две окружности с центрами A и B, проходящие через точку M. Эти окружности пересекаются в точке M и ещё в одной точке, которую обозначим буквой N. Проведём прямую MN и докажем, что эта прямая — искомая, т. е. она перпендикулярна к прямой a.

В самом деле, треугольники AMN и BMN равны по трём сторонам, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что отрезок MC (C — точка пересечения прямых a и MN) является биссектрисой равнобедренного треугольника AMB, а значит, и высотой. Таким образом, $MN \perp AB$, т. е. $MN \perp a$.

154 ❑ Дан треугольник ABC. Постройте: а) биссектрису AK; б) медиану BM; в) высоту CH треугольника.

155 ❑ С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) $45°$; б) $22°30'$.

Вопросы для повторения к главе II

1 Объясните, какая фигура называется треугольником. Начертите треугольник и покажите его стороны, вершины и углы. Что такое периметр треугольника?

2 Какие треугольники называются равными?

3 Что такое теорема и доказательство теоремы?

4 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую первый признак равенства треугольников.

5 Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной прямой.

6 Сформулируйте и докажите теорему о перпендикуляре, проведённом из данной точки к данной прямой.

7 Какой отрезок называется медианой треугольника? Сколько медиан имеет треугольник?

8 Какой отрезок называется биссектрисой треугольника? Сколько биссектрис имеет треугольник?

9 Какой отрезок называется высотой треугольника? Сколько высот имеет треугольник?

10 Какой треугольник называется равнобедренным? Как называются его стороны?

11 Какой треугольник называется равносторонним?

12 Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника равны.

13 Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе равнобедренного треугольника.

14 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую второй признак равенства треугольников.

15 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую третий признак равенства треугольников.

16 Что такое определение? Дайте определение окружности. Что такое центр, радиус, хорда и диаметр окружности?

17 Объясните, как отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному.

18 Объясните, как отложить от данного луча угол, равный данному.

19 Объясните, как построить биссектрису данного угла.

20 Объясните, как построить прямую, проходящую через данную точку, лежащую на данной прямой, и перпендикулярную к этой прямой.

21 Объясните, как построить середину данного отрезка.

Дополнительные задачи

156 ☐ Периметр треугольника ABC равен 15 см. Сторона BC больше стороны AB на 2 см, а сторона AB меньше стороны AC на 1 см. Найдите стороны треугольника.

157 ☐ В равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны на 2 см, но меньше суммы боковых сторон на 3 см. Найдите стороны треугольника.

158 Основание равнобедренного треугольника равно 8 см. Медиана, проведённая к боковой стороне, разбивает треугольник на два треугольника так, что периметр одного треугольника на 2 см больше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника.

159 Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и угол, противолежащий основанию, одного треугольника соответственно равны боковой стороне и углу, противолежащему основанию, другого треугольника.

160 Прямая a проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна к нему. Докажите, что: а) каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B; б) каждая точка, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a.

161 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы AM и A_1M_1 равны, $BC = B_1C_1$ и $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

162 На рисунке 92 треугольник ADE равнобедренный, DE — основание. Докажите, что: а) если $BD = CE$, то $\angle CAD = \angle BAE$ и $AB = AC$; б) если $\angle CAD = \angle BAE$, то $BD = CE$ и $AB = AC$.

163 Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

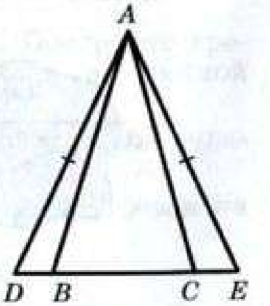


Рис. 92

164 На сторонах равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки AD, BE и CF, как показано на рисунке 93. Точки D, E, F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

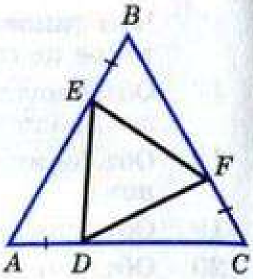


Рис. 93

165 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. На отрезках AC и BD отмечены точки K и K_1 так, что $AK = BK_1$. Докажите, что: а) $OK = OK_1$; б) точка O лежит на прямой KK_1.

166 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. Точки M и N — середины отрезков AC и BD. Докажите, что точка O — середина отрезка MN.

167 Стороны равностороннего треугольника ABC продолжены, как показано на рисунке 94, на равные отрезки AD, CE, BF. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

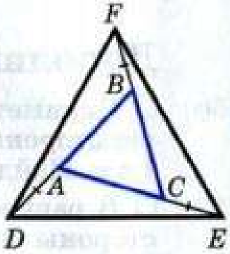


Рис. 94

168 В треугольнике ABC $\angle A = 38°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 32°$. На стороне AC отмечены точки D и E так, что точка D лежит на отрезке AE, $BD = DA$, $BE = EC$. Найдите угол DBE.

169 На рисунке 95 $OC = OD$, $OB = OE$. Докажите, что $AB = EF$. Объясните способ измерения ширины озера (отрезка AB на рисунке 95), основанный на этой задаче.

170 Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AD = A_1D_1$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

171 В треугольниках ABC и ADC стороны BC и AD равны и пересекаются в точке O, $\angle OAC = \angle OCA$. Докажите, что треугольники ABO и CDO равны.

172 На рисунке 96 $AC = AD$, $AB \perp CD$. Докажите, что $BC = BD$ и $\angle ACB = \angle ADB$.

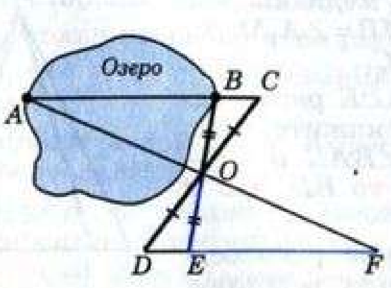


Рис. 95

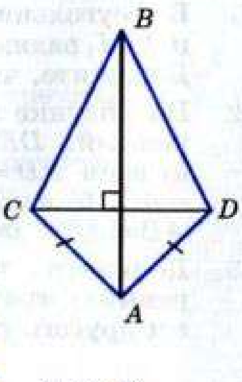


Рис. 96

173* Докажите, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника.

174* Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$.

175* На сторонах угла XOY отмечены точки A, B, C и D так, что $OA = OB$, $AC = BD$ (рис. 97). Прямые AD и BC пересекаются в точке E. Докажите, что луч OE — биссектриса угла XOY. Опишите способ построения биссектрисы угла, основанный на этом факте.

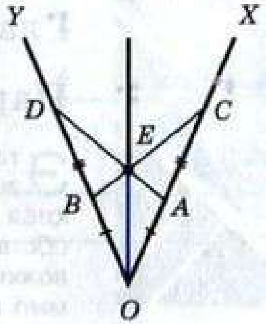


Рис. 97

176* Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, где AM и A_1M_1 — медианы треугольников.

177* Даны два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки K и L, а на сторонах A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ — точки K_1 и L_1 так, что $AK = A_1K_1$, $LC = L_1C_1$. Докажите, что: а) $KL = K_1L_1$; б) $AL = A_1L_1$.

178* Даны три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка D, не лежащая на этой прямой. Докажите, что по крайней мере два из трёх отрезков AD, BD и CD не равны друг другу.

179* На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle PXB = \angle QXC$, где X — середина основания BC. Докажите, что $BQ = CP$.

180 Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку, с центром на данной прямой.

181 Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

182 Даны прямая a, точки A, B и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершина C лежала на прямой a и $AC = PQ$.

183 Даны окружность, точки A, B и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершина C лежала на данной окружности и $AC = PQ$.

184 На стороне BC треугольника ABC постройте точку, равноудалённую от вершин A и C.

185 С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на четыре равные части.

Глава III

Параллельные прямые

Эта глава посвящена изучению параллельных прямых. Так называются две прямые на плоскости, которые не пересекаются. Отрезки параллельных прямых мы видим в окружающей обстановке — это два края прямоугольного стола, два края обложки книги, две штанги троллейбуса и т. д. Параллельные прямые играют в геометрии очень важную роль. В этой главе вы узнаете о том, что такое аксиомы геометрии и в чём состоит аксиома параллельных прямых — одна из самых известных аксиом геометрии.

§1 Признаки параллельности двух прямых

24 Определение параллельных прямых

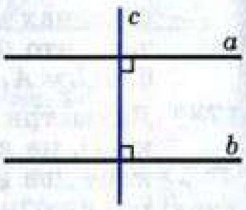


Рис. 98

В п. 1 мы отмечали, что две прямые либо имеют одну общую точку, т. е. пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т. е. не пересекаются.

Определение

Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначают так: $a \parallel b$.

На рисунке 98 изображены прямые a и b, перпендикулярные к прямой c. В п. 12 мы установили, что такие прямые a и b не пересекаются, т. е. они параллельны.

Наряду с параллельными прямыми часто рассматривают параллельные отрезки. Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на параллельных прямых. На рисунке 99, *а* отрезки AB и CD параллельны ($AB \parallel CD$), а отрезки MN и CD не параллельны. Аналогично

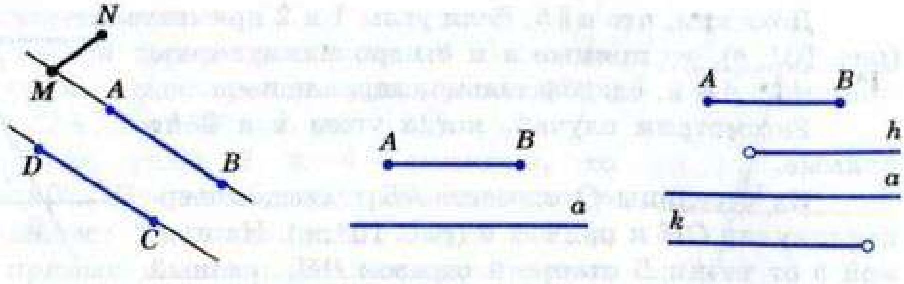


Рис. 99 а) б) в)

определяется параллельность отрезка и прямой (рис. 99, *б*), луча и прямой, отрезка и луча, двух лучей (рис. 99, *в*).

25. Признаки параллельности двух прямых

Прямая *c* называется **секущей** по отношению к прямым *a* и *b*, если она пересекает их в двух точках (рис. 100). При пересечении прямых *a* и *b* секущей *c* образуется восемь углов, которые на рисунке 100 обозначены цифрами. Некоторые пары этих углов имеют специальные названия:

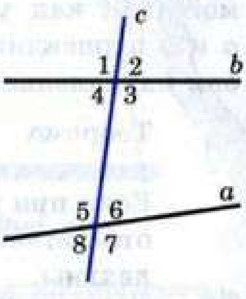


Рис. 100

накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6;

односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6;

соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

Рассмотрим три признака параллельности двух прямых, связанные с этими парами углов.

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых *a* и *b* секущей *AB* накрест лежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 101, *а*).

Докажем, что $a \parallel b$. Если углы 1 и 2 прямые (рис. 101, *б*), то прямые a и b перпендикулярны к прямой AB и, следовательно, параллельны.

Рассмотрим случай, когда углы 1 и 2 не прямые.

Из середины O отрезка AB проведём перпендикуляр OH к прямой a (рис. 101, *в*). На прямой b от точки B отложим отрезок BH_1, равный отрезку AH, как показано на рисунке 101, *в*, и проведём отрезок OH_1. Треугольники OHA и OH_1B равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$, $AH = BH_1$, $\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 5 = \angle 6$. Из равенства $\angle 3 = \angle 4$ следует, что точка H_1 лежит на продолжении луча OH, т. е. точки H, O и H_1 лежат на одной прямой, а из равенства $\angle 5 = \angle 6$ следует, что угол 6 — прямой (так как угол 5 — прямой). Итак, прямые a и b перпендикулярны к прямой HH_1, поэтому они параллельны. **Теорема доказана.**

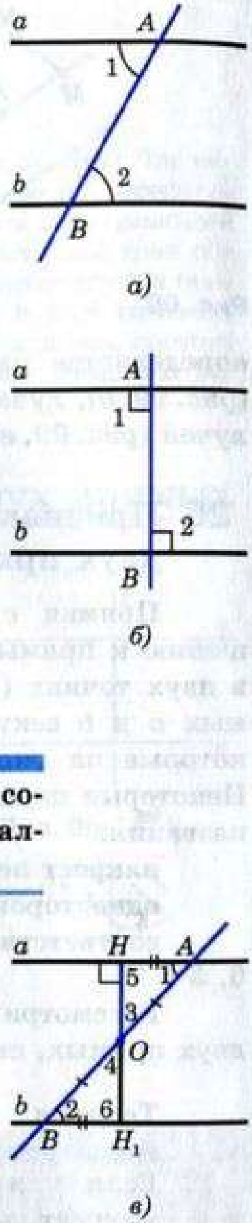


Рис. 101

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых a и b секущей c соответственные углы равны, например $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 102).

Так как углы 2 и 3 — вертикальные, то $\angle 2 = \angle 3$. Из этих двух равенств следует, что $\angle 1 = \angle 3$. Но углы 1 и 3 — накрест лежащие, поэтому прямые a и b параллельны. **Теорема доказана.**

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых a и b секущей c сумма односторонних углов равна 180°, например $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (см. рис. 102).

Так как углы 3 и 4 — смежные, то $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Из этих двух равенств следует, что накрест лежащие углы 1 и 3 равны, поэтому прямые a и b параллельны. **Теорема доказана.**

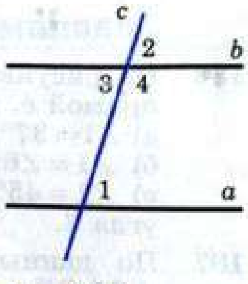


Рис. 102

26 Практические способы построения параллельных прямых

Признаки параллельности прямых лежат в основе способов построения параллельных прямых с помощью различных инструментов, используемых на практике. Рассмотрим, например, способ построения параллельных прямых с помощью чертёжного угольника и линейки.

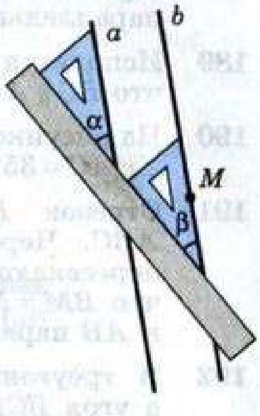


Рис. 103

Чтобы построить прямую, проходящую через точку M и параллельную данной прямой a, приложим чертёжный угольник к прямой a, а к нему линейку так, как показано на рисунке 103. Затем, передвигая угольник вдоль линейки, добьёмся того, чтобы точка M оказалась на стороне угольника, и проведём прямую b. Прямые a и b параллельны, так как соответственные углы, обозначенные на рисунке 103 буквами α и β, равны.


Рис. 104

На рисунке 104 показан способ построения параллельных прямых при помощи **рейсшины**. Этим способом пользуются в чертёжной практике.

Аналогичный способ применяется при выполнении столярных работ, где для разметки параллельных прямых используется **малка** (две деревянные планки, скреплённые шарниром, рис. 105).

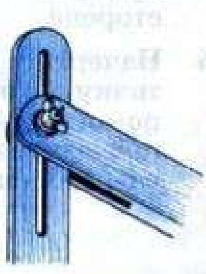


Рис. 105

Задачи

186 На рисунке 106 прямые a и b пересечены прямой c. Докажите, что $a \parallel b$, если:
а) $\angle 1 = 37°$, $\angle 7 = 143°$;
б) $\angle 1 = \angle 6$;
в) $\angle 1 = 45°$, а угол 7 в три раза больше угла 3.

187 По данным рисунка 107 докажите, что $AB \parallel DE$.

188 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

189 Используя данные рисунка 108, докажите, что $BC \parallel AD$.

190 На рисунке 109 $AB = BC$, $AD = DE$, $\angle C = 70°$, $\angle EAC = 35°$. Докажите, что $DE \parallel AC$.

191 Отрезок BK — биссектриса треугольника ABC. Через точку K проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке M так, что $BM = MK$. Докажите, что прямые KM и AB параллельны.

192 В треугольнике ABC угол A равен 40°, а угол BCE, смежный с углом ACB, равен 80°. Докажите, что биссектриса угла BCE параллельна прямой AB.

193 □ В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$. Через вершину B проведена прямая BD так, что луч BC — биссектриса угла ABD. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

194 Начертите треугольник. Через каждую вершину этого треугольника с помощью чертёжного угольника и линейки проведите прямую, параллельную противоположной стороне.

195 Начертите треугольник ABC и отметьте точку D на стороне AC. Через точку D с помощью чертёжного угольника и линейки проведите прямые, параллельные двум другим сторонам треугольника.

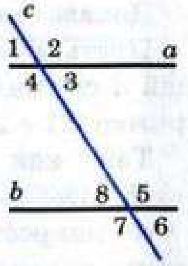


Рис. 106

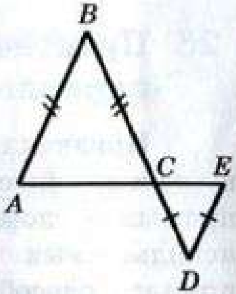


Рис. 107

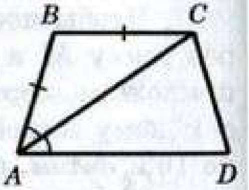


Рис. 108

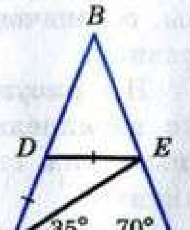


Рис. 109

§2 Аксиома параллельных прямых

27 Об аксиомах геометрии

Изучая свойства геометрических фигур, мы доказали ряд теорем. При этом мы опирались, как правило, на доказанные ранее теоремы. А на чём основаны доказательства самых первых теорем геометрии? Ответ на этот вопрос такой: некоторые утверждения о свойствах геометрических фигур принимаются в качестве исходных положений, на основе которых доказываются далее теоремы и вообще строится вся геометрия. Такие исходные положения называются **аксиомами**.

Некоторые аксиомы были сформулированы ещё в первой главе (хотя они и не назывались там аксиомами). Например, аксиомой является утверждение о том, что

через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Многие другие аксиомы, хотя и не были выделены особо, но фактически использовались в наших рассуждениях. Так, сравнение двух отрезков мы проводили с помощью наложения одного отрезка на другой. Возможность такого наложения вытекает из следующей аксиомы:

на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Сравнение двух углов основано на аналогичной аксиоме:

от любого луча в заданную сторону можно отложить угол, равный данному неразвёрнутому углу, и притом только один.

Все эти аксиомы являются наглядно очевидными и не вызывают сомнений. Само слово «аксиома» происходит от греческого «аксиос», что означает «ценный, достойный». Полный список аксиом планиметрии, принятых в нашем курсе геометрии, мы приводим в конце учебника.

Такой подход к построению геометрии, когда сначала формулируются исходные положения — аксиомы, а затем на их основе путём логических рассуждений доказываются другие утверждения, зародился ещё в глубокой древности и был изложен в знаменитом сочинении «Начала» древнегреческого учёного Евклида. Некоторые из аксиом Евклида (часть из них он называл **постулатами**) и сейчас используются в курсах геометрии, а сама геометрия, изложенная в «Началах», называется **евклидовой геометрией**. В следующем пункте мы познакомимся с одной из самых известных аксиом геометрии.

Евклид
(III в. до н. э.)

28 Аксиома параллельных прямых

Рассмотрим произвольную прямую a и точку M, не лежащую на ней (рис. 110, *а*). Докажем, что через точку M можно провести прямую, параллельную прямой a. Для этого проведём через точку M две прямые: сначала прямую c перпендикулярно к прямой a, а затем прямую b перпендикулярно к прямой c (рис. 110, *б*). Так как прямые a и b перпендикулярны к прямой c, то они параллельны.

Итак, через точку M проходит прямая b, параллельная прямой a. Возникает следующий вопрос: можно ли через точку M провести ещё одну прямую, параллельную прямой a?

Нам представляется, что если прямую b «повернуть» даже на очень малый угол вокруг точки M, то она пересечёт прямую a (прямая b' на рисунке 110, *б*). Иными словами, нам кажется, что через точку M нельзя провести другую прямую (отличную от b), параллельную прямой a. А можно ли это утверждение доказать?

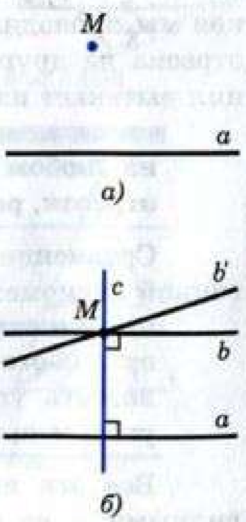


Рис. 110

Этот вопрос имеет большую историю. В «Началах» Евклида содержится постулат (пятый постулат Евклида), из которого следует, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Многие математики, начиная с древних времён, предпринимали попытки доказать пятый постулат Евклида, т. е. вывести его из других аксиом. Однако эти попытки каждый раз оказывались неудачными. И лишь в прошлом веке было окончательно выяснено, что утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой, не может быть доказано на основе остальных аксиом Евклида, а само является аксиомой.

Н. И. Лобачевский (1792—1856)

Огромную роль в решении этого непростого вопроса сыграл великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856).

Итак, в качестве ещё одного из исходных положений мы принимаем **аксиому параллельных прямых**.

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Утверждения, которые выводятся непосредственно из аксиом или теорем, называются **следствиями**. Например, утверждения 1 и 2 (см. с. 35) являются следствиями из теоремы о биссектрисе равнобедренного треугольника.

Рассмотрим некоторые следствия из аксиомы параллельных прямых.

1°. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Действительно, пусть прямые a и b параллельны и прямая c пересекает прямую a в точке M (рис. 111, a). Докажем, что прямая c пересекает и прямую b. Если бы прямая c не пе-

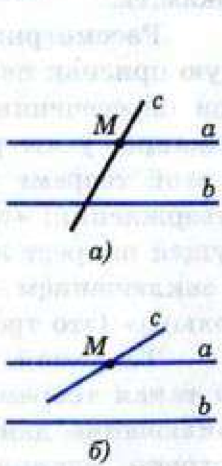


Рис. 111

ресекала прямую b, то через точку M проходили бы две прямые (прямые a и c), параллельные прямой b (рис. 111, *б*). Но это противоречит аксиоме параллельных прямых, и, значит, прямая c пересекает прямую b.

2°. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Действительно, пусть прямые a и b параллельны прямой c (рис. 112, *а*). Докажем, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые a и b не параллельны, т. е. пересекаются в некоторой точке M (рис. 112, *б*). Тогда через точку M проходят две прямые (прямые a и b), параллельные прямой c.

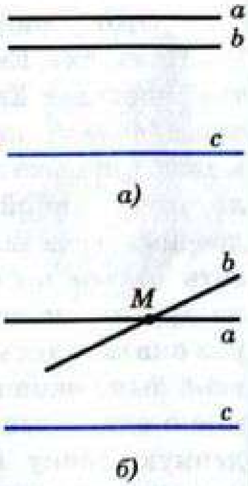


Рис. 112

Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Поэтому наше предположение неверно, а значит, прямые a и b параллельны.

29 Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей

Во всякой теореме различают две части: **условие** и **заключение**. Условие теоремы — это то, что дано, а заключение — то, что требуется доказать.

Рассмотрим, например, теорему, выражающую признак параллельности двух прямых: если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. В этой теореме условием является первая часть утверждения: «при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны» (это дано), а заключением — вторая часть: «прямые параллельны» (это требуется доказать).

Теоремой, обратной данной, называется такая теорема, в которой условием является заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы. Докажем теоремы, обратные трём теоремам п. 25.

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей MN. Докажем, что накрест лежащие углы, например 1 и 2, равны (рис. 113).

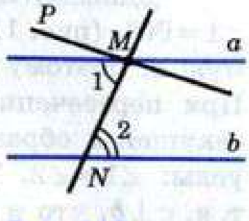


Рис. 113

Допустим, что углы 1 и 2 не равны. Отложим от луча MN угол PMN, равный углу 2, так, чтобы $\angle PMN$ и $\angle 2$ были накрест лежащими углами при пересечении прямых MP и b секущей MN. По построению эти накрест лежащие углы равны, поэтому $MP \parallel b$. Мы получили, что через точку M проходят две прямые (прямые a и MP), параллельные прямой b. Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, наше допущение неверно и $\angle 1 = \angle 2$. **Теорема доказана.**

Замечание

При доказательстве этой теоремы мы использовали способ рассуждений, который называется **методом доказательства от противного.**

Мы предположили, что при пересечении параллельных прямых a и b секущей MN накрест лежащие углы 1 и 2 не равны, т. е. предположили противоположное тому, что нужно доказать. Исходя из этого предположения, путём рассуждений мы пришли к противоречию с аксиомой параллельных прямых. Это означает, что наше предположение неверно и, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Такой способ рассуждений часто используется в математике. Мы им пользовались и ранее, например в п. 12 при доказательстве того, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются. Этим же методом мы пользовались в п. 28 при доказательстве следствий 1° и 2° из аксиомы параллельных прямых.

Следствие

Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

Действительно, пусть $a \parallel b$, $c \perp a$, т. е. $\angle 1 = 90°$ (рис. 114). Прямая c пересекает прямую a, поэтому она пересекает также прямую b. При пересечении параллельных прямых a и b секущей c образуются равные накрест лежащие углы: $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 1 = 90°$, то и $\angle 2 = 90°$, т. е. $c \perp b$, что и требовалось доказать.

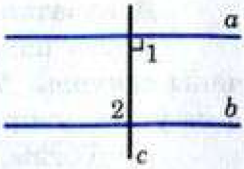


Рис. 114

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c. Докажем, что соответственные углы, например 1 и 2, равны (см. рис. 102). Так как $a \parallel b$, то накрест лежащие углы 1 и 3 равны. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Из равенств $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 3$ следует, что $\angle 1 = \angle 2$. **Теорема доказана.**

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c (см. рис. 102). Докажем, например, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Так как $a \parallel b$, то соответственные углы 1 и 2 равны. Углы 2 и 4 смежные, поэтому $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Из равенств $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ следует, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. **Теорема доказана.**

Замечание

Если доказана некоторая теорема, то отсюда ещё не следует справедливость обратного утверждения. Более того, обратное утверждение не всегда верно. Приведём простой пример. Мы знаем, что если углы вертикальные, то они равны. Обратное утверждение: «если углы равны, то они вертикальные», конечно же, неверно.

30 Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

Докажем теорему об углах с соответственно параллельными сторонами.

Теорема

Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

Доказательство

Пусть $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ — данные углы и $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$. Если угол AOB развёрнутый, то и угол $A_1O_1B_1$ — развёрнутый (объясните почему), поэтому эти углы равны. Пусть $\angle AOB$ — неразвёрнутый угол. Возможные случаи расположения углов AOB и $A_1O_1B_1$ изображены на рисунке 115, *а* и *б*. Прямая O_1B_1 пересекает прямую O_1A_1 и, следовательно, пересекает параллельную ей прямую OA в некоторой точке M. Параллельные прямые OB и O_1B_1 пересечены секущей OM, поэтому один из углов, образованных при пересечении прямых O_1B_1 и OA (угол 1 на рисунке 115), равен углу AOB (как накрест лежащие углы). Параллельные прямые OA и O_1A_1 пересечены секущей O_1M, поэтому либо $\angle 1 = \angle A_1O_1B_1$ (рис. 115, *а*), либо $\angle 1 + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (рис. 115, *б*). Из равенства $\angle 1 = \angle AOB$ и последних двух равенств следует, что либо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (см. рис. 115, *а*), либо $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (см. рис. 115, *б*). **Теорема доказана.**

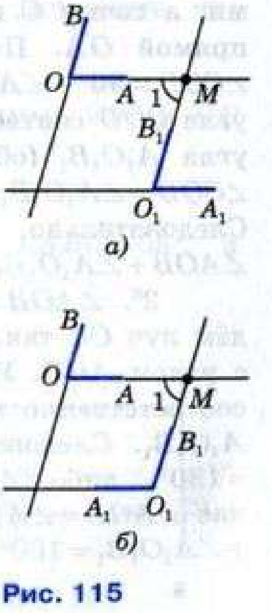


Рис. 115

Докажем теперь теорему об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

Теорема

Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

Доказательство

Пусть $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ — данные углы, $OA \perp O_1A_1$, $OB \perp O_1B_1$. Если угол AOB развёрнутый или прямой, то и угол $A_1O_1B_1$ развёрнутый или прямой (объясните почему), поэтому эти углы равны. Пусть $\angle AOB < 180°$, $O \notin O_1A_1$, $O \notin O_1B_1$ (случаи $O \in O_1A_1$, $O \in O_1B_1$ рассмотрите самостоятельно).

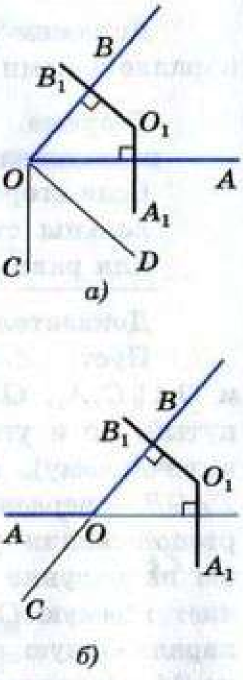


Рис. 116

Возможны два случая (рис. 116).

1°. $\angle AOB < 90°$ (см. рис. 116, *а*). Проведём луч OC так, чтобы прямые OA и OC были взаимно перпендикулярными, а точки B и C лежали по разные стороны от прямой OA. Далее, проведём луч OD так, чтобы прямые OB и OD были взаимно перпендикулярными, а точки C и D лежали по одну сторону от прямой OA. Поскольку $\angle AOB = 90° - \angle AOD$ и $\angle COD = 90° - \angle AOD$, то $\angle AOB = \angle COD$. Стороны угла COD соответственно параллельны сторонам угла $A_1O_1B_1$ (объясните почему), поэтому либо $\angle COD = \angle A_1O_1B_1$, либо $\angle COD + \angle A_1O_1B_1 = 180°$. Следовательно, либо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, либо $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$.

2°. $\angle AOB > 90°$ (см. рис. 116, *б*). Проведём луч OC так, чтобы угол AOC был смежным с углом AOB. Угол AOC острый, и его стороны соответственно перпендикулярны сторонам угла $A_1O_1B_1$. Следовательно, либо $\angle AOC + \angle A_1O_1B_1 = 180°$, либо $\angle AOC = \angle A_1O_1B_1$. В первом случае $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, во втором случае $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$. **Теорема доказана.**

Задачи

196 Дан треугольник ABC. Сколько прямых, параллельных стороне AB, можно провести через вершину C?

197 Через точку, не лежащую на прямой p, проведены четыре прямые. Сколько из этих прямых пересекают прямую p? Рассмотрите все возможные случаи.

198 Прямые a и b перпендикулярны к прямой p, прямая c пересекает прямую a. Пересекает ли прямая c прямую b?

199 Прямая p параллельна стороне AB треугольника ABC. Докажите, что прямые BC и AC пересекают прямую p.

200 ❑ На рисунке 117 $AD \parallel p$ и $PQ \parallel BC$. Докажите, что прямая p пересекает прямые AB, AE, AC, BC и PQ.

201 ❑ Сумма накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна $210°$. Найдите эти углы.

202 ❑ На рисунке 118 прямые a, b и c пересечены прямой d, $\angle 1 = 42°$, $\angle 2 = 140°$, $\angle 3 = 138°$. Какие из прямых a, b и c параллельны?

203 ❑ Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых a и b секущей c, если:
а) один из углов равен $150°$;
б) один из углов на $70°$ больше другого.

204 ❑ Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых a и b. Прямая, проходящая через середину O этого отрезка, пересекает прямые a и b в точках C и D. Докажите, что $CO = OD$.

205 ❑ По данным рисунка 119 найдите $\angle 1$.

206 ❑ $\angle ABC = 70°$, а $\angle BCD = 110°$. Могут ли прямые AB и CD быть:
а) параллельными;
б) пересекающимися?

207 ❑ Ответьте на вопросы задачи **206**, если $\angle ABC = 65°$, а $\angle BCD = 105°$.

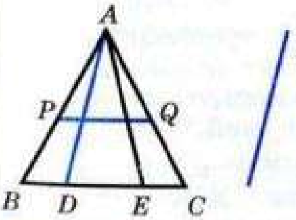


Рис. 117

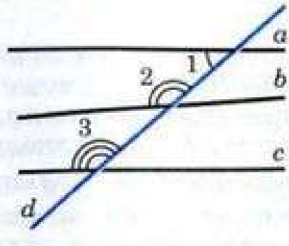


Рис. 118

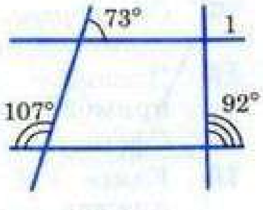


Рис. 119

208 ☐ Разность двух односторонних углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 50°. Найдите эти углы.

209 ☐ На рисунке 120 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 4 = 45°$. Найдите углы 1, 2 и 3.

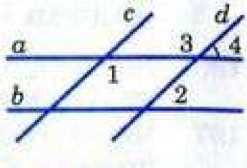


Рис. 120

210 Два тела P_1 и P_2 подвешены на концах нити, перекинутой через блоки A и B (рис. 121). Третье тело P_3 подвешено к той же нити в точке C и уравновешивает тела P_1 и P_2. (При этом $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$.) Докажите, что $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

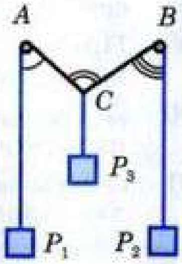


Рис. 121

211 ☐ Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что: а) биссектрисы накрест лежащих углов параллельны; б) биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

212 Прямые, содержащие высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC, пересекаются в точке H, угол B — тупой, $\angle C = 20°$. Найдите угол AHB.

Вопросы для повторения к главе III

1 Дайте определение параллельных прямых. Какие два отрезка называются параллельными?

2 Что такое секущая по отношению к двум прямым? Назовите пары углов, которые образуются при пересечении двух прямых секущей.

3 Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

4 Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

5 Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

6 Расскажите о практических способах проведения параллельных прямых.

7 Объясните, какие утверждения называются аксиомами. Приведите примеры аксиом.

8 Докажите, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной.

9 Сформулируйте аксиому параллельных прямых.

10 Какое утверждение называется следствием? Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

11 Докажите, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

12 Какая теорема называется обратной данной теореме? Приведите примеры теорем, обратных данным.

13 Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.

14 Докажите, что если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

15 Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей:
а) соответственные углы равны;
б) сумма односторонних углов равна 180°.

16 Сформулируйте и докажите теорему об углах с соответственно параллельными сторонами.

17 Сформулируйте и докажите теорему об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

Дополнительные задачи

213 ☐ На рисунке 122 $CE = ED$, $BE = EF$ и $KE \parallel AD$. Докажите, что $KE \parallel BC$.

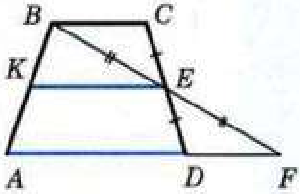


Рис. 122

214 ☐ Прямая, проходящая через середину биссектрисы AD треугольника ABC и перпендикулярная к AD, пересекает сторону AC в точке M. Докажите, что $MD \parallel AB$.

215 ☐ По данным рисунка 123 найдите угол 1.

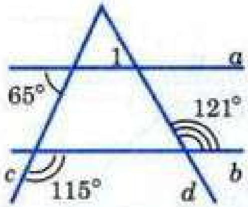


Рис. 123

216 ☐ На рисунке 124 DE — биссектриса угла ADF. По данным рисунка найдите углы треугольника ADE.

217 ☐ Прямые a и b параллельны прямой c. Докажите, что любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает также и прямую b.

218 Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую, которая пересекает прямую a и параллельна прямой b? Ответ обоснуйте.

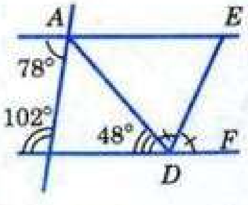


Рис. 124

219* ☐ Даны две прямые a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

220 ❑ Докажите, что если при пересечении двух прямых a и b секущей накрест лежащие углы не равны, то прямые a и b пересекаются.

221 ❑ Даны треугольник ABC и точки M и N такие, что середина отрезка BM совпадает с серединой стороны AC, а середина отрезка CN — с серединой стороны AB. Докажите, что точки M, N и A лежат на одной прямой.

222 Даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. С помощью циркуля и линейки через точку A проведите прямую, параллельную прямой a.

Глава IV

Соотношения между сторонами и углами треугольника

В этой главе мы снова обращаемся к треугольникам и будем обсуждать различные их свойства, при этом большое внимание уделим прямоугольным треугольникам, т. е. таким треугольникам, у которых один угол прямой. Некоторые свойства прямоугольных треугольников находят практическое применение, например, в конструкциях уголковых отражателей, которые широко используются в различных устройствах — от велосипедов до космических аппаратов. Об этом также будет рассказано в данной главе.

§1 Сумма углов треугольника

31 Теорема о сумме углов треугольника

Докажем одну из важнейших теорем геометрии — теорему о сумме углов треугольника.

Теорема

Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство

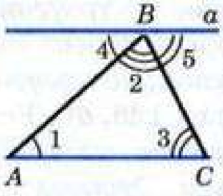
Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Проведём через вершину B прямую a, параллельную стороне AC (рис. 125, a). Углы 1 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых a и AC секущей AB, а углы 3 и 5 — накрест лежащими углами при пересечении тех же параллельных прямых секущей BC. Поэтому

$$\angle 4 = \angle 1, \ \angle 5 = \angle 3. \quad (1)$$

Очевидно, сумма углов 4, 2 и 5 равна развёрнутому углу с вершиной B, т. е.



а)

б)

Рис. 125

$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$. Отсюда, учитывая равенства (1), получаем: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, или $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. **Теорема доказана.**

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника. Докажем, что **внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.**

Обратимся к рисунку 125, *б*, на котором угол 4 — внешний угол, смежный с углом 3 данного треугольника. Так как $\angle 4 + \angle 3 = 180°$, а по теореме о сумме углов треугольника $(\angle 1 + \angle 2) + \angle 3 = 180°$, то $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$, что и требовалось доказать.

32 Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники

Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то сумма двух других углов не превосходит 90°, и поэтому каждый из них острый. Таким образом, **в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.**

Если все три угла треугольника острые, то треугольник называется **остроугольным** (рис. 126, *а*). Если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется **тупоугольным** (рис. 126, *б*). Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется **прямоугольным.** Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузой**, а две другие стороны — **катетами.** На рисунке 126, *в* изображён прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C.

Рис. 126

Задачи

223 Найдите угол C треугольника ABC, если:
а) $\angle A = 65°$, $\angle B = 57°$; б) $\angle A = 24°$, $\angle B = 130°$; в) $\angle A = \alpha$, $\angle B = 2\alpha$; г) $\angle A = 60° + \alpha$, $\angle B = 60° - \alpha$.

224 Найдите углы треугольника ABC, если $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$.

225 Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

226 Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника острые.

227 Найдите углы равнобедренного треугольника, если: а) угол при основании в два раза больше угла, противолежащего основанию; б) угол при основании в три раза меньше внешнего угла, смежного с ним.

228 Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен: а) 40°; б) 60°; в) 100°.

229 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите $\angle ADC$, если $\angle C = 50°$.

230 Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 58°$, $\angle B = 96°$.

231 Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

232 Верно ли утверждение: если треугольник равнобедренный, то один из его внешних углов в два раза больше угла треугольника, не смежного с этим внешним углом?

233 Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.

234 Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 115°. Найдите углы треугольника.

235 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите углы этого треугольника, если $\angle ADB = 110°$.

§2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

33 Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника

Теорема

В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) обратно, против большего угла лежит бо́льшая сторона.

Доказательство

1) Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC (рис. 127, *а*). Докажем, что $\angle C > \angle B$.

Отложим на стороне AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 127, *б*). Так как $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B. Следовательно, угол 1 является частью угла C, и, значит, $\angle C > \angle 1$. Угол 2 — внешний угол треугольника BDC, поэтому $\angle 2 > \angle B$. Углы 1 и 2 равны как углы при основании равнобедренного треугольника ADC. Таким образом, $\angle C > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle B$. Отсюда следует, что $\angle C > \angle B$.

2) Пусть в треугольнике ABC $\angle C > \angle B$. Докажем, что $AB > AC$.

Предположим, что это не так. Тогда либо $AB = AC$, либо $AB < AC$. В первом случае треугольник ABC — равнобедренный, и, значит, $\angle C = \angle B$. Во втором случае $\angle B > \angle C$ (против большей стороны лежит больший угол). И то и другое противоречит условию: $\angle C > \angle B$. Поэтому наше предположение неверно, и, следовательно, $AB > AC$. **Теорема доказана.**

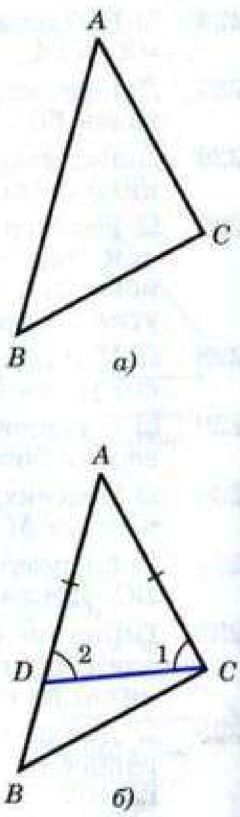


Рис. 127

Следствие 1

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

В самом деле, гипотенуза лежит против прямого угла, а катет — против острого. Так как прямой угол больше острого, то гипотенуза больше катета.

Следствие 2

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный (признак равнобедренного треугольника).

Докажем этот признак. Пусть в треугольнике два угла равны. Тогда равны и стороны, лежащие против этих углов. Действительно, если предположить, что одна из указанных сторон больше другой, то угол, лежащий против неё, будет больше угла, лежащего против другой стороны, а это противоречит условию (тому, что данные углы равны).

Итак, в треугольнике две стороны равны, т. е. треугольник — равнобедренный.

34 Неравенство треугольника

Теорема

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $AB < AC + CB$. Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный стороне CB (рис. 128). В равнобедренном треугольнике BCD $\angle 1 = \angle 2$, а в треугольнике ABD $\angle ABD > \angle 1$ и, значит, $\angle ABD > \angle 2$.

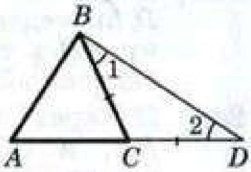


Рис. 128

Так как в треугольнике против большего угла лежит бóльшая сторона, то $AB < AD$. Но $AD = AC + CD = AC + CB$, поэтому $AB < AC + CB$. **Теорема доказана.**

Следствие

Для любых трёх точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства: $AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$.

Каждое из этих неравенств называется **неравенством треугольника**.

Задачи

236 Сравните углы треугольника ABC и выясните, может ли быть угол A тупым, если: а) $AB > BC > AC$; б) $AB = AC < BC$.

237 Сравните стороны треугольника ABC, если: а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A > \angle B = \angle C$.

238 Докажите, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий любую точку основания, отличную от вершины, с противоположной вершиной, меньше боковой стороны.

239 Докажите, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведённой из той же вершины.

240 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC — равнобедренный.

241 Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN равнобедренный.

242 Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне треугольника, то треугольник равнобедренный.

243 Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная его биссектрисе AA_1 и пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что $AC = AD$.

244 Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону AB в точке E. Докажите, что треугольник ADE — равнобедренный.

245 Через точку пересечения биссектрис BB_1 и CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что $MN = BM + CN$.

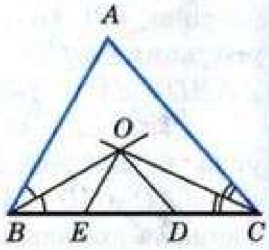


Рис. 129

246 На рисунке 129 лучи BO и CO — биссектрисы углов B и C треугольника ABC, $OE \parallel AB$, $OD \parallel AC$. Докажите, что периметр $\triangle EDO$ равен длине отрезка BC.

247 На рисунке 130 $AB = AC$, $AP = AQ$. Докажите, что:
а) треугольник BOC — равнобедренный;
б) прямая OA проходит через середину основания BC и перпендикулярна к нему.

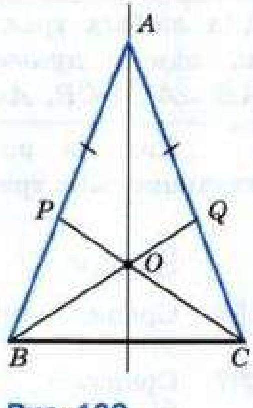


Рис. 130

248 Существует ли треугольник со сторонами: а) 1 м, 2 м и 3 м; б) 1,2 дм, 1 дм и 2,4 дм?

249 В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая равна 10 см. Какая из них является основанием?

250 Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 7 см и 3 см; б) 8 см и 2 см; в) 10 см и 5 см.

251 Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

Решение

Докажем, например, что в треугольнике ABC $AB > AC - BC$. Так как $AB + BC > AC$, то $AB > AC - BC$.

252 Два внешних угла треугольника при разных вершинах равны. Периметр треугольника равен 74 см, а одна из сторон равна 16 см. Найдите две другие стороны треугольника.

253 Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см, разность двух сторон равна 4 см, а один из его внешних углов — острый. Найдите стороны треугольника.

§3 Прямоугольные треугольники

35 Некоторые свойства прямоугольных треугольников

Рассмотрим свойства прямоугольных треугольников, которые устанавливаются с помощью теоремы о сумме углов треугольника.

1°. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

В самом деле, сумма углов треугольника равна 180°, а прямой угол равен 90°, поэтому сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

2°. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором угол A — прямой, $\angle B = 30°$ и, значит, $\angle C = 60°$ (рис. 131, *а*). Докажем, что $AC = \frac{1}{2}BC$.

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 131, *б*. Получим треугольник BCD, в котором $\angle B = \angle D = 60°$, поэтому $DC = BC$. Но

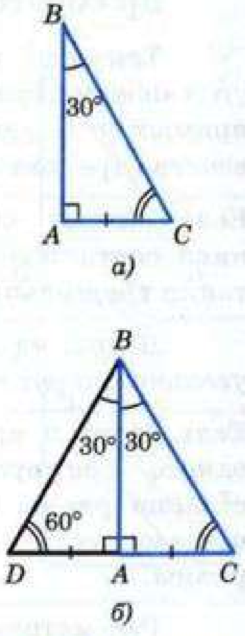


Рис. 131

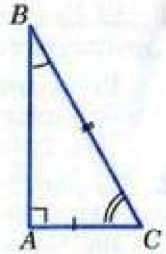
Соотношения между сторонами и углами треугольника

$AC = \frac{1}{2} DC$. Следовательно, $AC = \frac{1}{2} BC$, что и требовалось доказать.

3^0. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, у которого катет AC равен половине гипотенузы BC (рис. 132, *а*). Докажем, что $\angle ABC = 30°$.

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 132, *б*. Получим равносторонний треугольник BCD. Углы равностороннего треугольника равны друг другу (объясните почему), поэтому каждый из них равен 60°. В частности, $\angle DBC = 60°$. Но $\angle DBC = 2\angle ABC$. Следовательно, $\angle ABC = 30°$, что и требовалось доказать.



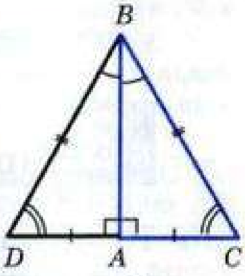


Рис. 132

36 Признаки равенства прямоугольных треугольников

Так как в прямоугольном треугольнике угол между двумя катетами прямой, а любые два прямых угла равны, то из первого признака равенства треугольников следует:

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

Далее, из второго признака равенства треугольников следует:

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Рассмотрим ещё два признака равенства прямоугольных треугольников.

Теорема

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Доказательство

Из свойства 1^0 п. 35 следует, что в таких треугольниках два других острых угла также равны, поэтому треугольники равны по второму признаку равенства треугольников, т. е. по стороне (гипотенузе) и двум прилежащим к ней углам. **Теорема доказана.**

Теорема

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы C и C_1 — прямые, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 133, *а*, *б*). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle C = \angle C_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина C совместится с вершиной C_1, а стороны CA и CB наложатся соответственно на лучи C_1A_1 и C_1B_1. Поскольку $CB = C_1B_1$, то вершина B совместится с вершиной B_1. Но тогда вершины A и A_1 также совместятся. В самом деле, если предположить, что точка A совместится с некоторой другой точкой A_2 луча C_1A_1, то получим равнобедренный треугольник $A_1B_1A_2$, в котором углы при основании A_1A_2 не равны (на рисунке 133, *б* $\angle A_2$ — острый, а $\angle A_1$ — тупой как смежный с острым углом $B_1A_1C_1$). Но это невозможно, поэтому вершины A и A_1 совместятся.

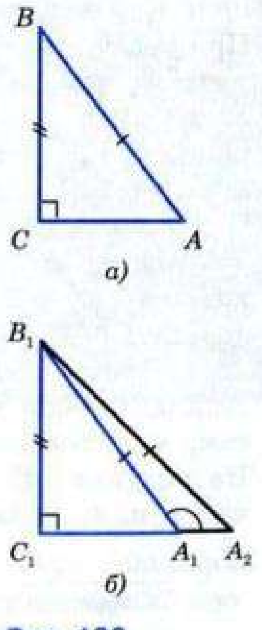


Рис. 133

Следовательно, полностью совместятся треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. они равны. **Теорема доказана.**

37* Уголковый отражатель

Мы знаем, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. Это свойство лежит в основе конструкции простейшего уголкового отражателя. Прежде чем описать его устройство, рассмотрим следующую задачу.

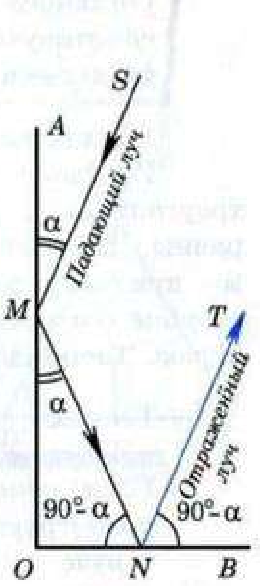


Рис. 134

Задача

Угол между зеркалами OA и OB равен 90°. Луч света, падающий на зеркало OA под углом α, отражается от него, а затем отражается от зеркала OB (рис. 134). Доказать, что падающий и отражённый лучи параллельны.

Решение

По закону отражения света падающий луч SM и луч MN составляют с прямой OA равные углы α. Так как треугольник MON прямоугольный, то угол MNO равен $90° - \alpha$. Применяя опять закон отражения света, получаем, что луч MN и отражённый луч NT составляют с прямой OB равные углы. Обращаясь к рисунку 134, мы видим, что $\angle SMN = 180° - 2\alpha$, $\angle MNT = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$, поэтому $\angle SMN + \angle MNT = 180°$.

Следовательно, падающий луч SM и отражённый луч NT параллельны, что и требовалось доказать.

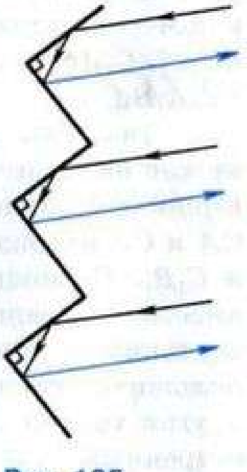


Рис. 135

Простейший уголковый отражатель представляет собой несколько зеркал, составленных так, что соседние зеркала образуют угол в 90°. На рисунке 135 в виде ломаной линии схематически изображён такой отражатель. Представим

* Здесь и в дальнейшем пункты, отмеченные звёздочкой, не являются обязательными.

себе, что на этот отражатель падает пучок параллельных лучей (на рисунке эти лучи изображены чёрными линиями со стрелками). Тогда отражённые лучи будут параллельны падающим лучам (эти лучи изображены цветными линиями со стрелками). Таким образом, уголковый отражатель «возвращает назад» падающий на него пучок параллельных лучей при любом расположении отражателя по отношению к падающему пучку лучей.

Это свойство уголкового отражателя используется в технике. Так, уголковый отражатель устанавливается на заднем крыле велосипеда для того, чтобы «возвращать назад» свет автомобильных фар. Это даёт возможность водителю автомобиля видеть ночью идущий впереди велосипед. Отметим, что уголковый отражатель, используемый на практике, устроен более сложно, чем описанный простейший, но принцип его действия тот же, что и у простейшего уголкового отражателя.

Уголковый отражатель был установлен на одной из отечественных автоматических станций, запущенных на Луну. С поверхности Земли участок Луны, на котором находилась автоматическая станция с уголковым отражателем, был освещён лучом лазера. Луч «вернулся» в то же место, где находился лазер. Измерив точное время от момента включения лазера до момента возвращения сигнала, удалось с весьма высокой точностью найти расстояние от поверхности Земли до поверхности Луны.

Задачи

254 Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

255 ☐ В равнобедренном треугольнике CDE с основанием CE проведена высота CF. Найдите $\angle ECF$, если $\angle D = 54°$.

256 ☐ Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего из катетов равна 26,4 см. Найдите гипотенузу треугольника.

257 ☐ В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C внешний угол при вершине A равен 120°, $AC + AB = 18$ см. Найдите AC и AB.

258 ☐ Из середины D стороны BC равностороннего треугольника ABC проведён перпендикуляр DM к прямой AC. Найдите AM, если $AB = 12$ см.

259 ☐ Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°. Высота, проведённая к боковой стороне, равна 9 см. Найдите основание треугольника.

260 ☐ Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 7,6 см, а боковая сторона треугольника равна 15,2 см. Найдите углы этого треугольника.

261 Докажите, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведённые из вершин основания, равны.

262 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 — прямые, BD и B_1D_1 — биссектрисы. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle B = \angle B_1$ и $BD = B_1D_1$.

263 Высоты, проведённые к боковым сторонам AB и AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке M. Найдите углы треугольника, если $\angle BMC = 140°$.

264 Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 55°$, $\angle B = 67°$.

265 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса AF и высота AH. Найдите углы треугольника AHF, если $\angle B = 112°$.

266 На сторонах угла O отмечены точки A и B так, что $OA = OB$. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке C. Докажите, что луч OC — биссектриса угла O.

267 Докажите, что два остроугольных треугольника равны, если сторона и высоты, проведённые из концов этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и высотам, проведённым из концов этой стороны, другого треугольника.

268 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

269 Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $BH = B_1H_1$, где BH и B_1H_1 — высоты $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$.

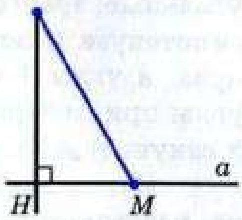
270 Внутри угла дана точка A. Постройте прямую, проходящую через точку A и отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

§ 4 Построение треугольника по трём элементам

38 Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми

Расстоянием между двумя точками мы назвали длину отрезка, соединяющего эти точки. Введём теперь понятия расстояния от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми.

Пусть отрезок AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой a, M — любая точка прямой a, отличная от H (рис. 136). Отрезок AM называется **наклонной**, проведённой из точки A к прямой a. В прямоугольном треугольнике AHM катет AH меньше гипотенузы AM.



Отрезок AM — наклонная к прямой a

Рис. 136

Следовательно, **перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.**

Длина перпендикуляра, проведённого из точки к прямой, называется расстоянием от этой точки до прямой.

Отметим, что расстояние от точки до прямой равно наименьшему из расстояний от этой точки до точек прямой.

На рисунке 137 расстояние от точки B до прямой p равно 3 см, а расстояние от точки C до этой прямой равно 5 см.

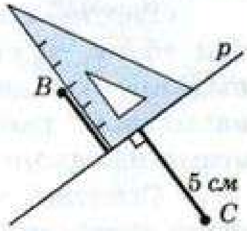


Рис. 137

Прежде чем ввести понятие расстояния между параллельными прямыми, рассмотрим одно из важнейших свойств параллельных прямых.

Теорема

Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

Доказательство

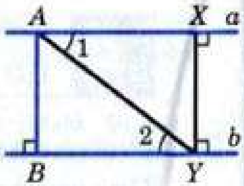


Рис. 138

Рассмотрим параллельные прямые a и b. Отметим на прямой a точку A и проведём из этой точки перпендикуляр AB к прямой b (рис. 138). Докажем, что расстояние от любой точки X прямой a до прямой b равно AB.

Проведём из точки X перпендикуляр XY к прямой b. Так как $XY \perp b$, то $XY \perp a$. Прямоугольные треугольники ABY и YXA равны по гипотенузе и острому углу (AY — общая гипотенуза, а углы 1 и 2 равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых a и b секущей AY). Следовательно, $XY = AB$.

Итак, любая точка X прямой a находится на расстоянии AB от прямой b. Очевидно, все точки прямой b находятся на таком же расстоянии от прямой a. **Теорема доказана.**

Из доказанной теоремы следует, что точка, движущаяся по одной из параллельных прямых, всё время находится на одном и том же расстоянии от другой прямой.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется расстоянием между этими прямыми.

Отметим, что расстояние между параллельными прямыми равно наименьшему из расстояний от точек одной прямой до точек другой прямой.

Замечание 1

Справедливо утверждение, обратное доказанной теореме: **все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудалённые от неё, лежат на прямой, параллельной данной.** (Докажите это самостоятельно.)

Замечание 2

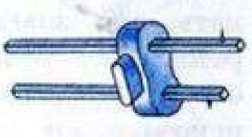
Из доказанной теоремы и ей обратной следует, что **множество всех точек плоскости, на-**

ходящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.**

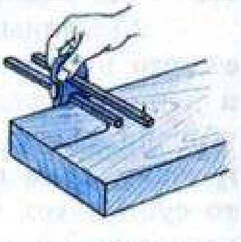
В самом деле, пусть a — данная прямая, d — данное расстояние. Отметим на прямой a произвольную точку A и проведём отрезок AB длины d, перпендикулярный к прямой a; через точку B проведём прямую b, параллельную прямой a (сделайте соответствующий рисунок). По доказанной теореме все точки прямой b находятся на расстоянии d от прямой a, т. е. все они принадлежат искомому множеству. В силу обратной теоремы любая точка искомого множества лежит на прямой b. Таким образом, искомым множеством является прямая b.

Множество всех точек, удовлетворяющих какому-либо условию, иногда называют **геометрическим местом точек**, удовлетворяющих этому условию. Можно сказать тем самым, что геометрическое место точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.

На этом факте основано устройство инструмента, называемого **рейсмусом** (рис. 139, *а*). Рейсмус используется в столярном деле для разметки на поверхности деревянного бруска прямой, параллельной краю бруска. При передвижении рейсмуса вдоль края бруска металлическая игла прочерчивает отрезок прямой, параллельный краю бруска (рис. 139, *б*).



а)



б)

Рис. 139

39 Построение треугольника по трём элементам

Задача 1

Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

Решение

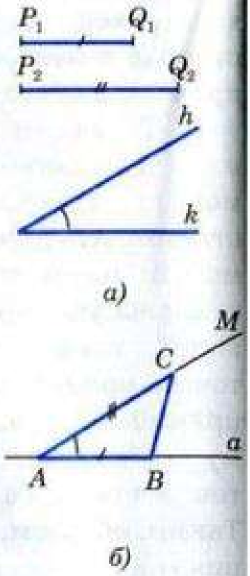
Прежде всего уточним, как нужно понимать эту задачу, т. е. что здесь дано и что нужно построить.

Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и угол hk (рис. 140, *а*). Требуется с помощью циркуля и линейки (без масштабных делений) построить такой треугольник ABC, у которого две стороны, скажем AB и AC, равны данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, а угол A между этими сторонами равен данному углу hk.

Проведём прямую a и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 140, *б*). Затем построим угол BAM, равный данному углу hk (как это сделать, мы знаем). На луче AM отложим отрезок AC, равный отрезку P_2Q_2, и проведём отрезок BC. Построенный треугольник ABC — искомый.

В самом деле, по построению $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$.

Описанный ход построения показывает, что при любых данных отрезках P_1Q_1, P_2Q_2 и данном неразвёрнутом угле hk искомый треугольник построить можно. Так как прямую a и точку A на ней можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условиям задачи. Все эти треугольники равны друг другу (по первому признаку равенства треугольников), поэтому принято говорить, что **данная задача имеет единственное решение.**



Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Рис. 140

Задача 2

Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Решите эту задачу самостоятельно.

Задача 3

Построить треугольник по трём его сторонам.

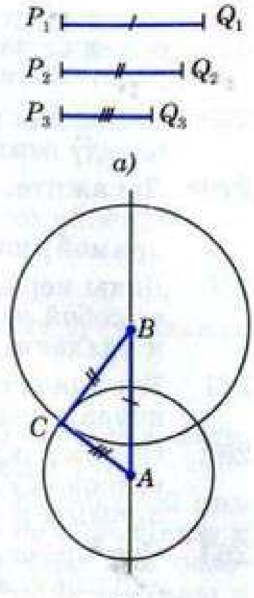
Решение

Пусть даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 (рис. 141, *а*). Требуется построить треугольник ABC, в котором $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$.

Проведём прямую и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 141, *б*). Затем построим две окружности: одну — с центром A и радиусом P_3Q_3, а другую — с центром B и радиусом P_2Q_2. Пусть точка C — одна из точек пересечения этих окружностей. Проведя отрезки AC и BC, получим искомый треугольник ABC.

В самом деле, по построению $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$, т. е. стороны треугольника ABC равны данным отрезкам.

Задача 3 не всегда имеет решение. Действительно, во всяком треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей стороны, поэтому если какой-нибудь из данных отрезков больше или равен сумме двух других, то нельзя построить треугольник, стороны которого равнялись бы данным отрезкам.



Построение треугольника по трём сторонам

Рис. 141

Задачи

271 Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, сумма длин которых равна 17 см, а разность длин равна 1 см. Найдите расстояние от точки до прямой.

272 В равностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Расстояние от точки D до прямой AC равно 6 см. Найдите расстояние от вершины A до прямой BC.

273 Сумма гипотенузы CE и катета CD прямоугольного треугольника CDE равна 31 см, а их разность равна 3 см. Найдите расстояние от вершины C до прямой DE.

274 Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от боковых сторон.

275 На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка M, равноудалённая от боковых сторон. Докажите, что CM — высота треугольника ABC.

276 Через середину отрезка проведена прямая. Докажите, что концы отрезка равноудалены от этой прямой.

277 Расстояние между параллельными прямыми a и b равно 3 см, а между параллельными прямыми a и c равно 5 см. Найдите расстояние между прямыми b и c.

278 ❑ Прямая AB параллельна прямой CD. Найдите расстояние между этими прямыми, если $\angle ADC = 30°$, $AD = 6$ см.

279* Докажите, что все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудалённые от неё, лежат на прямой, параллельной данной.

280 Даны неразвёрнутый угол ABC и отрезок PQ. Что представляет собой множество всех точек, лежащих внутри данного угла и удалённых от прямой BC на расстояние PQ?

281 Что представляет собой множество всех точек плоскости, равноудалённых от двух данных параллельных прямых?

282 Прямые a и b параллельны. Докажите, что середины всех отрезков XY, где $X \in a$, $Y \in b$, лежат на прямой, параллельной прямым a и b и равноудалённой от этих прямых.

283 Что представляет собой множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой?

Задачи на построение

284 ❑ Даны прямая a и отрезок AB. Постройте прямую p, параллельную прямой a, так, чтобы расстояние между прямыми a и p было равно AB.

Решение

Отметим на прямой a какую-нибудь точку C и проведём через точку C прямую b, перпендикулярную к прямой a (рис. 142). Затем на одном из лучей прямой b, исходящих из точки C, отложим отрезок CD, равный отрезку AB. Через точку D проведём прямую p, перпендикулярную к прямой b. Прямая p — искомая (объясните почему).

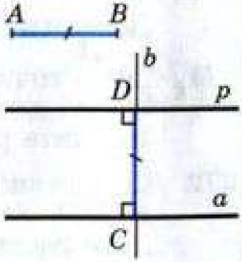


Рис. 142

Как видно из построения, для любой данной прямой a и любого данного отрезка AB искомую прямую можно построить, причём задача имеет два решения (прямые p и p_1 на рисунке 143).

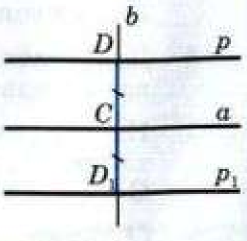


Рис. 143

285 ❑ Даны пересекающиеся прямые a и b и отрезок PQ. На прямой a постройте точку, удалённую от прямой b на расстояние PQ.

286 Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведённой из вершины этого угла.

287 Постройте треугольник по стороне, медиане, проведённой к одной из двух других сторон, и углу между данными стороной и медианой.

288 Даны отрезок PQ и угол hk. Постройте треугольник ABC так, чтобы:

а) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle hk$;

б) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{4}\angle hk$.

289 Даны два угла hk и h_1k_1 и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB = PQ$, $\angle A = \angle hk$, $\angle B = \frac{1}{2}\angle h_1k_1$.

290 Постройте прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и прилежащему к нему острому углу.

291 Постройте равнобедренный треугольник: а) по боковой стороне и углу, противолежащему основанию; б) по основанию и углу при основании; в) по боковой стороне и углу при основании; г) по основанию и боковой стороне; д) по основанию и медиане, проведённой к основанию.

292 Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3. Постройте треугольник ABC так, чтобы:

а) $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = 2P_3Q_3$;

б) $AB = 2P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = \frac{3}{2}P_3Q_3$.

Всегда ли задача имеет решение?

293 Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведённой к этой стороне.

Решение

Даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 и угол hk (рис. 144, *а*). Требуется построить треугольник ABC, у которого одна из сторон, скажем AB, равна отрезку P_1Q_1, один из прилежащих к ней углов, например угол A, равен данному углу hk, а высота CH, проведённая к стороне AB, равна данному отрезку P_2Q_2.

Построим угол XAY, равный данному углу hk, и отложим на луче AX отрезок AB, равный данному отрезку P_1Q_1 (рис. 144, *б*).

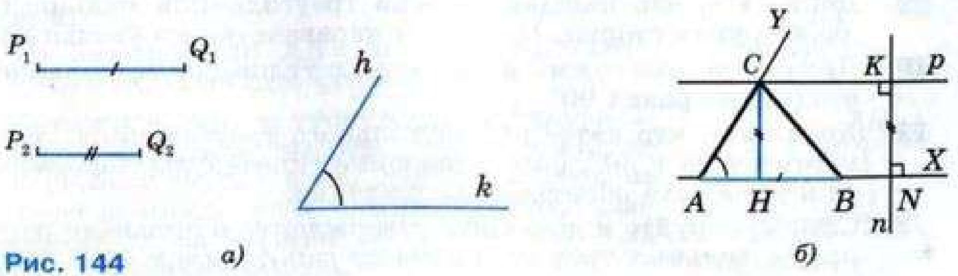


Рис. 144

Для построения вершины C искомого треугольника заметим, что расстояние от точки C до прямой AB должно равняться P_2Q_2. Множеством всех точек плоскости, находящихся на расстоянии P_2Q_2 от прямой AB и лежащих по ту же сторону от прямой AB, что и точка Y, является прямая p, параллельная прямой AB и находящаяся на расстоянии P_2Q_2 от прямой AB. Следовательно, искомая точка C есть точка пересечения прямой p и луча AY. Построение прямой p описано в решении задачи **284**. Очевидно, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи: $AB = P_1Q_1$, $CH = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$.

294 ☐ Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к одной из этих сторон.

295 Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из этих сторон.

Вопросы для повторения к главе IV

1 Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов треугольника.

2 Какой угол называется внешним углом треугольника? Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

3 Докажите, что в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.

4 Какой треугольник называется остроугольным? Какой треугольник называется тупоугольным?

5 Какой треугольник называется прямоугольным? Как называются стороны прямоугольного треугольника?

6 Докажите, что в треугольнике:

1) против большей стороны лежит больший угол;

2) обратно, против большего угла лежит бóльшая сторона.

7 Докажите, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

8 Докажите, что если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

9 Докажите, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Что такое неравенство треугольника?

10 Докажите, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

11 Докажите, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

12 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

13 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

14 Объясните, какой отрезок называется наклонной, проведённой из данной точки к данной прямой.

15 Докажите, что перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.

16 Что называется расстоянием от точки до прямой?

17 Докажите, что все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

18 Что называется расстоянием между двумя параллельными прямыми?

19 Докажите, что множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.

20 Что такое геометрическое место точек? Приведите пример.

21 Объясните, как построить треугольник:
а) по двум сторонам и углу между ними;
б) по стороне и двум прилежащим к ней углам.

22 Объясните, как построить треугольник по трём сторонам. Всегда ли эта задача имеет решение?

Дополнительные задачи

296 В равнобедренном треугольнике ABC биссектрисы равных углов B и C пересекаются в точке O. Докажите, что угол BOC равен внешнему углу треугольника при вершине B.

297 На стороне AD треугольника ADC отмечена точка B так, что $BC = BD$. Докажите, что прямая DC параллельна биссектрисе угла ABC.

298 На рисунке 145 $AD \parallel BE$, $AC = AD$ и $BC = BE$. Докажите, что угол DCE — прямой.

299 На рисунке 146 $AB = AC$, $AP = PQ = QR = RB = BC$. Найдите угол A.

300 Докажите, что в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведённой из вершины тупого угла, лежит на стороне треугольника, а основания высот, проведённых из вершин острых углов, — на продолжениях сторон.

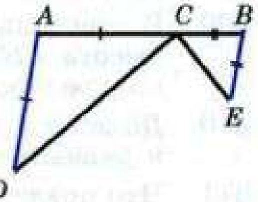


Рис. 145

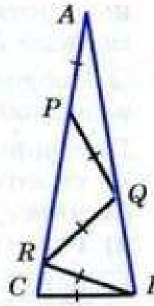


Рис. 146

301 Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2. Докажите, что:
а) если $HM_1 = HM_2$, то $AM_1 = AM_2$;
б) если $HM_1 < HM_2$, то $AM_1 < AM_2$.

302 Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2. Докажите, что:
а) если $AM_1 = AM_2$, то $HM_1 = HM_2$;
б) если $AM_1 < AM_2$, то $HM_1 < HM_2$.

303* Докажите, что в треугольнике ABC медиана AM меньше полусуммы сторон AB и AC.

304* Докажите, что если точка M лежит внутри треугольника ABC, то $MB + MC < AB + AC$.

305 Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин меньше периметра треугольника.

306 Докажите, что если $AB = AC + CB$, то точки A, B и C лежат на одной прямой.

307 В прямоугольном треугольнике проведена высота из вершины прямого угла. Докажите, что данный треугольник и два образовавшихся треугольника имеют соответственно равные углы.

308 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC, равным 37 см, внешний угол при вершине B равен 60°. Найдите расстояние от вершины C до прямой AB.

309 В треугольнике с неравными сторонами AB и AC проведены высота AH и биссектриса AD. Докажите, что угол HAD равен полуразности углов B и C.

310 Докажите, что в равных треугольниках высоты, проведённые к равным сторонам, равны.

311 Что представляет собой множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от двух данных пересекающихся прямых?

312 Отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Докажите, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.

313* ❑ Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

314 Постройте прямоугольный треугольник по:
а) гипотенузе и острому углу;
б) катету и противолежащему углу;
в) гипотенузе и катету.

315 С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) 30°; б) 60°; в) 15°; г) 120°; д) 150°; е) 135°; ж) 165°; з) 75°; и) 105°.

316* ☐ Постройте треугольник по стороне, высоте, проведённой к ней, и медиане, проведённой к одной из двух других сторон.

317 ☐ Дан треугольник ABC. Постройте отрезок DE, параллельный прямой AC, так, чтобы точки D и E лежали на сторонах AB и BC и $DE = AD + CE$.

318 Дан равносторонний треугольник ABC и точка B_1 на стороне AC. На сторонах BC и AB постройте точки A_1 и C_1 так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был равносторонним.

319* Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведённым из вершины этого угла.

320* Постройте треугольник по стороне, высоте и медиане, проведённым к этой стороне.

321* Дан треугольник ABC с прямым углом A. На стороне AB постройте точку M, находящуюся на расстоянии AM от прямой BC.

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе I

322 Пусть a — число, выражающее длину отрезка AB при единице измерения CD, а b — число, выражающее длину отрезка CD при единице измерения AB. Как связаны между собой числа a и b?

323 Длина отрезка AB при единице измерения E_1F_1 выражается числом m, а при единице измерения E_2F_2 — числом n. Каким числом выражается длина отрезка E_1F_1 при единице измерения E_2F_2?

324 Пусть $\angle hk$ — меньший из двух смежных углов hk и hl. Докажите, что

$$\angle hk = 90° - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk),$$

$$\angle hl = 90° + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk).$$

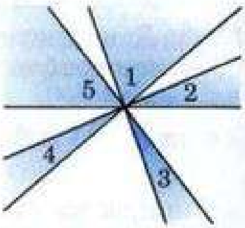


Рис. 147

325 ❑ Пять прямых пересекаются в одной точке (рис. 147). Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4 и 5.

326 Даны шесть попарно пересекающихся прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух прямых проходит по крайней мере ещё одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

327 Даны шесть точек. Известно, что прямая, проходящая через любые две точки, содержит по крайней мере ещё одну из данных точек. Докажите, что все эти точки лежат на одной прямой.

Задачи к главе II

328 Точки C_1 и C_2 лежат по разные стороны от прямой AB и расположены так, что $AC_1 = BC_2$ и $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$. Докажите, что прямая C_1C_2 проходит через середину отрезка AB.

329 Докажите, что если угол, прилежащая к нему сторона и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны.

330 Сторона и два угла одного треугольника равны какой-то стороне и каким-то двум углам другого. Могут ли эти треугольники быть неравными?

331 Две стороны и угол одного треугольника равны каким-то двум сторонам и углу другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

332 Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что $OC = OD$, если $AC = AO = BO = BD$.

Задачи к главам III и IV

333 Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O. Найдите угол BOC, если угол A равен α.

334 Через каждую вершину данного треугольника проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе треугольника, исходящей из этой вершины. Отрезки этих прямых вместе со сторонами данного треугольника образуют три треугольника. Докажите, что углы этих треугольников соответственно равны.

335 В каждом из следующих случаев определите вид треугольника:
а) сумма любых двух углов больше $90°$;
б) каждый угол меньше суммы двух других углов.

336 Докажите, что угол треугольника является острым, прямым или тупым, если медиана, проведённая из вершины этого угла, соответственно больше, равна или меньше половины противоположной стороны.

337 Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята такая точка M, что $\angle MBC = 30°$, $\angle MCB = 10°$. Найдите угол AMC, если $\angle BAC = 80°$.

338 Докажите, что любой отрезок с концами на разных сторонах треугольника не больше наибольшей из сторон треугольника.

339 Отрезок BB_1 — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BA > B_1A$ и $BC > B_1C$.

340 Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $AD = AB$. Докажите, что $AC > AB$.

341 В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC, отрезок AD — биссектриса. Докажите, что $\angle ADB > \angle ADC$ и $BD > CD$.

342 Докажите теорему: если в треугольнике биссектриса является медианой, то треугольник равнобедренный.

343 Две стороны треугольника не равны друг другу. Докажите, что медиана, проведённая из их общей вершины, составляет с меньшей из сторон больший угол.

344 В треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, отрезок AM соединяет вершину A с произвольной точкой M стороны BC. Докажите, что треугольники AMB и AMC не равны друг другу.

345 Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, а из вершины B проведён перпендикуляр BH к этой прямой. Докажите, что

периметр треугольника BCH больше периметра треугольника ABC.

346 В треугольнике ABC, где $AB < AC$, отрезок AD — биссектриса, отрезок AH — высота. Докажите, что точка H лежит на луче DB.

347 Докажите, что в неравнобедренном треугольнике основание биссектрисы треугольника лежит между основаниями медианы и высоты, проведённых из этой же вершины.

348 Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведёнными из той же вершины, пополам.

349 Медиана и высота треугольника, проведённые из одной вершины угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Докажите, что треугольник прямоугольный.

350 В треугольнике ABC высота AA_1 не меньше стороны BC, а высота BB_1 не меньше стороны AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный и прямоугольный.

Задачи на построение

Рассмотрим схему, по которой обычно решают задачи на построение циркулем и линейкой. Она состоит из четырёх частей:

1) Отыскание способа решения задачи путём установления связей между искомыми элементами и данными задачи. Эта часть называется **анализом** задачи. Анализ даёт возможность составить план решения задачи на построение.

2) Выполнение **построения** по намеченному плану.

3) **Доказательство** того, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

4) **Исследование** задачи, т. е. выяснение вопроса о том, при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений. В тех случаях, когда задача достаточно простая, отдельные части, например анализ или исследование, опускаются. Так мы поступали при решении простейших задач на построение. Рассмотрим теперь более сложные задачи.

351 Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к третьей стороне.

Решение

Даны три отрезка M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (рис. 148, *а*). Требуется построить такой треугольник ABC, у которого две стороны, скажем AB и AC, равны соответственно данным отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а высота AH равна отрезку M_3N_3. Проведём решение задачи по описанной схеме.

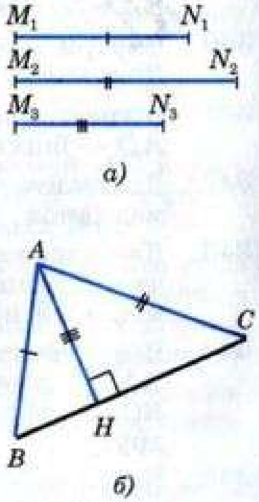


Рис. 148

Анализ

Допустим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 148, *б*). Мы видим, что сторона AB и высота AH являются гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника ABH. Поэтому построение треугольника ABC можно провести по такому плану: сначала построить прямоугольный треугольник ABH, а затем достроить его до всего треугольника ABC.

Построение

Строим прямоугольный треугольник ABH, у которого гипотенуза AB равна отрезку M_1N_1, а катет AH равен данному отрезку M_3N_3. Как это сделать, мы знаем (задача **314**, *в*). На рисунке 149, *а* изображён построенный треугольник ABH. Затем проводим окружность радиуса M_2N_2 с центром в точке A. Одну из точек пересечения этой окружности с прямой BH обозначим буквой C. Проведя отрезки BC и AC, получим искомый треугольник ABC (рис. 149, *б*).

Доказательство

Треугольник ABC действительно искомый, так как по построению сторона AB равна M_1N_1, сторона AC равна M_2N_2, а высота AH равна M_3N_3, т. е. треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование

Нетрудно сообразить, что задача имеет решение не при любых данных отрезках M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3. В самом деле, если хотя бы один из отрезков M_1N_1 и M_2N_2 меньше M_3N_3, то задача не имеет решения, так как наклонные AB и AC не могут быть меньше перпендикуляра AH. Задача не имеет

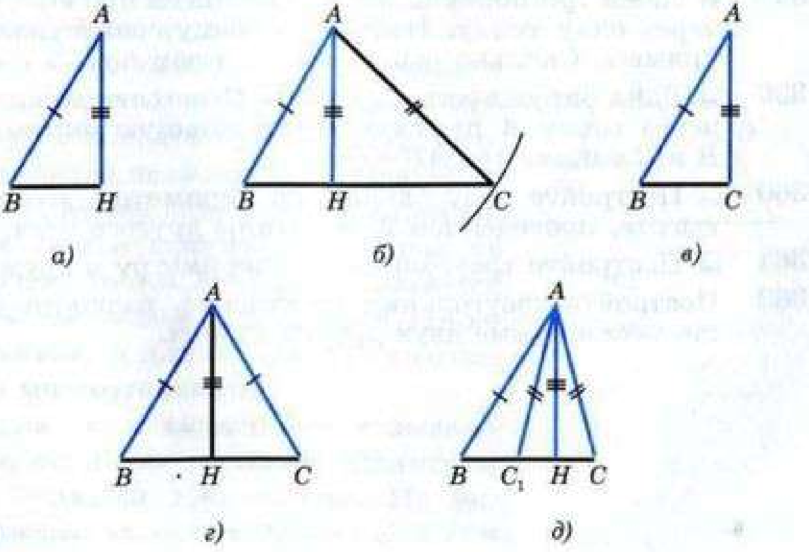


Рис. 149

решения и в том случае, когда $M_1N_1 = M_2N_2 = M_3N_3$ (объясните почему). В остальных случаях задача имеет решение. Если $M_1N_1 > M_3N_3$, а $M_2N_2 = M_3N_3$, то задача имеет единственное решение: в этом случае сторона AC совпадает с высотой AH и искомый треугольник является прямоугольным (рис. 149, *в*). Если $M_1N_1 > M_3N_3$, а $M_2N_2 = M_1N_1$, то задача также имеет единственное решение: в этом случае треугольник ABC равнобедренный (рис. 149, *г*). И наконец, если $M_1N_1 > M_3N_3$, $M_2N_2 > M_3N_3$ и $M_1N_1 \neq M_2N_2$, то задача имеет два решения — треугольники ABC и ABC_1 на рисунке 149, *д*.

352 Даны две точки A и B и прямая a, не проходящая через эти точки. На прямой a постройте точку, равноудалённую от точек A и B. Всегда ли задача имеет решение?

353 ❑ Постройте точку, лежащую на данной окружности и равноудалённую от концов данного отрезка. Сколько решений может иметь задача?

354 ❑ Через три данные точки проведите окружность. Всегда ли задача имеет решение?

355 ❑ Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. Постройте точку M прямой a так, чтобы сумма $AM + MB$ имела наименьшее значение, т. е. была бы меньше суммы $AX + XB$, где X — любая точка прямой a, отличная от M.

356 ❑ Постройте прямоугольный треугольник ABC, если даны острый угол B и биссектриса BD.

357 ❑ На данной окружности постройте точку, равноудалённую от двух данных пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

358 ❑ Даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Постройте точку, равноудалённую от этих прямых. Сколько решений имеет задача?

359 ❑ Дана окружность с центром O и точка A вне её. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что $AB = BC$.

360 ❑ Постройте треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведённой из вершины другого угла.

361 ❑ Постройте треугольник по периметру и двум углам.

362 Постройте треугольник по стороне, разности углов при этой стороне и сумме двух других сторон.

Глава V

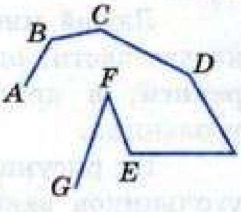
Четырёхугольники

До сих пор в центре нашего внимания был самый простой из многоугольников — треугольник. В этой главе будем изучать более сложные многоугольники, в основном различные виды четырёхугольников: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Кроме того, в этой главе речь пойдёт о симметрии геометрических фигур, в том числе указанных четырёхугольников. Симметрия играет важную роль не только в геометрии, но и искусстве, архитектуре, технике. В окружающей обстановке мы видим немало симметричных предметов — фасады зданий, узоры на коврах и тканях, листья деревьев.

§1 Многоугольники

40 Многоугольник

Рассмотрим фигуру, составленную из отрезков AB, BC, CD, ..., EF, FG так, что **смежные отрезки** (т. е. отрезки AB и BC, BC и CD, ..., EF и FG) не лежат на одной прямой. Такая фигура называется **ломаной** $ABCD...FG$ (рис. 150, *а*). Отрезки, из которых составлена ломаная, называются её **звеньями**, а концы этих отрезков — **вершинами ломаной**. Сумма длин всех звеньев называется **длиной ломаной**. Концы ломаной $ABCD$ ... FG, т. е. точки A и G, могут быть различными, а могут совпадать (рис. 150, *б*). В последнем случае ломаная называется **замкнутой**, и её звенья FG и AB также считаются смежными. Если несмежные звенья замкнутой ломаной не имеют общих точек, то эта ломаная называется **многоугольником**, её звенья называются **сторонами многоугольника**, а длина ломаной называется **периметром многоугольника**.



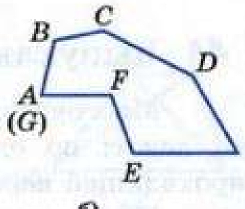


Рис. 150

Многоугольник с n вершинами называется **n-угольником**; он имеет n сторон. Примером многоугольника является треугольник. На рисунке 151 изображены четырёхугольник $ABCD$ и

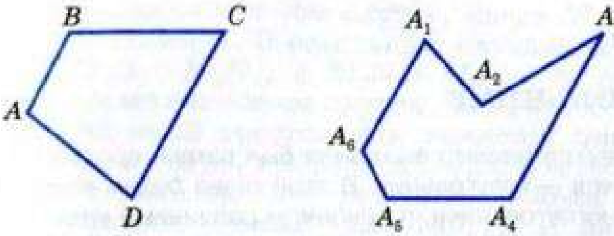


Рис. 151

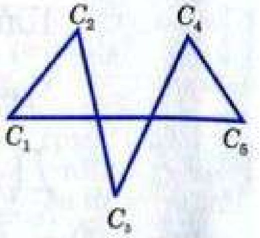


Рис. 152

шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Фигура, изображённая на рисунке 152, не является многоугольником, так как несмежные отрезки C_1C_5 и C_2C_3 (а также C_3C_4 и C_1C_5) имеют общую точку.

Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются **соседними**. Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется **диагональю** многоугольника.

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется **внутренней**, а другая — **внешней областью** многоугольника.

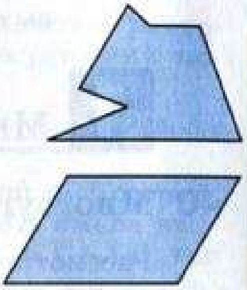


Рис. 153

На рисунке 153 внутренние области многоугольников закрашены. Фигуру, состоящую из сторон многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.

41 Выпуклый многоугольник

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

На рисунке 154 многоугольник F_1 является выпуклым, а многоугольник F_2 — невыпуклым.

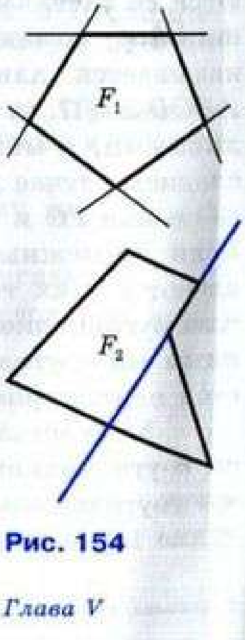


Рис. 154

Рассмотрим выпуклый n-угольник, изображённый на рисунке 155, *а*. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ называются **углами** этого многоугольника. Найдём их сумму.

Для этого соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате получим $n-2$ треугольника (рис. 155, *б*), сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ равна $(n-2) \cdot 180°$.

Итак, сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$.

Внешним углом выпуклого многоугольника называется угол, смежный с углом многоугольника. Если при каждой вершине выпуклого многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ взять по одному внешнему углу, то сумма этих внешних углов окажется равной

$$180° - A_1 + 180° - A_2 + \dots + 180° - A_n =$$
$$= n \cdot 180° - (A_1 + A_2 + \dots + A_n) =$$
$$= n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 360°.$$

Таким образом, **сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°.**

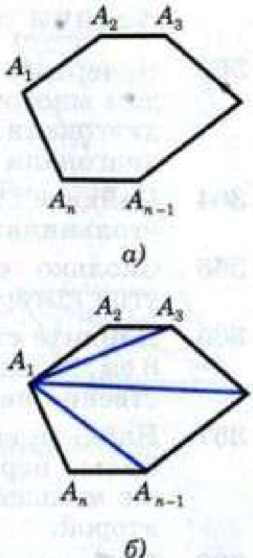


Рис. 155

42 Четырёхугольник

Каждый четырёхугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали (рис. 156). Две несмежные стороны четырёхугольника называются **противоположными.** Две вершины, не являющиеся соседними, также называются **противоположными.**

Четырёхугольники бывают выпуклые и невыпуклые. На рисунке 156, *а* изображён выпуклый четырёхугольник, а на рисунке 156, *б* — невыпуклый.

Каждая диагональ выпуклого четырёхугольника разделяет его на два треугольника. Одна из диагоналей невыпуклого четырёхугольника также разделяет его на два треугольника (см. рис. 156, *б*).

Так как сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$, то **сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.**

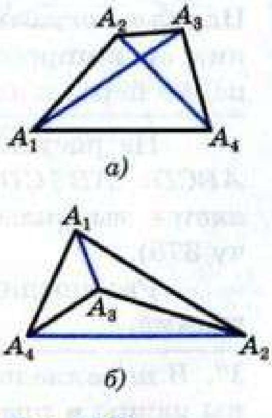


Рис. 156

Задачи

363 Начертите выпуклые пятиугольник и шестиугольник. В каждом многоугольнике из какой-нибудь вершины проведите все диагонали. На сколько треугольников разделяют проведённые диагонали каждый многоугольник?

364 Найдите сумму углов выпуклого: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) десятиугольника.

365 Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен: а) 90°; б) 60°; в) 120°; г) 108°?

366 Найдите стороны четырёхугольника, если его периметр равен 8 см, а одна сторона больше каждой из других сторон соответственно на 3 мм, 4 мм и 5 мм.

367 Найдите стороны четырёхугольника, если его периметр равен 66 см, первая сторона больше второй на 8 см и на столько же меньше третьей стороны, а четвёртая — в три раза больше второй.

368 Найдите углы выпуклого четырёхугольника, если они равны друг другу.

369 Найдите углы A, B и C выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B = \angle C$, а $\angle D = 135°$.

370 Найдите углы выпуклого четырёхугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5.

§2 Параллелограмм и трапеция

43 Параллелограмм

Определение

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

На рисунке 157 изображён параллелограмм $ABCD$: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Параллелограмм является выпуклым четырёхугольником (см. задачу **378**).

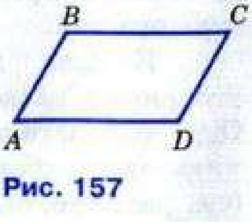


Рис. 157

Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

1°. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 158). Диагональ AC разделяет его на два треугольника: ABC и ADC. Эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам (AC — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении секущей AC параллельных прямых AB и CD, AD и BC соответственно). Поэтому

$$AB = CD,\ AD = BC \text{ и } \angle B = \angle D.$$

Далее, пользуясь равенствами углов 1 и 2, 3 и 4, получаем

$$\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C.$$

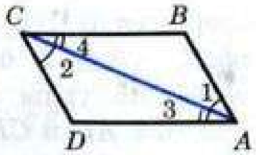


Рис. 158

2°. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

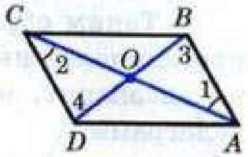


Рис. 159

Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 159). Треугольники AOB и COD равны по стороне и двум прилежащим углам ($AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и BD соответственно). Поэтому $AO = OC$ и $OB = OD$, что и требовалось доказать.

Рисунок 160 иллюстрирует все рассмотренные свойства.

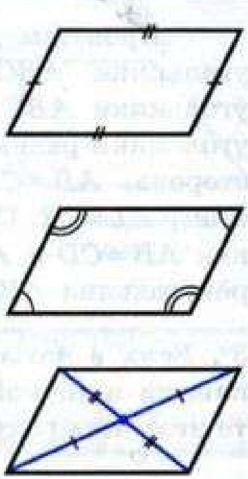

Свойства параллелограмма

Рис. 160

44 Признаки параллелограмма

Рассмотрим три признака параллелограмма.

1°. Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = CD$ (см. рис. 158).

Проведём диагональ AC, разделяющую данный четырёхугольник на два треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними (AC — общая сторона, $AB = CD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Но углы 3 и 4 накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC, следовательно, $AD \parallel BC$.

Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, а значит, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

2°. Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Проведём диагональ AC данного четырёхугольника $ABCD$, разделяющую его на треугольники ABC и CDA (см. рис. 158). Эти треугольники равны по трём сторонам (AC — общая сторона, $AB = CD$ и $BC = DA$ по условию), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что $AB \parallel CD$. Так как $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то по признаку 1° четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

3°. Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам (см. рис. 159). Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников ($AO = OC$, $BO = OD$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные углы), поэтому $AB = CD$ и $\angle 1 = \angle 2$. Из равенства углов 1 и 2 следует, что $AB \parallel CD$.

Итак, в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны, значит, по признаку 1° четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

45 Трапеция

Рис. 161

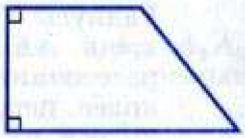
Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются её **основаниями**, а две другие стороны — **боковыми сторонами** (рис. 161).

Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны (рис. 162, *а*).

Трапеция, один из углов которой прямой, называется **прямоугольной** (рис. 162, *б*).

Равнобедренная трапеция

а)



Прямоугольная трапеция

б)

Рис. 162

Задачи

371 ☐ Докажите, что выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: а) $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle DAC$; б) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$.

372 Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если:
а) одна сторона на 3 см больше другой;
б) разность двух сторон равна 7 см;
в) одна из сторон в два раза больше другой.

373 Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 50 см, $\angle C = 30°$, а перпендикуляр BH к прямой CD равен 6,5 см. Найдите стороны параллелограмма.

374 Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр этого параллелограмма, если $BK = 15$ см, $KC = 9$ см.

375 Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 14 см.

376 Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если:
а) $\angle A = 84°$; б) $\angle A - \angle B = 55°$; в) $\angle A + \angle C = 142°$; г) $\angle A = 2\angle B$;
д) $\angle CAD = 16°$, $\angle ACD = 37°$.

377 В параллелограмме $MNPQ$ проведён перпендикуляр NH к прямой MQ, причём точка H лежит на стороне MQ. Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что $MH = 3$ см, $HQ = 5$ см, $\angle MNH = 30°$.

378 Докажите, что параллелограмм является выпуклым четырёхугольником.

Решение

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 157) и докажем, что он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. Возьмём, например, прямую AB. Отрезок CD не имеет общих точек с прямой AB, так как $AB \parallel CD$. Значит, этот отрезок лежит по одну сторону от прямой AB. Но тогда и отрезки BC и AD лежат по ту же сторону от прямой AB. Таким образом, параллелограмм $ABCD$ лежит по одну сторону от прямой AB.

379 Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$, у которого $AB \neq BC$ и угол A острый, проведены перпендикуляры BK и DM к прямой AC. Докажите, что четырёхугольник $BMDK$ — параллелограмм.

380 На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что $AM = CP$, $BN = DQ$, $BM = DP$, $NC = QA$. Докажите, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

381 На рисунке 163 изображены два одинаковых колеса тепловоза. Радиусы O_1A и O_2B равны. Стержень AB, длина которого равна расстоянию O_1O_2 между центрами колёс, передаёт движение от одного колеса к другому. Докажите, что отрезки AB и O_1O_2 либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

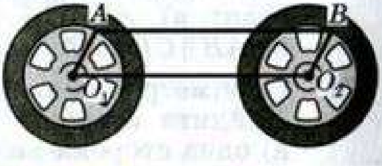


Рис. 163

382 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины отрезков OA, OB, OC и OD, — параллелограмм.

383 На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены две точки P и Q так, что $PB = QD$. Докажите, что четырёхугольник $APCQ$ — параллелограмм.

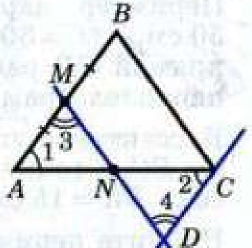


Рис. 164

384 Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC. Эта прямая пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что $AN = NC$.

Решение

Через точку C проведём прямую, параллельную прямой AB, и обозначим буквой D точку пересечения этой прямой с прямой MN (рис. 164). Так как $AM = MB$ по условию, а $MB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма $BCDM$, то $AM = DC$. Треугольники AMN и CDN равны по второму при-

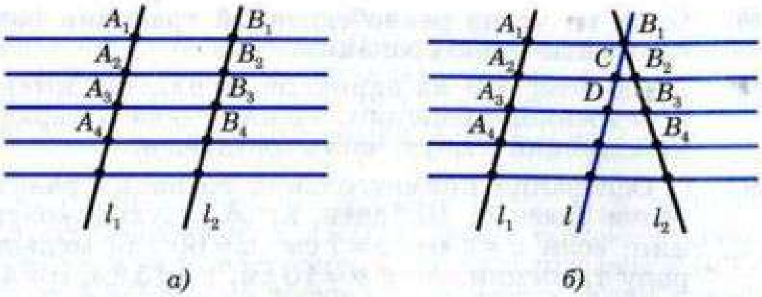


Рис. 165

знаку равенства треугольников ($AM = CD$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и MD), поэтому $AN = NC$.

385 Докажите **теорему Фалеса**[1]: если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

Решение

Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 165). Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу. Докажем, например, что $B_1B_2 = B_2B_3$.

Рассмотрим сначала случай, когда прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 165, *а*). Тогда $A_1A_2 = B_1B_2$ и $A_2A_3 = B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то и $B_1B_2 = B_2B_3$. Если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то через точку B_1 проведём прямую l, параллельную прямой l_1 (рис. 165, *б*). Она пересечёт прямые A_2B_2 и A_3B_3 в некоторых точках C и D. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то по доказанному $B_1C = CD$. Отсюда получаем: $B_1B_2 = B_2B_3$ (задача **384**). Аналогично можно доказать, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д.

386 Докажите, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям трапеции.

387 Найдите углы B и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $\angle A = 36°$, $\angle C = 117°$.

388 Докажите, что в равнобедренной трапеции: а) углы при каждом основании равны; б) диагонали равны.

389 Докажите, что трапеция равнобедренная, если: а) углы при основании равны; б) диагонали трапеции равны.

---

[1] Фалес Милетский — древнегреческий учёный (ок. 625—547 гг. до н. э.).

390 Один из углов равнобедренной трапеции равен 68°. Найдите остальные углы трапеции.

391 Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренной трапеции, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

392 ☐ Основания прямоугольной трапеции равны a и b, один из углов равен α. Найдите: а) бо́льшую боковую сторону трапеции, если $a = 4$ см, $b = 7$ см, $\alpha = 60°$; б) меньшую боковую сторону трапеции, если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $\alpha = 45°$.

393 ☐ Постройте параллелограмм: а) по двум смежным сторонам и углу между ними; б) по двум диагоналям и углу между ними; в) по двум смежным сторонам и соединяющей их концы диагонали.

Решение

в) Даны три отрезка M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (рис. 166, *а*). Требуется построить параллелограмм $ABCD$, у которого смежные стороны, скажем AB и AD, равны соответственно отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а диагональ BD равна отрезку M_3N_3. Проведём решение задачи по схеме, описанной на с. 94.

Анализ

Допустим, что искомый параллелограмм $ABCD$ построен (рис. 166, *б*). Мы видим, что стороны треугольника ABD равны данным отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3. Это обстоятельство подсказывает следующий путь решения задачи: сначала нужно построить по трём сторонам треугольник ABD, а затем достроить его до параллелограмма $ABCD$.

Построение

Строим треугольник ABD так, чтобы его стороны AB, AD и BD равнялись соответственно отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 (как это сделать, мы знаем из курса 7 класса). Затем построим прямую, проходящую через точку B параллельно AD, и вторую прямую, проходящую через точку D параллельно AB (как это сделать, мы также знаем из курса 7 класса). Точку пересечения этих прямых обозначим буквой C (рис. 166, *в*). Четырёхугольник $ABCD$ и есть искомый параллелограмм.

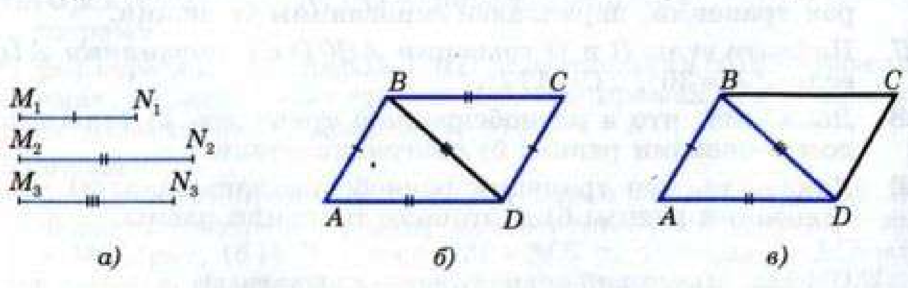


Рис. 166

Доказательство
По построению $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, поэтому $ABCD$ — параллелограмм. Смежные стороны параллелограмма $ABCD$ по построению равны отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а диагональ BD равна отрезку M_3N_3, т. е. параллелограмм $ABCD$ — искомый.

Исследование
Ясно, что если по трём данным отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 можно построить треугольник ABD, стороны которого равны этим отрезкам, то можно построить и параллелограмм $ABCD$. Но треугольник ABD можно построить не всегда. Если какой-то из трёх данных отрезков больше или равен сумме двух других, то треугольник ABD, а значит, и параллелограмм $ABCD$ построить нельзя. Попробуйте самостоятельно доказать, что если задача имеет решение, то это решение единственно (см. п. 39).

394 Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм так, чтобы три его вершины совпадали с данными точками. Сколько таких параллелограммов можно построить?

395 Даны острый угол hk и два отрезка P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы расстояние между параллельными прямыми AB и DC равнялось P_1Q_1, $AB = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle hk$.

396 Разделите данный отрезок AB на n равных частей.

Решение
Проведём луч AX, не лежащий на прямой AB, и на нём от точки A отложим последовательно n равных отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ (рис. 167), т. е. столько равных отрезков, на сколько равных частей нужно разделить данный отрезок AB (на рисунке 167 $n = 5$). Проведём прямую A_nB (точка A_n — конец последнего отрезка) и построим прямые, проходящие через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} и параллельные прямой A_nB. Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, ..., B_{n-1}, которые по теореме Фалеса (задача **385**) делят отрезок AB на n равных частей.

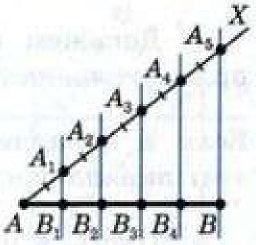


Рис. 167

397 Постройте равнобедренную трапецию $ABCD$:
а) по основанию AD, углу A и боковой стороне AB;
б) по основанию BC, боковой стороне AB и диагонали BD.

398 Постройте прямоугольную трапецию $ABCD$ по основаниям и боковой стороне AD, перпендикулярной к основаниям.

§3 Прямоугольник, ромб, квадрат

46 Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые. Так как прямоугольник является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма: в прямоугольнике противоположные стороны равны, а диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Рассмотрим особое свойство прямоугольника.

Диагонали прямоугольника равны.

Действительно, обратимся к рисунку 168, на котором изображён прямоугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Прямоугольные треугольники ACD и DBA равны по двум катетам ($CD = BA$, AD — общий катет). Отсюда следует, что гипотенузы этих треугольников равны, т. е. $AC = BD$, что и требовалось доказать.

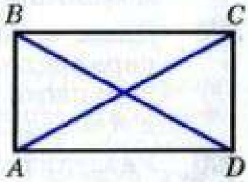


Рис. 168

Докажем обратное утверждение (признак прямоугольника).

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD равны (см. рис. 168). Треугольники ABD и DCA равны по трём сторонам ($AB = DC$, $BD = CA$, AD — общая сторона). Отсюда следует, что $\angle A = \angle D$. Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. Таким образом, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. Параллелограмм — выпуклый четырёхугольник, поэтому $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, т. е. параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником.

47 Ромб и квадрат

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Наряду с ними ромб обладает особым свойством. Рассмотрим его.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

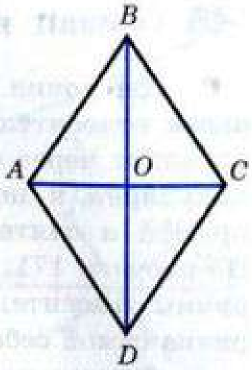


Рис. 169

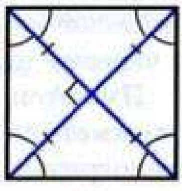
Рассмотрим ромб $ABCD$ (рис. 169). Требуется доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и каждая диагональ делит соответствующие углы ромба пополам. Докажем, например, что $\angle BAC = \angle DAC$.

По определению ромба все его стороны равны, в частности $AB = AD$, поэтому треугольник BAD равнобедренный. Так как ромб является параллелограммом, то его диагонали точкой O пересечения делятся пополам. Следовательно, отрезок AO — медиана равнобедренного треугольника BAD, проведённая к основанию, а значит, высота и биссектриса этого треугольника. Поэтому $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$, что и требовалось доказать.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Прямоугольник является параллелограммом, поэтому и квадрат является параллелограммом, у которого все стороны равны, т. е. ромбом. Отсюда следует, что квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба. Сформулируем основные свойства квадрата.

а)



б)

Свойства квадрата

Рис. 170

1. Все углы квадрата прямые (рис. 170, *а*).
2. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам (рис. 170, *б*).

48 Осевая и центральная симметрии

Две точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой a**, если эта прямая проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему (рис. 171, *а*). Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе. На рисунке 171, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно прямой b, а точка P симметрична самой себе относительно этой прямой.

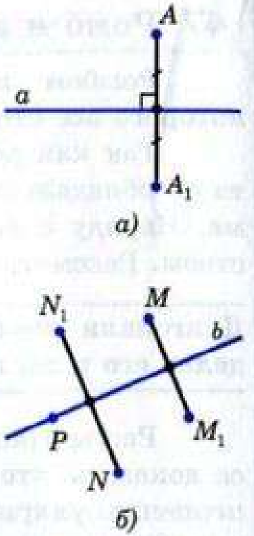


Рис. 171

Фигура называется симметричной относительно прямой a, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой a также принадлежит этой фигуре. Прямая a называется **осью симметрии фигуры**. Говорят также, что фигура обладает осевой симметрией.

Приведём примеры фигур, обладающих осевой симметрией (рис. 172). У неразвёрнутого угла одна ось симметрии — прямая, на которой расположена биссектриса угла. Равнобедренный (но не равносторонний) треугольник имеет также одну ось симметрии, а равносторонний треугольник — три оси симметрии. Прямоугольник и ромб, не являющиеся квадратами, имеют по две оси симметрии, а квадрат — четыре оси симметрии. У окружности их бесконечно много — любая прямая, проходящая через её центр, является осью симметрии.

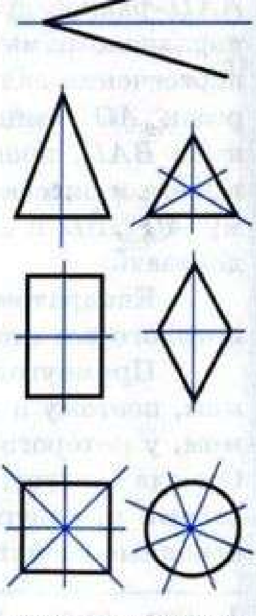

Фигуры, обладающие осевой симметрией

Рис. 172

Имеются фигуры, у которых нет ни одной оси симметрии. К таким фигурам относятся параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба, разносторонний треугольник.

Две точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки O**, если O — середина отрезка AA_1 (рис. 173, *а*). Точка O считается симметричной самой себе. На рисунке 173, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно точки O, а точки P и Q не симметричны относительно этой точки.

Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигу-

ры **симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре.** Точка O называется **центром симметрии фигуры.** Говорят также, что фигура обладает центральной симметрией.

Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, являются окружность и параллелограмм (рис. 174). Центром симметрии окружности является центр окружности, а центром симметрии параллелограмма — точка пересечения его диагоналей. Прямая также обладает центральной симметрией, однако в отличие от окружности и параллелограмма, которые имеют только один центр симметрии (точка O на рисунке 174), у прямой их бесконечно много — любая точка прямой является её центром симметрии. Примером фигуры, не имеющей центра симметрии, является произвольный треугольник.

Изображения на плоскости многих предметов окружающего нас мира имеют ось симметрии или центр симметрии. Многие листья деревьев и лепестки цветов симметричны относительно среднего стебля (рис. 175).

С симметрией мы часто встречаемся в искусстве, архитектуре, технике, быту. Так, фасады многих зданий обладают осевой симметрией (рис. 176). В большинстве случаев симметричны относительно оси или центра узоры на коврах, тканях, комнатных обоях. Симметричны многие детали механизмов, например зубчатые колёса.

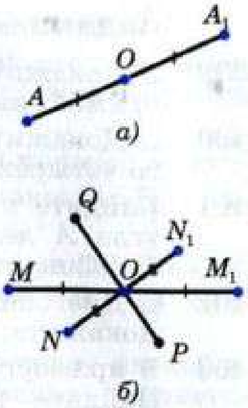
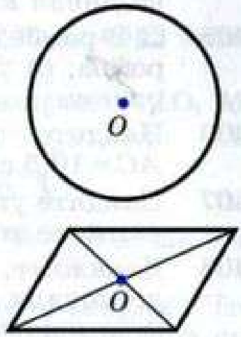


Рис. 173



Фигуры, обладающие центральной симметрией

Рис. 174

Рис. 175

Рис. 176

Задачи

399 ☐ Докажите, что параллелограмм, один из углов которого прямой, является прямоугольником.

400 ☐ Докажите, что если в четырёхугольнике все углы прямые, то четырёхугольник — прямоугольник.

401 Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектриса угла A делит сторону: а) BC на отрезки 45,6 см и 7,85 см; б) DC на отрезки 2,7 дм и 4,5 дм.

402 ☐ Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и AOB равнобедренные.

403 В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AOB, если $\angle CAD = 30°$, $AC = 12$ см.

404 ☐ Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

405 ☐ В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите: а) углы ромба; б) углы, которые диагонали ромба образуют с его сторонами.

406 Найдите периметр ромба $ABCD$, в котором $\angle B = 60°$, $AC = 10{,}5$ см.

407 Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, если один из углов ромба равен 45°.

408 Докажите, что параллелограмм является ромбом, если: а) его диагонали взаимно перпендикулярны; б) диагональ делит его угол пополам.

409 ☐ Докажите, что ромб, у которого один угол прямой, является квадратом.

410 ☐ Является ли четырёхугольник квадратом, если его диагонали: а) равны и взаимно перпендикулярны; б) взаимно перпендикулярны и имеют общую середину; в) равны, взаимно перпендикулярны и имеют общую середину?

411 ☐ В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Через точку пересечения этой биссектрисы с гипотенузой проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что полученный четырёхугольник — квадрат.

412 Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, катетом $AC = 12$ см и квадрат $CDEF$, такой, что две его стороны лежат на катетах, а вершина E — на гипотенузе треугольника. Найдите периметр квадрата.

413 ☐ Постройте прямоугольник: а) по двум смежным сторонам; б) по стороне и диагонали; в) по диагонали и углу между диагоналями.

414 ☐ Постройте ромб: а) по двум диагоналям; б) по стороне и углу.

415 ☐ Постройте квадрат: а) по стороне; б) по диагонали.

416 ☐ Даны две точки A и B, симметричные относительно некоторой прямой, и точка M. Постройте точку, симметричную точке M относительно той же прямой.

417 Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) прямая; в) луч?

418 Какие из следующих букв имеют ось симметрии: **А, Б, Г, Е, О, F**?

419 ☐ Докажите, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

420 ☐ Докажите, что прямая, содержащая биссектрису равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии треугольника.

421 ☐ Даны точки A, B и M. Постройте точку, симметричную точке M относительно середины отрезка AB.

422 Имеют ли центр симметрии: а) отрезок; б) луч; в) пара пересекающихся прямых; г) квадрат?

423 Какие из следующих букв имеют центр симметрии: **А, О, М, Х, К**?

Вопросы для повторения к главе V

1 Объясните, какая фигура называется ломаной. Что такое звенья, вершины и длина ломаной?

2 Объясните, какая ломаная называется многоугольником. Что такое вершины, стороны, периметр и диагонали многоугольника?

3 Какой многоугольник называется выпуклым? Объясните, какие углы называются углами выпуклого многоугольника.

4 Выведите формулу для вычисления суммы углов выпуклого n-угольника.

5 Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

6 Начертите четырёхугольник и покажите его диагонали, противоположные стороны и противоположные вершины.

7 Чему равна сумма углов выпуклого четырёхугольника?

8 Дайте определение параллелограмма. Является ли параллелограмм выпуклым четырёхугольником?

9 Докажите, что в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

10 Докажите, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

11 Сформулируйте и докажите утверждения о признаках параллелограмма.

12 Какой четырёхугольник называется трапецией? Как называются стороны трапеции?

13 Какая трапеция называется равнобедренной? прямоугольной?

14 Какой четырёхугольник называется прямоугольником? Докажите, что диагонали прямоугольника равны.

15 Докажите, что если в параллелограмме диагонали равны, то параллелограмм является прямоугольником.

16 Какой четырёхугольник называется ромбом? Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

17 Какой четырёхугольник называется квадратом? Перечислите основные свойства квадрата.

18 Какие две точки называются симметричными относительно данной прямой?

19 Какая фигура называется симметричной относительно данной прямой?

20 Какие две точки называются симметричными относительно данной точки?

21 Какая фигура называется симметричной относительно данной точки?

22 Приведите примеры фигур, обладающих: а) осевой симметрией; б) центральной симметрией; в) и осевой, и центральной симметрией.

Дополнительные задачи

424 Докажите, что если не все углы выпуклого четырёхугольника равны друг другу, то хотя бы один из них тупой.

425 Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 46 см, $AB = 14$ см. Какую сторону параллелограмма пересекает биссектриса угла A? Найдите отрезки, которые образуются при этом пересечении.

426 Стороны параллелограмма равны 10 см и 3 см. Биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три отрезка. Найдите эти отрезки.

427 Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Докажите, что периметр получившегося четырёхугольника равен сумме боковых сторон данного треугольника.

428 В параллелограмме, смежные стороны которого не равны, проведены биссектрисы углов. Докажите, что при их пересечении образуется прямоугольник.

429 Докажите, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом, если сумма углов, прилежащих к каждой из двух смежных сторон, равна 180°.

430 Докажите, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом, если его противоположные углы попарно равны.

431 Точка K — середина медианы AM треугольника ABC. Прямая BK пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AD = \frac{1}{3} AC$.

432 Точки M и N — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AN и MC делят диагональ BD на три равные части.

433 Из вершины B ромба $ABCD$ проведены перпендикуляры BK и BM к прямым AD и DC. Докажите, что луч BD является биссектрисой угла KBM.

434 Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

435 Докажите, что середина отрезка, соединяющего вершину треугольника с любой точкой противоположной стороны, лежит на отрезке с концами в серединах двух других сторон.

436 Диагональ AC квадрата $ABCD$ равна 18,4 см. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой AC, пересекает прямые BC и CD соответственно в точках M и N. Найдите MN.

437 На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $AM = AB$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная к прямой AC и пересекающая BC в точке H. Докажите, что $BH = HM = MC$.

438 В трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием AD диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD, $\angle BAC = \angle CAD$. Найдите AD, если периметр трапеции равен 20 см, а $\angle D = 60°$.

439* ☐ Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

440* ☐ На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

441 Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

442 Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

443 Сколько центров симметрии имеет пара параллельных прямых?

444* ☐ Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии фигуры.

Глава VI

Площадь

Что такое площадь комнаты и как её вычислить, если пол в комнате имеет форму прямоугольника, понятно каждому. В этой главе речь пойдёт об измерении площадей многоугольников и будут выведены формулы, по которым можно вычислить площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции. Эти формулы нужны не только в геометрии, но и в практической деятельности. Кроме того, используя формулы площадей, мы докажем одну из важнейших и самых знаменитых теорем геометрии — теорему Пифагора.

§1 Площадь многоугольника

49 Понятие площади многоугольника

Понятие площади нам известно из повседневного опыта. Каждый понимает смысл слов: площадь комнаты равна шестнадцати квадратным метрам, площадь садового участка — восьми соткам и т. д. В этой главе мы рассмотрим вопрос о площадях многоугольников.

Можно сказать, что площадь многоугольника — это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник. Измерение площадей проводится с помощью выбранной единицы измерения аналогично измерению длин отрезков. За единицу измерения площадей принимают квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков. Так, если за единицу измерения отрезков принят сантиметр, то за единицу измерения площадей принимают квадрат со стороной 1 см. Такой квадрат называется **квадратным сантиметром** и обозначается см^2. Аналогично определяется **квадратный метр** (м^2), **квадратный миллиметр** (мм^2) и т. д.

При выбранной единице измерения площадей площадь каждого многоугольника выражается положительным числом. Это число показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в данном многоугольнике. Рассмотрим примеры. На рисунке 177, *а* изображён прямоугольник, в котором квадратный сантиметр укладывается ровно 6 раз. Это означает, что площадь прямоугольника равна 6 см^2.

В трапеции $ABCD$, изображённой на рисунке 177, *б*, квадратный сантиметр укладывается два раза и остаётся часть трапеции — треугольник CDE, в котором квадратный сантиметр не укладывается целиком. Для измерения площади этого треугольника нужно использовать доли квадратного сантиметра, например квадратный миллиметр. Он составляет 0,01 часть квадратного сантиметра. Это показано на рисунке 177, *в*, где квадратный сантиметр разбит на 100 квадратных миллиметров (этот рисунок, а также рисунок 177, *г* для большей наглядности даны в увеличенном масштабе).

На рисунке 177, *г* видно, что квадратный миллиметр укладывается в треугольнике CDE 14 раз, и остаётся часть этого треугольника (она закрашена на рисунке), в которой квадратный миллиметр не укладывается целиком. Поэтому можно сказать, что площадь трапеции $ABCD$ приближённо равна 2,14 см^2.

Оставшуюся часть треугольника CDE можно измерить с помощью более мелкой доли квадратного сантиметра и получить более точное значение площади трапеции.

Описанный процесс измерения можно продолжить далее, однако на практике он неудобен.

Обычно измеряют лишь некоторые связанные с многоугольником отрезки, а затем вычисляют площадь по определённым формулам.

Вывод этих формул основан на свойствах площадей, которые мы сейчас рассмотрим.

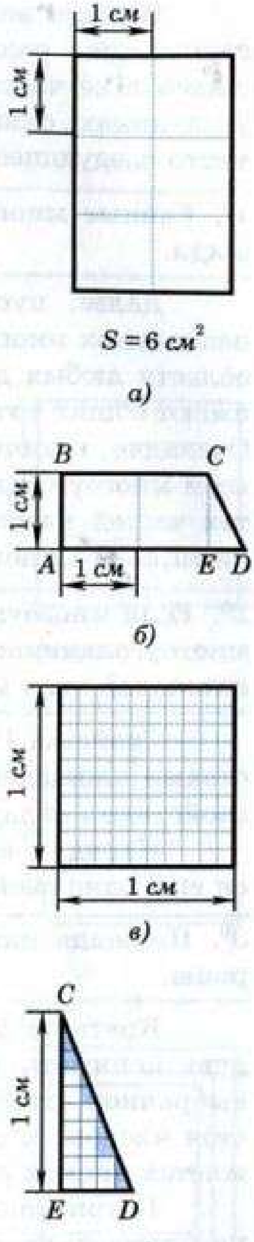


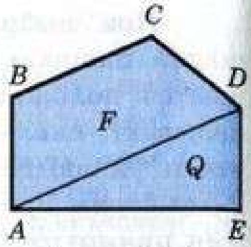
Рис. 177

Прежде всего отметим, что если два многоугольника равны, то единица измерения площадей и её части укладываются в таких многоугольниках одинаковое число раз, т. е. имеет место следующее свойство:

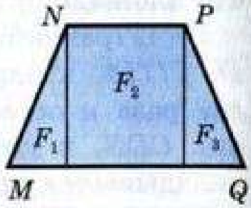
1^0. Равные многоугольники имеют равные площади.

Далее, пусть многоугольник составлен из нескольких многоугольников так, что внутренние области любых двух из этих многоугольников не имеют общих точек, как показано на рисунке 178. Очевидно, величина части плоскости, занимаемой всем многоугольником, является суммой величин тех частей плоскости, которые занимают составляющие его многоугольники. Итак:

2^0. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.



$S_{ABCDE} = S_F + S_Q$



$S_{MNPQ} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

Рис. 178

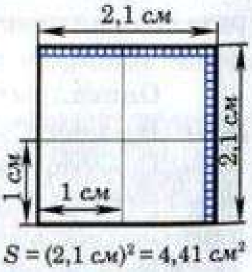
Свойства 1^0 и 2^0 называют **основными свойствами площадей**. Напомним, что аналогичными свойствами обладают длины отрезков.

Наряду с этими свойствами нам понадобится ещё одно свойство площадей.

3^0. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Краткую формулировку этого свойства следует понимать так: если сторона квадрата при выбранной единице измерения отрезков выражается числом a, то площадь этого квадрата выражается числом a^2.

На рисунке 179 изображён квадрат, сторона которого равна 2,1 см. Он состоит из четырёх квадратных сантиметров и сорока одного квадратного миллиметра. Таким образом, площадь квадрата равна 4,41 см^2, что равно квадрату его стороны: $4{,}41 = (2{,}1)^2$. Доказательство утверждения 3^0 приведено в следующем пункте.



$S = (2{,}1\ см)^2 = 4{,}41\ см^2$

Рис. 179

Если площади двух многоугольников равны, то эти многоугольники называются **равновеликими**. Если один многоугольник разрезан на несколько многоугольников и из них составлен другой многоугольник, то такие многоугольники называются **равносоставленными**. Например, прямоугольник со сторонами, равными 2 см и 3 см (см. рис. 177, *а*), равносоставлен с прямоугольником со сторонами, равными 1 см и 6 см. Ясно, что любые два равносоставленных многоугольника равновеликие (см. основные свойства площадей). Оказывается, что верно и обратное утверждение: если два многоугольника равновеликие, то они равносоставленные. Это утверждение называется теоремой Бойяи — Гервина. Венгерский математик Ф. Бойяи доказал эту теорему в 1832 г., а немецкий математик-любитель П. Гервин независимо от Ф. Бойяи доказал её в 1833 г.

50* Площадь квадрата

Докажем, что площадь S квадрата со стороной a равна a^2.

Начнём с того случая, когда $a = \frac{1}{n}$, где n — целое число. Возьмём квадрат со стороной 1 и разобьём его на n^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, *а* (на этом рисунке $n = 5$). Так как площадь большого квадрата равна 1, то площадь каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n^2}$. Сторона каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n}$, т. е. равна a. Итак,

$$S = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = a^2. \qquad (1)$$

Пусть теперь число a представляет собой конечную десятичную дробь, содержащую n знаков после запятой (в частности, число a может быть целым, и тогда $n = 0$). Тогда число $m = a \cdot 10^n$ целое. Разобьём данный квадрат со стороной a на

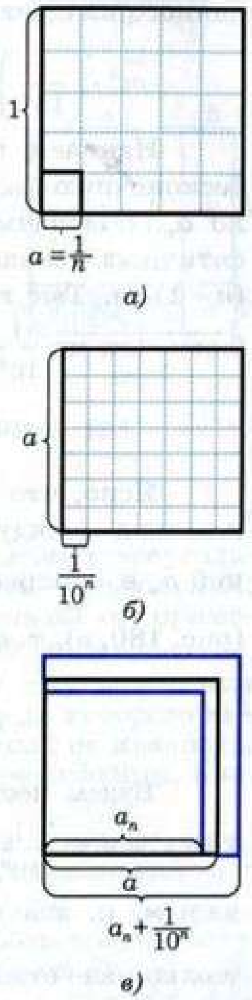


Рис. 180

m^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, *б* (на этом рисунке $m = 7$).

При этом каждая сторона данного квадрата разобьётся на m равных частей, и, значит, сторона любого маленького квадрата равна

$$\frac{a}{m} = \frac{a}{a \cdot 10^n} = \frac{1}{10^n}.$$

По формуле (1) площадь маленького квадрата равна $\left(\frac{1}{10^n}\right)^2$. Следовательно, площадь S данного квадрата равна

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{m}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{a \cdot 10^n}{10^n}\right)^2 = a^2.$$

Наконец, пусть число a представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим число a_n, получаемое из a отбрасыванием всех десятичных знаков после запятой, начиная с $(n+1)$-го. Так как число a отличается от a_n не более чем на $\frac{1}{10^n}$, то $a_n \leqslant a \leqslant a_n + \frac{1}{10^n}$, откуда

$$a_n^2 \leqslant a^2 \leqslant \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (2)$$

Ясно, что площадь S данного квадрата заключена между площадью квадрата со стороной a_n и площадью квадрата со стороной $a_n + \frac{1}{10^n}$ (рис. 180, *в*), т. е. между a_n^2 и $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$:

$$a_n^2 \leqslant S \leqslant \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (3)$$

Будем неограниченно увеличивать число n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и, значит, число $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$ будет сколь угодно мало отличаться от числа a_n^2. Поэтому из неравенств (2) и (3) следует, что число S сколь угодно мало отличается от числа a^2. Следовательно, эти числа равны: $S = a^2$, что и требовалось доказать.

51 Площадь прямоугольника

Теорема

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Доказательство

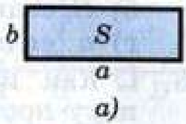
Рассмотрим прямоугольник со сторонами a, b и площадью S (рис. 181, a). Докажем, что $S = ab$.

Достроим прямоугольник до квадрата со стороной $a + b$, как показано на рисунке 181, *б*. По свойству 3° площадь этого квадрата равна $(a + b)^2$.

С другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника с площадью S, равного ему прямоугольника с площадью S (свойство 1° площадей) и двух квадратов с площадями a^2 и b^2 (свойство 3° площадей). По свойству 2° имеем:

$$(a + b)^2 = S + S + a^2 + b^2, \text{ или}$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2S + a^2 + b^2.$$

Отсюда получаем: $S = ab$. **Теорема доказана.**



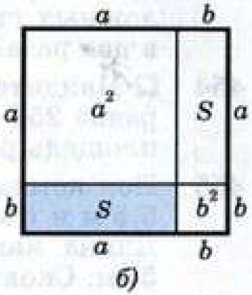


Рис. 181

Задачи

445 Вырежите из бумаги два равных прямоугольных треугольника и составьте из них: а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм, отличный от прямоугольника. Сравните площади полученных фигур.

446 Начертите квадрат и примите его за единицу измерения площадей. Далее начертите: а) квадрат, площадь которого выражается числом 4; б) прямоугольник, отличный от квадрата, площадь которого выражается числом 4; в) треугольник, площадь которого выражается числом 2.

447 Начертите параллелограмм $ABCD$ и отметьте точку M, симметричную точке D относительно точки C. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

448 На стороне AD прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N, причём точка M — середина отрезка AE. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

449 Найдите площадь квадрата, если его сторона равна: а) 1,2 см; б) $\frac{3}{4}$ дм; в) $3\sqrt{2}$ м.

450 Найдите сторону квадрата, если его площадь равна: а) 16 см^2; б) 2,25 дм^2; в) 12 м^2.

451 Площадь квадрата равна 24 см^2. Выразите площадь этого квадрата: а) в квадратных миллиметрах; б) в квадратных дециметрах.

452 Пусть a и b — смежные стороны прямоугольника, а S — его площадь. Вычислите: а) S, если $a = 8{,}5$ см, $b = 3{,}2$ см; б) S, если $a = 2\sqrt{2}$ см, $b = 3$ см; в) b, если $a = 32$ см, $S = 684{,}8$ см^2; г) a, если $b = 4{,}5$ см, $S = 12{,}15$ см^2.

453 ❑ Как изменится площадь прямоугольника, если: а) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза; б) каждую сторону увеличить в два раза; в) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза, а другую — уменьшить в два раза?

454 ❑ Найдите стороны прямоугольника, если: а) его площадь равна 250 см^2, а одна сторона в 2,5 раза больше другой; б) его площадь равна 9 м^2, а периметр равен 12 м.

455 Пол комнаты, имеющий форму прямоугольника со сторонами 5,5 м и 6 м, нужно покрыть паркетом прямоугольной формы. Длина каждой дощечки паркета равна 30 см, а ширина — 5 см. Сколько потребуется таких дощечек для покрытия пола?

456 Сколько потребуется кафельных плиток квадратной формы со стороной 15 см, чтобы облицевать ими стену, имеющую форму прямоугольника со сторонами 3 м и 2,7 м?

457 Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со смежными сторонами 8 м и 18 м.

458 Два участка земли огорожены заборами одинаковой длины. Первый участок имеет форму прямоугольника со сторонами 220 м и 160 м, а второй имеет форму квадрата. Площадь какого участка больше и на сколько?

§2 Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

52 Площадь параллелограмма

Условимся одну из сторон параллелограмма называть **основанием**, а перпендикуляр, проведённый из любой точки противоположной стороны к прямой, содержащей основание, — **высотой параллелограмма.**

Теорема

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Доказательство

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ с площадью S. Примем сторону AD за основание и проведём высоты BH и CK (рис. 182). Докажем, что $S = AD \cdot BH$.

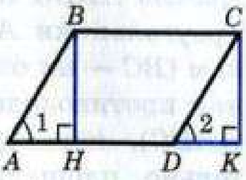


Рис. 182

Докажем сначала, что площадь прямоугольника $HBCK$ также равна S. Трапеция $ABCK$ составлена из параллелограмма $ABCD$ и треугольника DCK. С другой стороны, она составлена из прямоугольника $HBCK$ и треугольника ABH. Но прямоугольные треугольники DCK и ABH равны по гипотенузе и острому углу (их гипотенузы AB и CD равны как противоположные стороны параллелограмма, а углы 1 и 2 равны как соответственные углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD), поэтому их площади равны.

Следовательно, площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $HBCK$ также равны, т. е. площадь прямоугольника $HBCK$ равна S. По теореме о площади прямоугольника $S = BC \cdot BH$, а так как $BC = AD$, то $S = AD \cdot BH$. **Теорема доказана.**

53 Площадь треугольника

Одну из сторон треугольника часто называют его **основанием.** Если основание выбрано, то под словом «высота» подразумевают высоту треугольника, проведённую к основанию.

Теорема

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Доказательство

Пусть S — площадь треугольника ABC (рис. 183). Примем сторону AB за основание треугольника и проведём высоту CH. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH.$$

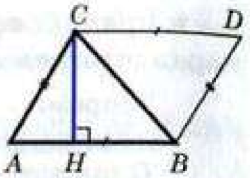


Рис. 183

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ так, как показано на рисунке 183. Треугольники ABC и DCB равны по трём сторонам (BC — их общая сторона, $AB = CD$ и $AC = BD$ как противоположные стороны параллелограмма $ABDC$), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABDC$, т. е. $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$. **Теорема доказана.**

Следствие 1

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Следствие 2

Если высоты двух треугольников равны, то и площади относятся как основания.

Воспользуемся следствием 2 для доказательства теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

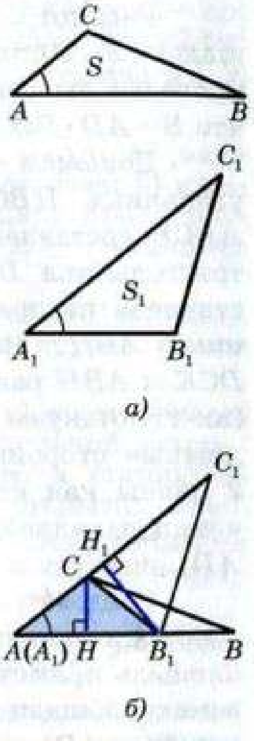


Рис. 184

Теорема

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Доказательство

Пусть S и S_1 — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$ (рис. 184, *а*). Докажем, что

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

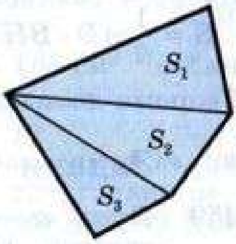
Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, а стороны A_1B_1 и A_1C_1 наложились соответственно на лучи AB и AC (рис. 184, *б*). Треугольники ABC и AB_1C имеют общую высоту CH, поэтому $\frac{S}{S_{AB_1C}} = \frac{AB}{AB_1}$. Треугольники AB_1C и AB_1C_1 также имеют общую высоту — B_1H_1, поэтому $\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}$. Перемножая полученные равенства, находим:

$$\frac{S}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}, \text{ или } \frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Теорема доказана.

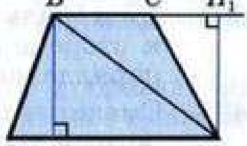
54 Площадь трапеции

Для вычисления площади произвольного многоугольника обычно поступают так: разбивают многоугольник на треугольники и находят площадь каждого треугольника. Сумма площадей этих треугольников равна площади данного многоугольника (рис. 185, *а*). Используя этот приём, выведем формулу для вычисления площади трапеции. Условимся называть **высотой трапеции** перпендикуляр, проведённый из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание. На рисунке 185, *б* отрезок BH (а также отрезок DH_1) — высота трапеции $ABCD$.



$S = S_1 + S_2 + S_3$

а)



б)

Рис. 185

Теорема

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.

Доказательство

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, высотой BH и площадью S (см. рис. 185, *б*).

Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Диагональ BD разделяет трапецию на два треугольника ABD и BCD, поэтому $S = S_{ABD} + S_{BCD}$. Примем отрезки AD и BH за основание и высоту треугольника ABD, а отрезки BC и DH_1 за основание и высоту треугольника BCD. Тогда

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH, \; S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DH_1.$$

Так как $DH_1 = BH$, то $S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot BH$.

Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}AD \cdot BH + \frac{1}{2}BC \cdot BH = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Теорема доказана.

Задачи

459 Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь параллелограмма. Найдите: а) S, если $a = 15$ см, $h = 12$ см; б) a, если $S = 34$ см^2, $h = 8{,}5$ см; в) a, если $S = 162$ см^2, $h = \frac{1}{2}a$; г) h, если $h = 3a$, $S = 27$.

460 Диагональ параллелограмма, равная 13 см, перпендикулярна к стороне параллелограмма, равной 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

461 Смежные стороны параллелограмма равны 12 см и 14 см, а его острый угол равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

462 Сторона ромба равна 6 см, а один из углов равен 150°. Найдите площадь ромба.

463 Сторона параллелограмма равна 8,1 см, а диагональ, равная 14 см, образует с ней угол в 30°. Найдите площадь параллелограмма.

464 ☐ Пусть a и b — смежные стороны параллелограмма, S — площадь, а h_1 и h_2 — его высоты. Найдите: а) h_2, если $a = 18$ см, $b = 30$ см, $h_1 = 6$ см, $h_2 > h_1$; б) h_1, если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $h_2 = 6$ см, $h_2 > h_1$; в) h_1 и h_2, если $S = 54$ см^2, $a = 4{,}5$ см, $b = 6$ см.

465 Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты, проведённые из вершины тупого угла, равны 2 см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.

466 Диагональ параллелограмма равна его стороне. Найдите площадь параллелограмма, если бóльшая его сторона равна 15,2 см, а один из его углов 45°.

467 Квадрат и ромб, не являющийся квадратом, имеют одинаковые периметры. Сравните площади этих фигур.

468 Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь треугольника. Найдите: а) S, если $a = 7$ см, $h = 11$ см; б) S, если $a = 2\sqrt{3}$ см, $h = 5$ см; в) h, если $S = 37{,}8$ см^2, $a = 14$ см; г) a, если $S = 12$ см^2, $h = 3\sqrt{2}$ см.

469 Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 16 см и 22 см, а высота, проведённая к стороне AB, равна 11 см. Найдите высоту, проведённую к стороне BC.

470 Две стороны треугольника равны 7,5 см и 3,2 см. Высота, проведённая к большей стороне, равна 2,4 см. Найдите высоту, проведённую к меньшей из данных сторон.

471 ☐ Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 11 см; б) 1,2 дм и 3 дм.

472 Площадь прямоугольного треугольника равна 168 см^2. Найдите его катеты, если отношение их длин равно $\frac{7}{12}$.

473 Через вершину C треугольника ABC проведена прямая m, параллельная стороне AB. Докажите, что все треугольники с вершинами на прямой m и основанием AB имеют равные площади.

474 Сравните площади двух треугольников, на которые разделяется данный треугольник его медианой.

475 ☐ Начертите треугольник ABC. Через вершину A проведите две прямые так, чтобы они разделили этот треугольник на три треугольника, имеющие равные площади.

476 Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Вычислите площадь ромба, если его диагонали равны: а) 3,2 дм и 14 см; б) 4,6 дм и 2 дм.

477 Найдите диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27 см^2.

478 В выпуклом четырёхугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей.

479 Точки D и E лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC. Найдите: а) S_{ADE}, если $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $AD = 3$ см, $AE = 2$ см, $S_{ABC} = 10$ см^2; б) AD, если $AB = 8$ см, $AC = 3$ см, $AE = 2$ см, $S_{ABC} = 10$ см^2, $S_{ADE} = 2$ см^2.

480 Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если:
а) $AB = 21$ см, $CD = 17$ см, высота BH равна 7 см;
б) $\angle D = 30°$, $AB = 2$ см, $CD = 10$ см, $DA = 8$ см;
в) $BC \perp AB$, $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $CD = 13$ см.

481 Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6 см, а больший угол равен 135°.

482 Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135°, а высота, проведённая из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Найдите площадь трапеции.

§3 Теорема Пифагора

55 Теорема Пифагора

Пользуясь свойствами площадей многоугольников, мы установим теперь замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника.

Теорема, которую мы докажем, называется **теоремой Пифагора**. Она является важнейшей теоремой геометрии.

Теорема

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 186, *а*). Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Достроим треугольник до квадрата со стороной $a + b$ так, как показано на рисунке 186, *б*. Площадь S этого квадрата равна $(a + b)^2$. С другой стороны, этот квадрат составлен из четырёх равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и квадрата со стороной c, поэтому

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2.$$

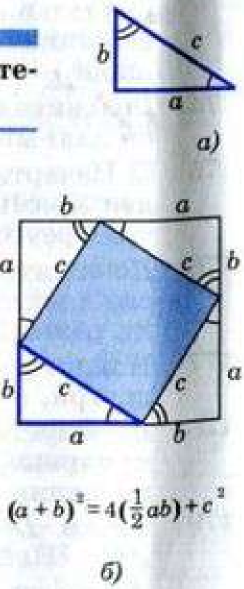


Рис. 186

Таким образом, $(a + b)^2 = 2ab + c^2$, откуда

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема доказана.

Интересна история теоремы Пифагора. Хотя эта теорема и связывается с именем Пифагора, она была известна задолго до него. В вавилонских текстах эта теорема встречается за 1200 лет до Пифагора. Возможно, что тогда ещё не знали её доказательства, а само соотношение между гипотенузой и катетами было установлено опытным путем на основе измерений. Пифагор, по-видимому, нашёл доказательство этого соотношения. Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принёс в жертву богам быка, по другим свидетельствам — даже сто быков. На протяжении последующих веков были найдены различные другие доказательства теоремы Пифагора. В настоящее время их насчитывается более ста. С одним из них мы уже познакомились, ещё с одним познакомимся в следующей главе (задача **578**). Многие известные мыслители и писатели прошлого обращались к этой замечательной теореме и посвятили ей свои строки.

Пифагор — древнегреческий учёный (VI в. до н. э.)

56 Теорема, обратная теореме Пифагора

Теорема

Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Докажем, что угол C прямой. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1, у которого $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$. По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, и, значит,

$A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$. Но $AC^2 + BC^2 = AB^2$ по условию теоремы. Следовательно, $A_1B_1^2 = AB^2$, откуда $A_1B_1 = AB$.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам, поэтому $\angle C = \angle C_1$, т. е. треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C. **Теорема доказана.**

По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник со сторонами 3, 4 и 5 является прямоугольным: $5^2 = 3^2 + 4^2$. Прямоугольными являются также треугольники со сторонами 5, 12, 13; 8, 15, 17 и 7, 24, 25 (объясните почему).

Прямоугольные треугольники, у которых длины сторон выражаются целыми числами, называются **пифагоровыми треугольниками**. Можно доказать, что катеты a, b и гипотенуза c таких треугольников выражаются формулами $a = 2k \cdot m \cdot n$, $b = k(m^2 - n^2)$, $c = k(m^2 + n^2)$, где k, m и n — любые натуральные числа, такие, что $m > n$.

Треугольник со сторонами 3, 4, 5 часто называют **египетским треугольником**, так как он был известен ещё древним египтянам. Для построения прямых углов египтяне поступали так: на верёвке делали метки, делящие её на 12 равных частей, связывали концы верёвки и растягивали на земле с помощью кольев в виде треугольника со сторонами 3, 4 и 5. Тогда угол между сторонами, равными 3 и 4, оказывался прямым.

57 Формула Герона

Теорема

Площадь S треугольника со сторонами a, b, c выражается формулой $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. В любом треугольнике по крайней мере два угла острые. Пусть A и B — острые углы треугольника ABC. Тогда основание H высоты CH треугольника лежит на стороне AB. Введём обозначения: $CH = h$, $AH = y$, $HB = x$ (рис. 187). По теореме Пифагора $a^2 - x^2 = h^2 = b^2 - y^2$, откуда $y^2 - x^2 = b^2 - a^2$, или $(y - x)(y + x) = b^2 - a^2$. Так как $y + x = c$, то $y - x = \frac{1}{c}(b^2 - a^2)$. Сложив два последних равенства и разделив на 2, получим:

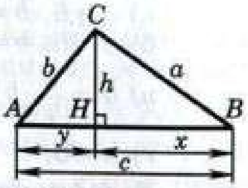


Рис. 187

$$y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Поэтому

$$h^2 = b^2 - y^2 = (b + y)(b - y) =$$

$$= \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) =$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b - c)^2}{2c} =$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}{4c^2} =$$

$$= \frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{4c^2} =$$

$$= \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{c^2}.$$

Следовательно, $h = \frac{2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{c}$.

Но $S = \frac{1}{2}hc$, откуда и получаем:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Теорема доказана.

Выведенную нами формулу обычно называют формулой Герона, по имени древнегреческого математика Герона Александрийского, жившего предположительно в I в. н. э.

Задачи

483 ☐ Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам a и b:
а) $a=6$, $b=8$;
б) $a=5$, $b=6$;
в) $a=\frac{3}{7}$, $b=\frac{4}{7}$;
г) $a=8$, $b=8\sqrt{3}$.

484 В прямоугольном треугольнике a и b — катеты, c — гипотенуза. Найдите b, если:
а) $a=12$, $c=13$;
б) $a=7$, $c=9$;
в) $a=12$, $c=2b$;
г) $a=2\sqrt{3}$, $c=2b$;
д) $a=3b$, $c=2\sqrt{10}$.

485 Найдите катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 60°, если гипотенуза равна c.

486 В прямоугольнике $ABCD$ найдите:
а) AD, если $AB=5$, $AC=13$;
б) BC, если $CD=1{,}5$, $AC=2{,}5$;
в) CD, если $BD=17$, $BC=15$.

487 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см, а основание равно 16 см. Найдите высоту, проведённую к основанию.

488 Найдите: а) высоту равностороннего треугольника, если его сторона равна 6 см; б) сторону равностороннего треугольника, если его высота равна 4 см.

489 Докажите, что площадь равностороннего треугольника вычисляется по формуле $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника. Найдите площадь равностороннего треугольника, если его сторона равна:
а) 5 см; б) 1,2 см; в) $2\sqrt{2}$ дм.

490 Найдите боковую сторону и площадь равнобедренного треугольника, если: а) основание равно 12 см, а высота, проведённая к основанию, равна 8 см; б) основание равно 18 см, а угол, противолежащий основанию, равен 120°; в) треугольник прямоугольный и высота, проведённая к гипотенузе, равна 7 см.

491 ☐ По данным катетам a и b прямоугольного треугольника найдите высоту, проведённую к гипотенузе:
а) $a=5$, $b=12$; б) $a=12$, $b=16$.

492 Найдите высоты треугольника со сторонами 10 см, 10 см и 12 см.

493 Найдите сторону и площадь ромба, если его диагонали равны 10 см и 24 см.

494 Найдите диагональ и площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а другая диагональ — 12 см.

495 Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если: а) $AB = 10$ см, $BC = DA = 13$ см, $CD = 20$ см; б) $\angle C = \angle D = 60°$, $AB = BC = 8$ см; в) $\angle C = \angle D = 45°$, $AB = 6$ см, $BC = 9\sqrt{2}$ см.

496 Основание D высоты CD треугольника ABC лежит на стороне AB, причём $AD = BC$. Найдите AC, если $AB = 3$, а $CD = \sqrt{3}$.

497 Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 50 см, а разность смежных сторон равна 1 см.

498 Выясните, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны выражаются числами: а) 6, 8, 10; б) 5, 6, 7; в) 9, 12, 15; г) 10, 24, 26; д) 3, 4, 6; е) 11, 9, 13; ж) 15, 20, 25. В каждом случае ответ обоснуйте.

499 Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами, равными: а) 24 см, 25 см, 7 см; б) 15 см, 17 см, 8 см.

Вопросы для повторения к главе VI

1 Расскажите, как измеряются площади многоугольников.

2 Сформулируйте основные свойства площадей многоугольников.

3 Какие многоугольники называются равновеликими и какие равносоставленными?

4 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади прямоугольника.

5 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади параллелограмма.

6 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади треугольника. Как вычислить площадь прямоугольного треугольника по его катетам?

7 Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей двух треугольников, имеющих по равному углу.

8 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади трапеции.

9 Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

10 Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.

11 Какие треугольники называются пифагоровыми? Приведите примеры пифагоровых треугольников.

12 Какая формула площади треугольника называется формулой Герона? Выведите эту формулу.

Дополнительные задачи

500 Докажите, что площадь квадрата, построенного на катете равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на высоте, проведённой к гипотенузе.

501 Площадь земельного участка равна 27 га. Выразите площадь этого же участка: а) в квадратных метрах; б) в квадратных километрах.

502 Высоты параллелограмма равны 5 см и 4 см, а периметр равен 42 см. Найдите площадь параллелограмма.

503 Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна 24 см^2, а точка пересечения диагоналей удалена от сторон на 2 см и 3 см.

504 Меньшая сторона параллелограмма равна 29 см. Перпендикуляр, проведённый из точки пересечения диагоналей к большей стороне, делит её на отрезки, равные 33 см и 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

505 Докажите, что из всех треугольников, у которых одна сторона равна a, а другая — b, наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны перпендикулярны.

506 □ Как провести две прямые через вершину квадрата, чтобы разделить его на три фигуры, площади которых равны?

507* Каждая сторона одного треугольника больше любой стороны другого треугольника. Следует ли из этого, что площадь первого треугольника больше площади второго треугольника?

508* □ Докажите, что сумма расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон не зависит от положения этой точки.

509 Докажите, что сумма расстояний от точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон не зависит от положения этой точки.

510* Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках E и F. Докажите, что треугольники CDE и BDF равновеликие.

511 В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD диагонали пересекаются в точке O.
а) Сравните площади треугольников ABD и ACD.
б) Сравните площади треугольников ABO и CDO.
в) Докажите, что выполняется равенство $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

512* Основания трапеции равны a и b. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный основаниям, разделяет трапецию на две равновеликие трапеции. Найдите длину этого отрезка.

513 Диагонали ромба равны 18 м и 24 м. Найдите периметр ромба и расстояние между параллельными сторонами.

514 Площадь ромба равна 540 см², а одна из его диагоналей равна 4,5 дм. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба.

515 Найдите площадь равнобедренного треугольника, если: а) боковая сторона равна 20 см, а угол при основании равен 30°; б) высота, проведённая к боковой стороне, равна 6 см и образует с основанием угол в 45°.

516 В треугольнике ABC $BC = 34$ см. Перпендикуляр MN, проведённый из середины BC к прямой AC, делит сторону AC на отрезки $AN = 25$ см и $NC = 15$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

517 Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB = 5$ см, $BC = 13$ см, $CD = 9$ см, $DA = 15$ см, $AC = 12$ см.

518 Найдите площадь равнобедренной трапеции, если: а) её меньшее основание равно 18 см, высота — 9 см и острый угол равен 45°; б) её основания равны 16 см и 30 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

519 Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна h, а диагонали взаимно перпендикулярны.

520 Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а сумма оснований равна $2a$. Найдите площадь трапеции.

521 Докажите, что если диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

522 В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 17$ см, $BC = 5$ см и боковой стороной $AB = 10$ см через вершину B проведена прямая, делящая диагональ AC пополам и пересекающая основание AD в точке M. Найдите площадь треугольника BDM.

523 Два квадрата со стороной a имеют одну общую вершину, причём сторона одного из них лежит на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов.

524 Стороны треугольника равны 13 см, 5 см и 12 см. Найдите площадь этого треугольника.

525 Расстояние от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до прямой AB равно 6 см, а до прямой AC равно 2 см. Найдите расстояние от точки M до прямой BC, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

526 В ромбе высота, равная $\frac{4\sqrt{2}}{6}$ см, составляет $\frac{2}{3}$ большей диагонали. Найдите площадь ромба.

527 В равнобедренной трапеции диагональ равна 10 см, а высота равна 6 см. Найдите площадь трапеции.

528 В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если боковая сторона CD трапеции равна 12 см, а расстояние от точки O до прямой CD равно 5 см.

529 Диагонали четырёхугольника равны 16 см и 20 см и пересекаются под углом в 30°. Найдите площадь этого четырёхугольника.

530 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC высота AD равна 8 см. Найдите площадь треугольника ABC, если медиана DM треугольника ADC равна 8 см.

531 Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 6 см и 8 см. Прямая, проходящая через вершину C и перпендикулярная к прямой BD, пересекает сторону AD в точке M, а диагональ BD — в точке K. Найдите площадь четырёхугольника $ABKM$.

532 В треугольнике ABC проведена высота BH. Докажите, что если:

а) угол A острый, то $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$;

б) угол A тупой, то $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$.

Глава VII

Подобные треугольники

В округ нас немало предметов, которые имеют одинаковую форму, но разные размеры. Самый простой пример — большой и маленький мячи. В геометрии фигуры одинаковой формы называются подобными. Данная глава посвящена изучению подобных треугольников и признаков их подобия. Эти признаки широко используются в геометрии, в частности с их помощью будет доказано утверждение, сформулированное ещё при изучении геометрии в 7 классе: медианы треугольника пересекаются в одной точке. Кроме того, будет рассказано об использовании свойств подобных треугольников при проведении измерительных работ на местности.

§1 Определение подобных треугольников

58 Пропорциональные отрезки

Отношением отрезков AB **и** CD называется отношение их длин, т. е. $\frac{AB}{CD}$.

Говорят, что **отрезки** AB **и** CD **пропорциональны отрезкам** A_1B_1 **и** C_1D_1, если $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$.

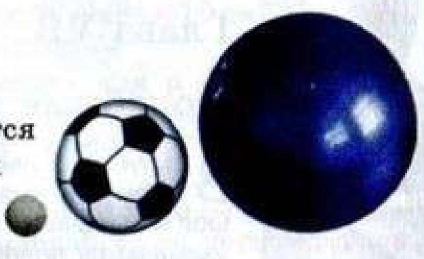
Например, отрезки AB и CD, длины которых равны 2 см и 1 см, пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, длины которых равны 3 см и 1,5 см. В самом деле,

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{2}{3}.$$

Понятие пропорциональности вводится и для большего числа отрезков. Так, например, три отрезка AB, CD и EF **пропорциональны** трём отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и E_1F_1, если справедливо равенство

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{EF}{E_1F_1}.$$

59 Определение подобных треугольников



В повседневной жизни встречаются предметы одинаковой формы, но разных размеров, например футбольный и теннисный мячи, круглая тарелка и большое круглое блюдо. В геометрии фигуры одинаковой формы принято называть подобными. Так, подобными являются любые два квадрата, любые два круга.

Введём понятие подобных треугольников.

Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ углы соответственно равны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. В этом случае стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 называются **сходственными** (рис. 188).

Определение

Два треугольника называются **подобными,** если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Другими словами, два треугольника подобны, если для них можно ввести обозначения ABC и $A_1B_1C_1$ так, что

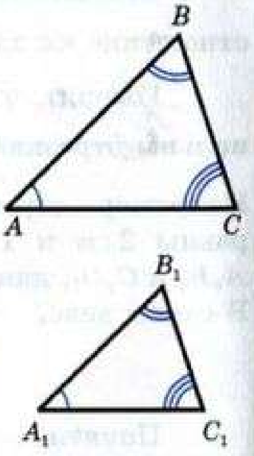
$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = C_1, \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k. \qquad (2)$$

Число k, равное отношению сходственных сторон подобных треугольников, называется **коэффициентом подобия.**

Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. На рисунке 188 изображены подобные треугольники.

Оказывается, что подобие треугольников можно установить, проверив только некоторые из равенств (1) и (2). В следующем параграфе мы рассмотрим три признака подобия треугольников.



AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 – сходственные стороны

Рис. 188

60 Отношение площадей подобных треугольников

Теорема

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство

Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, причём коэффициент подобия равен k. Обозначим буквами S и S_1 площади этих треугольников. Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ (по тереме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, п. 53). По формулам (2) имеем: $\frac{AB}{A_1B_1} = k$, $\frac{AC}{A_1C_1} = k$, поэтому $\frac{S}{S_1} = k^2$.

Теорема доказана.

Задачи

533 Найдите отношение отрезков AB и CD, если их длины равны соответственно 15 см и 20 см. Изменится ли это отношение, если длины отрезков выразить в миллиметрах?

534 Пропорциональны ли изображённые на рисунке 189 отрезки: а) AC, CD и M_1M_2, MM_1; б) AB, BC, CD и MM_2, MM_1, M_1M_2; в) AB, BD и MM_1, M_1M_2?

535 Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Решение

Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$ (рис. 190). Треугольники ABD и ACD имеют общую

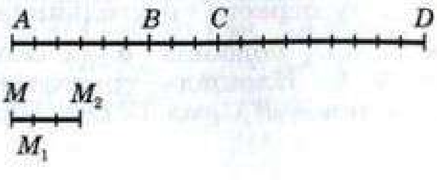


Рис. 189

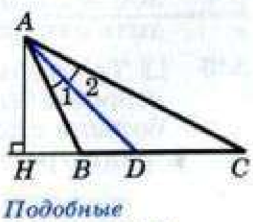


Рис. 190

высоту AH, поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$. С другой стороны, эти же треугольники имеют по равному углу ($\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}$. Из двух равенств для отношения площадей получаем $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, или $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$, что и требовалось доказать.

536 ☐ Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC. а) Найдите AB, если $BC = 9$ см, $AD = 7{,}5$ см, $DC = 4{,}5$ см. б) Найдите DC, если $AB = 30$, $AD = 20$, $BC = 16$.

537 ☐ Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC. Найдите BD и DC, если $AB = 14$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см.

538 ☐ Биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC на отрезки CD и BD, равные соответственно 4,5 см и 13,5 см. Найдите AB и AC, если периметр треугольника ABC равен 42 см.

539 ☐ В треугольник MNK вписан ромб $MDEF$ так, что вершины D, E и F лежат соответственно на сторонах MN, NK и MK. Найдите отрезки NE и EK, если $MN = 7$ см, $NK = 6$ см, $MK = 5$ см.

540 Периметр треугольника CDE равен 55 см. В этот треугольник вписан ромб $DMFN$ так, что вершины M, F и N лежат соответственно на сторонах CD, CE и DE. Найдите стороны CD и DE, если $CF = 8$ см, $EF = 12$ см.

541 Подобны ли треугольники ABC и DEF, если $\angle A = 106^\circ$, $\angle B = 34^\circ$, $\angle E = 106^\circ$, $\angle F = 40^\circ$, $AC = 4{,}4$ см, $AB = 5{,}2$ см, $BC = 7{,}6$ см, $DE = 15{,}6$ см, $DF = 22{,}8$ см, $EF = 13{,}2$ см?

542 ☐ В подобных треугольниках ABC и KMN стороны AB и KM, BC и MN являются сходственными. Найдите стороны треугольника KMN, если $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $\frac{KM}{AB} = 2{,}1$.

543 Докажите, что отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению высот, проведённых к этим сторонам.

544 ☐ Площади двух подобных треугольников равны 75 м^2 и 300 м^2. Одна из сторон второго треугольника равна 9 м. Найдите сходственную ей сторону первого треугольника.

545 ☐ Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, и их сходственные стороны относятся как $6:5$. Площадь треугольника ABC больше площади треугольника $A_1B_1C_1$ на 77 см^2. Найдите площади треугольников.

546 ☐ План земельного участка имеет форму треугольника. Площадь изображённого на плане треугольника равна 87,5 см². Найдите площадь земельного участка, если план выполнен в масштабе 1 : 100 000.

547 Докажите, что отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

548 ☐ Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Сходственные стороны BC и B_1C_1 соответственно равны 1,4 м и 56 см. Найдите отношение периметров треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

549 ☐ Стороны данного треугольника равны 15 см, 20 см и 30 см. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его периметр равен 26 см.

§2 Признаки подобия треугольников

61 Первый признак подобия треугольников

Теорема

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Пусть $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 191). Докажем, что $\triangle ABC \infty \triangle A_1B_1C_1$.

По теореме о сумме углов треугольника $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$, $\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1$, и, значит, $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$.

Докажем, что стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ и $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$ (см. п. 53).

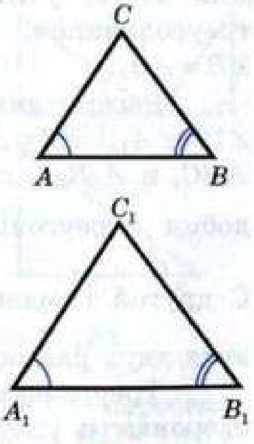


Рис. 191

Из этих равенств следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.
Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, получаем $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.

Итак, стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. **Теорема доказана.**

62 Второй признак подобия треугольников

Теорема

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 192, *а*). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая первый признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

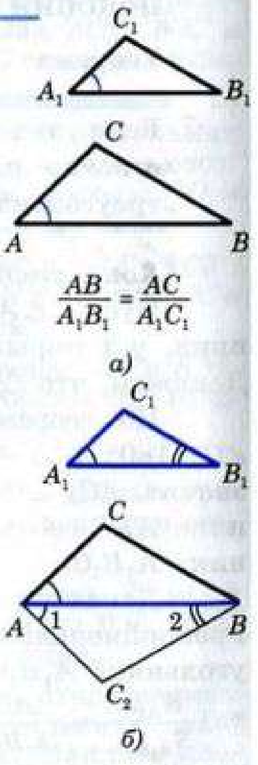


Рис. 192

Рассмотрим треугольник ABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (рис. 192, *б*). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$.

С другой стороны, по условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Из этих двух равенств получаем $AC = AC_2$.

Треугольники ABC и ABC_2 равны по двум сторонам и углу между ними (AB — общая сторона, $AC = AC_2$ и $\angle A = \angle 1$, поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle 1 = \angle A_1$). Отсюда следует, что $\angle B = \angle 2$, а так как $\angle 2 = \angle B_1$, то $\angle B = \angle B_1$. Теорема доказана.

63 Третий признак подобия треугольников

Теорема

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Пусть стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}. \qquad (1)$$

Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая второй признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$. Рассмотрим треугольник ABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (см. рис. 192, *б*). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}$.

Сравнивая эти равенства с равенствами (1), получаем: $BC = BC_2$, $CA = C_2A$. Треугольники ABC и ABC_2 равны по трём сторонам. Отсюда следует, что $\angle A = \angle 1$, а так как $\angle 1 = \angle A_1$, то $\angle A = \angle A_1$. **Теорема доказана.**

Задачи

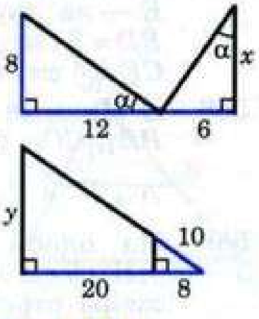


Рис. 193

550 По данным рисунка 193 найдите x и y.

551 На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Прямые AE и BC пересекаются в точке F. Найдите: а) EF и FC, если $DE = 8$ см, $EC = 4$ см, $BC = 7$ см, $AE = 10$ см; б) DE и EC, если $AB = 8$ см, $AD = 5$ см, $CF = 2$ см.

552 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O. Найдите: а) AB, если $OB = 4$ см, $OD = 10$ см, $DC = 25$ см; б) $\frac{AO}{OC}$ и $\frac{BO}{OD}$, если $AB = a$, $DC = b$; в) AO, если $AB = 9{,}6$ дм, $DC = 24$ см, $AC = 15$ см.

553 Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют: а) по равному острому углу; б) по равному тупому углу; в) по прямому углу? Ответ обоснуйте.

554 Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 см и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке M. Найдите расстояния от точки M до концов меньшего основания.

555 Точки M, N и P лежат соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, причём $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Найдите стороны четырёхугольника $AMNP$, если: а) $AB = 10$ см, $AC = 15$ см, $PN : MN = 2 : 3$; б) $AM = AP$, $AB = a$, $AC = b$.

556 Стороны угла O пересечены параллельными прямыми AB и CD. Докажите, что отрезки OA и AC пропорциональны отрезкам OB и BD (рис. 194).

Решение

Проведём через точку A прямую AC_1, параллельную прямой BD (C_1 — точка пересечения этой прямой с прямой CD). Тогда $\triangle OAB \sim \triangle ACC_1$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle O = \angle CAC_1$, $\angle OAB = \angle C$), следовательно, $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$. Так как $AC_1 = BD$ (объясните почему), то $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$, что и требовалось доказать.

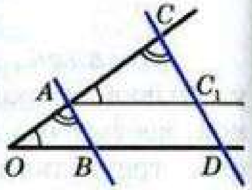


Рис. 194

557 Стороны угла A пересечены параллельными прямыми BC и DE, причём точки B и D лежат на одной стороне угла, а C и E — на другой. Найдите: а) AC, если $CE = 10$ см, $AD = 22$ см, $BD = 8$ см; б) BD и DE, если $AB = 10$ см, $AC = 8$ см, $BC = 4$ см, $CE = 4$ см; в) BC, если $AB : BD = 2 : 1$ и $DE = 12$ см.

558 Прямые a и b пересечены параллельными прямыми AA_1, BB_1, CC_1, причём точки A, B и C лежат на прямой a, а точки A_1, B_1 и C_1 — на прямой b. Докажите, что $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

559 На одной из сторон данного угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AF = 10$ см. Подобны ли треугольники ACD и AFB? Ответ обоснуйте.

560 Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если: а) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $A_1B_1 = 4{,}5$ см, $B_1C_1 = 7{,}5$ см, $C_1A_1 = 10{,}5$ см; б) $AB = 1{,}7$ см, $BC = 3$ см, $CA = 4{,}2$ см, $A_1B_1 = 34$ дм, $B_1C_1 = 60$ дм, $C_1A_1 = 84$ дм?

561 Докажите, что два равносторонних треугольника подобны.

562 В треугольнике ABC сторона AB равна a, а высота CH равна h. Найдите сторону квадрата, вписанного в треугольник ABC так, что две соседние вершины квадрата лежат на стороне AB, а две другие — соответственно на сторонах AC и BC.

563 □ Через точку M, взятую на медиане AD треугольника ABC, и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K. Найдите отношение $\frac{AK}{KC}$, если: а) M — середина отрезка AD; б) $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

§3 Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

64 Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Докажем теорему о средней линии треугольника.

Теорема

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство

Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 195). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

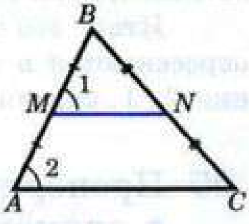


Рис. 195

Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle B$ — общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует, что $MN \parallel AC$ (объясните почему), а из второго равенства — что $MN = \frac{1}{2}AC$. Теорема доказана.

Пользуясь этой теоремой, решим следующую задачу:

Задача 1

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Решение

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения его медиан AA_1 и BB_1 и проведём среднюю линию A_1B_1 этого треугольника (рис. 196). Отрезок A_1B_1 параллелен стороне AB, поэтому углы 1 и 2, а также углы 3 и 4 равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и A_1B_1 секущими AA_1 и BB_1. Следовательно, треугольники AOB и A_1OB_1 подобны по двум углам, и, значит, их стороны пропорциональны:

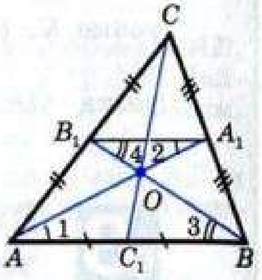


Рис. 196

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Но $AB = 2A_1B_1$, поэтому $AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$. Таким образом, точка O пересечения медиан AA_1 и BB_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой O.

Итак, все три медианы треугольника ABC пересекаются в точке O и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

65 Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Задача 2

Доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

Решение

Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник с прямым углом C, CD — высота, проведённая из вершины C к гипотенузе AB (рис. 197). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

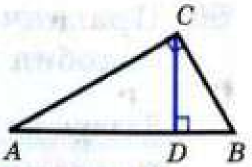


Рис. 197

Треугольники ABC и ACD подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle A$ — общий, $\angle ACB = \angle ADC = 90°$). Точно так же подобны треугольники ABC и CBD ($\angle B$ — общий и $\angle ACB = \angle BDC = 90°$), поэтому $\angle A = \angle BCD$. Наконец, треугольники ACD и CBD также подобны по первому признаку подобия (в этих треугольниках углы с вершиной D прямые и $\angle A = \angle BCD$), что и требовалось доказать.

Отрезок XY называется **средним пропорциональным (или средним геометрическим)** для отрезков AB и CD, если

$$XY = \sqrt{AB \cdot CD}.$$

Исходя из задачи 2, докажем следующие утверждения:

1^0. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

Действительно, $\triangle ADC \sim \triangle CBD$ (см. рис. 197), поэтому $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, откуда $CD^2 = AD \cdot DB$, следовательно,

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}.$$

2^0. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключённого между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла.

В самом деле, $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (см. рис. 197), поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, и, следовательно,

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}.$$

66 Практические приложения подобия треугольников

Задачи на построение

При решении многих задач на построение треугольников применяют так называемый **метод подобия**. Он состоит в том, что сначала на основании некоторых данных строят треугольник, подобный искомому, а затем, используя остальные данные, строят искомый треугольник.

Рассмотрим пример.

Задача 3

Построить треугольник по данным двум углам и биссектрисе при вершине третьего угла.

Решение

На рисунке 198, *а* изображены два данных угла и данный отрезок. Требуется построить треугольник, у которого два угла соответственно равны двум данным углам, а биссектриса при вершине третьего угла равна данному отрезку.

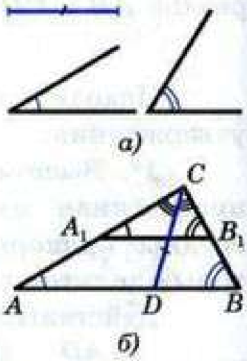


Рис. 198

Сначала построим какой-нибудь треугольник, подобный искомому. Для этого начертим произвольный отрезок A_1B_1 и построим треугольник A_1B_1C, у которого углы A_1 и B_1 соответственно равны данным углам (рис. 198, *б*).

Далее построим биссектрису угла C и отложим на ней отрезок CD, равный данному отрезку. Через точку D проведём прямую, параллельную A_1B_1. Она пересекает стороны угла C в некоторых точках A и B (см. рис. 198, *б*). Треугольник ABC искомый.

В самом деле, так как $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, и, следовательно, два угла треугольника ABC соответственно равны данным углам. По построению биссектриса CD треугольника ABC равна данному отрезку. Итак, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Очевидно, задача имеет решение, если сумма двух данных углов меньше 180°. Так как отрезок A_1B_1 можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условию задачи. Все эти треугольники равны друг другу (объясните почему), поэтому задача имеет единственное решение.

Измерительные работы на местности

Свойства подобных треугольников могут быть использованы при проведении различных измерительных работ на местности. Мы рассмотрим две задачи: определение высоты предмета и расстояния до недоступной точки.

Определение высоты предмета. Предположим, что нам нужно определить высоту какого-нибудь предмета, например высоту телеграфного столба A_1C_1, изображённого на рисунке 199. Для этого поставим на некотором расстоянии от столба шест AC с вращающейся планкой и направим планку на верхнюю точку A_1 столба, как показано на рисунке. Отметим на поверхности земли точку B, в которой прямая A_1A пересекается с поверхностью земли. Прямоугольные треугольники A_1C_1B и ACB подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle C_1 = \angle C = 90°$, $\angle B$ — общий). Из подобия треугольников следует: $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BC_1}{BC}$, откуда

$$A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC}.$$

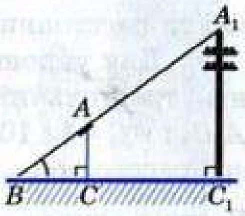


Рис. 199

Измерив расстояния BC_1 и BC и зная длину AC шеста, по полученной формуле определяем высоту A_1C_1 телеграфного столба. Если, например, $BC_1 = 6{,}3$ м, $BC = 2{,}1$ м, $AC = 1{,}7$ м, то $A_1C_1 = \frac{1{,}7 \cdot 6{,}3}{2{,}1} = 5{,}1$ м.

Определение расстояния до недоступной точки. Предположим, что нам нужно найти расстояние от пункта A до недоступного пункта B (рис. 200). Для этого на местности выбираем точку C, провешиваем отрезок AC и измеряем его.

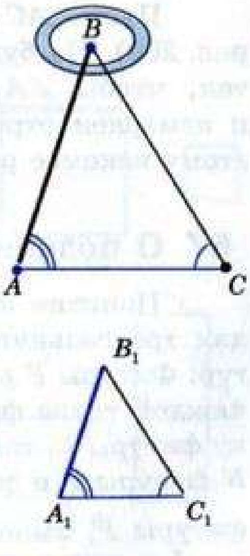


Рис. 200

Затем с помощью астролябии измеряем углы A и C. На листе бумаги строим какой-нибудь треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, и измеряем длины сторон A_1B_1 и A_1C_1 этого треугольника. Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (по первому признаку подобия треугольников), то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, откуда получаем $AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1}$. Эта формула позволяет по известным расстояниям AC, A_1C_1 и A_1B_1 найти расстояние AB.

Для упрощения вычислений удобно построить треугольник $A_1B_1C_1$ таким образом, чтобы $A_1C_1 : AC = 1 : 1000$. Например, если $AC = 130$ м, то расстояние A_1C_1 возьмём равным 130 мм. В этом случае $AB = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot A_1B_1 = 1000 \cdot A_1B_1$, поэтому, измерив расстояние A_1B_1 в миллиметрах, мы сразу получим расстояние AB в метрах.

Пример

Пусть $AC = 130$ м, $\angle A = 73°$, $\angle C = 58°$ (см. рис. 200). На бумаге строим треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы $\angle A_1 = 73°$, $\angle C_1 = 58°$, $A_1C_1 = 130$ мм, и измеряем отрезок A_1B_1. Он равен 153 мм, поэтому искомое расстояние равно 153 м.

67 О подобии произвольных фигур

Понятие подобия можно ввести не только для треугольников, но и для произвольных фигур. Фигуры F и F_1 называются **подобными**, если каждой точке фигуры F можно сопоставить точку фигуры F_1 так, что для любых двух точек M и N фигуры F и сопоставленных им точек M_1 и N_1 фигуры F_1 выполняется равенство $\frac{MN}{M_1N_1} = k$, где

k — одно и то же положительное число для всех точек. При этом предполагается, что каждая точка фигуры F_1 оказывается сопоставленной какой-то точке фигуры F. Число k называется **коэффициентом подобия** фигур F и F_1.

Сопоставление точек подобных фигур хорошо знакомо нам из повседневного опыта. Так, при проектировании киноленты на экран каждой точке изображения на кинокадре сопоставляется точка на экране, причём все расстояния увеличиваются в одинаковое число раз.

На рисунке 201 представлен способ построения фигуры F_1, подобной данной фигуре F. Каждой точке M фигуры F сопоставляется точка M_1 плоскости так, что точки M и M_1 лежат на луче с началом в некоторой фиксированной точке O, причём $OM = k \cdot OM_1$ (на рисунке 201 $k = \frac{1}{3}$). В результате такого сопоставления получается фигура F_1, подобная фигуре F. В этом случае фигуры F и F_1 называются **центрально-подобными**, а само описанное сопоставление называется **центральным подобием или гомотетией**.

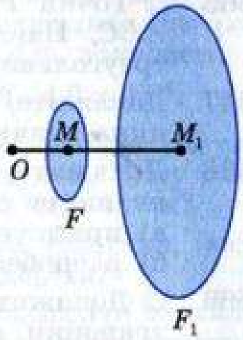


Рис. 201

Можно доказать, что для треугольников общее определение подобия равносильно определению, данному в п. 59.

Примерами подобных четырёхугольников являются любые два квадрата (рис. 202, *а*), а также два прямоугольника, у которых две смежные стороны одного пропорциональны двум смежным сторонам другого (рис. 202, *б*). Примерами подобных фигур произвольной формы являются две географические карты одного и того же района, выполненные в разных масштабах, а также фотографии одного и того же предмета, сделанные в разных увеличениях.

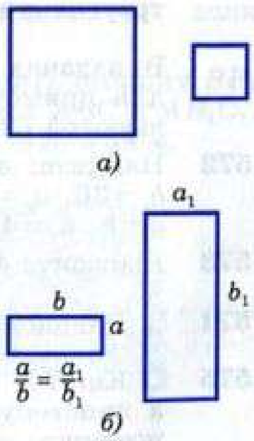


Рис. 202

Замечание

В п. 60 мы доказали, что отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Из этого следует, что такое же утверждение справедливо для двух подобных многоугольников (чтобы доказать это, можно разбить многоугольник на треугольники).

Задачи

564 Дан треугольник, стороны которого равны 8 см, 5 см и 7 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

565 Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до прямой, содержащей его бо́льшую сторону, равно 2,5 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

566 Точки P и Q — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника APQ равен 21 см.

567 Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

568 Докажите, что четырёхугольник — ромб, если его вершинами являются середины сторон:
а) прямоугольника;
б) равнобедренной трапеции.

569 Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен полуразности оснований.

570 Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 18 см. Середина M стороны AB соединена с вершиной D. Найдите отрезки, на которые делится диагональ AC отрезком DM.

571 В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABO равна S.

В задачах 572—574 использованы следующие обозначения для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C и высотой CH: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $CH = h$, $AH = b_c$, $HB = a_c$.

572 Найдите: а) h, a и b, если $b_c = 25$, $a_c = 16$; б) h, a и b, если $b_c = 36$, $a_c = 64$; в) a, c и a_c, если $b = 12$, $b_c = 6$; г) b, c и b_c, если $a = 8$, $a_c = 4$; д) h, b, a_c и b_c, если $a = 6$, $c = 9$.

573 Выразите a_c и b_c через a, b и c.

574 Докажите, что: а) $h = \frac{ab}{c}$; б) $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$.

575 Катеты прямоугольного треугольника относятся как $3:4$, а гипотенуза равна 50 мм. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой, проведённой из вершины прямого угла.

576 Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 11 см больше другого. Найдите гипотенузу, если катеты треугольника относятся как 6 : 5.

577 В треугольнике, стороны которого равны 5 см, 12 см и 13 см, проведена высота к его большей стороне. Найдите отрезки, на которые высота делит эту сторону.

578 Используя утверждение 2^0, п. 65, докажите теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C выполняется равенство $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Решение

Пусть CD — высота треугольника ABC (см. рис. 197). На основании утверждения 2^0, п. 65, имеем $AC = \sqrt{AD \cdot AB}$, или $AC^2 = AD \cdot AB$. Аналогично $BC^2 = BD \cdot AB$. Складывая эти равенства почленно и учитывая, что $AD + BD = AB$, получаем:

$$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = (AD + BD) \cdot AB = AB^2.$$

579 Для определения высоты столба A_1C_1, изображённого на рисунке 199, использован шест с вращающейся планкой. Чему равна высота столба, если $BC_1 = 6{,}3$ м, $BC = 3{,}4$ м, $AC = 1{,}7$ м?

580 Длина тени дерева равна 10,2 м, а длина тени человека, рост которого 1,7 м, равна 2,5 м. Найдите высоту дерева.

581 Для определения высоты дерева можно использовать зеркало так, как показано на рисунке 203. Луч света FD, отражаясь от зеркала в точке D, попадает в глаз человека (точку B). Определите высоту дерева, если $AC = 165$ см, $BC = 12$ см, $AD = 120$ см, $DE = 4{,}8$ м, $\angle 1 = \angle 2$.

582 Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B на местности выбрали точку C и измерили отрезок AC, углы BAC и ACB. Затем построили на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC. Найдите AB, если $AC = 42$ м, $A_1C_1 = 6{,}3$ см, $A_1B_1 = 7{,}2$ см.

583 На рисунке 204 показано, как можно определить ширину BB_1 реки, рассматривая два подобных треугольника ABC и AB_1C_1. Определите BB_1, если $AC = 100$ м, $AC_1 = 32$ м, $AB_1 = 34$ м.

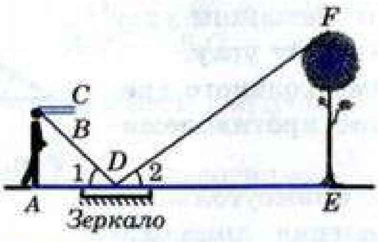


Рис. 203

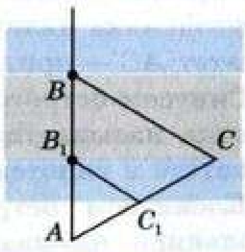


Рис. 204

Задачи на построение

584 Разделите данный отрезок AB на два отрезка AX и XB, пропорциональные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2.

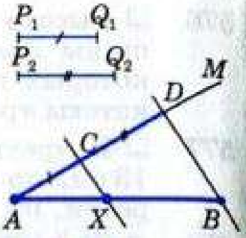


Рис. 205

Решение

Проведём какой-нибудь луч AM, не лежащий на прямой AB, и на этом луче отложим последовательно отрезки AC и CD, равные отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 205). Затем проведём прямую BD и прямую, проходящую через точку C параллельно прямой BD. Она пересечёт отрезок AB в искомой точке X (см. задачу **556**).

585 Начертите отрезок AB и разделите его в отношении: а) $2:5$; б) $3:7$; в) $4:3$.

586 Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведённой из вершины меньшего из данных углов.

587 Постройте треугольник по двум углам и высоте, проведённой из вершины третьего угла.

588 Постройте треугольник ABC по углу A и медиане AM, если известно, что $AB : AC = 2 : 3$.

589 Постройте треугольник ABC по углу A и стороне BC, если известно, что $AB : AC = 2 : 1$.

590 Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов, равному отношению двух данных отрезков.

§4 Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

68 Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 206). Катет BC этого треугольника является противолежащим углу A, а катет AC — прилежащим к этому углу.

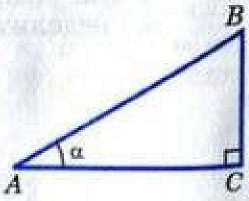


Рис. 206

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Синус, косинус и тангенс угла, равного α, обозначаются символами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ (читается: «синус альфа», «косинус альфа» и «тангенс альфа»). На рисунке 206

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \qquad (1)$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}. \qquad (3)$$

Из формул (1) и (2) получаем: $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC}$. Сравнивая с формулой (3), находим:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad (4)$$

т. е. **тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла.**

Докажем, что **если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.**

В самом деле, пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два прямоугольных треугольника с прямыми углами C и C_1 и равными острыми углами A и A_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Из этих равенств следует, что $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\sin A = \sin A_1$. Аналогично $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\cos A = \cos A_1$, и $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, т. е. $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$.

Докажем теперь справедливость равенства

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \qquad (5)$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$, поэтому $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Равенство (5) называется **основным тригонометрическим тождеством**[1].

69 Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°

Найдём сначала значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° и 60°. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, у которого $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ (рис. 207). Так как катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$. Но $\frac{BC}{AB} = \sin A = \sin 30°$. С другой стороны, $\frac{BC}{AB} = \cos B = \cos 60°$. Итак,

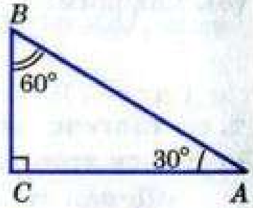


Рис. 207

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 60° = \sqrt{1 - \cos^2 60°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле (4) находим:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$

[1] Слово «тригонометрия» в переводе с греческого языка означает «измерение треугольников».

Найдём теперь $\sin 45°$, $\cos 45°$ и $\operatorname{tg} 45°$. Для этого рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 208). В этом треугольнике $AC = BC$, $\angle A = \angle B = 45°$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2 = 2BC^2$, откуда $AC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$.

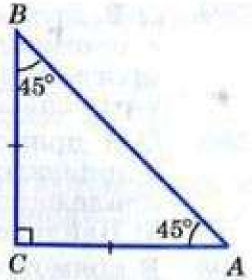


Рис. 208

Следовательно,

$$\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = 1.$$

Составим таблицу значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ для углов α, равных 30°, 45°, 60°:

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Задачи

591 Найдите синус, косинус и тангенс углов A и B треугольника ABC с прямым углом C, если: а) $BC = 8$, $AB = 17$; б) $BC = 21$, $AC = 20$; в) $BC = 1$, $AC = 2$; г) $AC = 24$, $AB = 25$.

592 Постройте угол α, если: а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; в) $\cos\alpha = 0{,}2$; г) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; д) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; е) $\sin\alpha = 0{,}4$.

593 Найдите: а) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; в) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

594 ☐ В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b, а противолежащий угол равен β. а) Выразите другой катет, противолежащий ему угол и гипотенузу через b и β. б) Найдите их значения, если $b = 10$ см, $\beta = 50°$.

595 ☐ В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b, а прилежащий к нему угол равен α. а) Выразите второй катет, прилежащий к нему острый угол и гипотенузу через b и α. б) Найдите их значения, если $b = 12$ см, $\alpha = 42°$.

596 В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а один из острых углов равен α. Выразите второй острый угол и катеты через c и α и найдите их значения, если $c = 24$ см, а $\alpha = 35°$.

597 Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Выразите через a и b гипотенузу и тангенсы острых углов треугольника и найдите их значения при $a = 12$, $b = 15$.

598 Найдите площадь равнобедренного треугольника с углом α при основании, если: а) боковая сторона равна b; б) основание равно a.

599 Найдите площадь равнобедренной трапеции с основаниями 2 см и 6 см, если угол при большем основании равен α.

600 Насыпь шоссейной дороги имеет в верхней части ширину 60 м. Какова ширина насыпи в нижней её части, если угол наклона откосов равен 60°, а высота насыпи равна 12 м (рис. 209)?

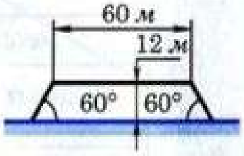


Рис. 209

601 ☐ Найдите углы ромба с диагоналями $2\sqrt{3}$ и 2.

602 ☐ Стороны прямоугольника равны 3 см и $\sqrt{3}$ см. Найдите углы, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.

603 ☐ В параллелограмме $ABCD$ сторона AD равна 12 см, а угол BAD равен 47°50′. Найдите площадь параллелограмма, если его диагональ BD перпендикулярна к стороне AB.

Вопросы для повторения к главе VII

1 Что называется отношением двух отрезков?

2 В каком случае говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1?

3 Дайте определение подобных треугольников.

4 Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей подобных треугольников.

5 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую первый признак подобия треугольников.

6 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую второй признак подобия треугольников.

7 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую третий признак подобия треугольников.

8 Какой отрезок называется средней линией треугольника? Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.

9 Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

10 Сформулируйте и докажите утверждение о том, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на подобные треугольники.

11 Сформулируйте и докажите утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.

12 Приведите пример решения задачи на построение методом подобия.

13 Расскажите, как определить на местности высоту предмета и расстояние до недоступной точки.

14 Объясните, какие две фигуры называются подобными. Что такое коэффициент подобия фигур?

15 Что называется синусом, косинусом, тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?

16 Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.

17 Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?

18 Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°? Ответ обоснуйте.

Дополнительные задачи

604 ☐ Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $CA = 10$ см. Наибольшая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7,5 см. Найдите две другие стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

605 Диагональ AC трапеции $ABCD$ делит её на два подобных треугольника. Докажите, что $AC^2 = a \cdot b$, где a и b — основания трапеции.

606 ☐ Биссектрисы MD и NK треугольника MNP пересекаются в точке O. Найдите отношение $OK : ON$, если $MN = 5$ см, $NP = 3$ см, $MP = 7$ см.

607 ☐ Основание равнобедренного треугольника относится к боковой стороне как 4 : 3, а высота, проведённая к основанию,

равна 30 см. Найдите отрезки, на которые эту высоту делит биссектриса угла при основании.

608 На продолжении боковой стороны OB равнобедренного треугольника AOB с основанием AB взята точка C так, что точка B лежит между точками O и C. Отрезок AC пересекает биссектрису угла AOB в точке M. Докажите, что $AM < MC$.

609 На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC.

610 Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, делит сторону AC в отношении $2:7$, считая от вершины A. Найдите стороны отсечённого треугольника, если $AB = 10$ см, $BC = 18$ см, $CA = 21{,}6$ см.

611 Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок, параллельный стороне BC, концы которого лежат на сторонах AB и AC.

612 Два шеста AB и CD разной длины a и b установлены вертикально на некотором расстоянии друг от друга так, как показано на рисунке 210. Концы A и D, B и C соединены верёвками, которые пересекаются в точке O. По данным рисунка докажите, что: а) $\frac{m}{d} = \frac{x}{b}$ и $\frac{n}{d} = \frac{x}{a}$; б) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$. Найдите x и докажите, что x не зависит от расстояния d между шестами AB и CD.

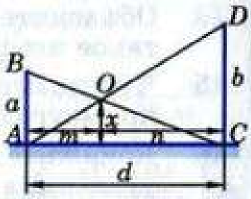


Рис. 210

613 Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если: а) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$, где BM и B_1M_1 — медианы треугольников; б) $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BH}{B_1H_1}$, где BH и B_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

614 ❑ Диагонали прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A взаимно перпендикулярны. Основание AB равно 6 см, а боковая сторона AD равна 4 см. Найдите DC, DB и CB.

615* Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен её основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b.

616 Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей его среднюю линию.

617 Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

618 Точки M и N являются соответственно серединами сторон CD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

619 ☐ Биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D. Докажите, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

620 В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) через середину стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A, которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD = CE$.

621 В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC сумма оснований равна b, диагональ AC равна a, $\angle ACB = \alpha$. Найдите площадь трапеции.

622 ☐ На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K так, что $AK = \frac{1}{4}KD$. Диагональ AC и отрезок BK пересекаются в точке P. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника APK равна 1 см^2.

623 ☐ В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle ACD = 90°$, $BC = 4$ см, $AD = 16$ см. Найдите углы C и D трапеции.

624 Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть треугольников, площади которых попарно равны.

625 ☐ Основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$ в 5 раз больше основания BC. Высота BH пересекает диагональ AC в точке M, площадь треугольника AMH равна 4 см^2. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

626* Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

Задачи на построение

627 Дан треугольник ABC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC, площадь которого в два раза больше площади треугольника ABC.

628 Даны три отрезка, длины которых соответственно равны a, b и c. Постройте отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$.

629 ☐ Постройте треугольник, если даны середины его сторон.

630 ☐ Постройте треугольник по стороне и медианам, проведённым к двум другим сторонам.

Глава VIII

Окружность

В этой главе мы вернёмся к одной из основных геометрических фигур — к окружности. Будут доказаны различные теоремы, связанные с окружностями, в том числе теоремы об окружностях, вписанных в треугольник, четырёхугольник, и окружностях, описанных около этих фигур. Кроме того, будут доказаны три утверждения о замечательных точках треугольника — точке пересечения биссектрис треугольника, точке пересечения его высот и точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Первые два утверждения были сформулированы ещё в 7 классе, и вот теперь мы сможем провести их доказательства.

§1 Касательная к окружности

70 Взаимное расположение прямой и окружности

Выясним, сколько общих точек могут иметь прямая и окружность в зависимости от их взаимного расположения. Ясно, что если прямая проходит через центр окружности, то она пересекает окружность в двух точках — концах диаметра, лежащего на этой прямой.

Пусть прямая p не проходит через центр O окружности радиуса r. Проведём перпендикуляр OH к прямой p и обозначим буквой d длину этого перпендикуляра, т. е. расстояние от центра данной окружности до прямой (рис. 211).

Исследуем взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между d и r. Возможны три случая.

1) $d<r$. На прямой p от точки H отложим два отрезка HA и HB, длины которых равны $\sqrt{r^2-d^2}$ (рис. 211, *а*). По теореме Пифагора

$$OA=\sqrt{OH^2+HA^2}=\sqrt{d^2+(r^2-d^2)}=r,$$

$$OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)} = r.$$

Следовательно, точки A и B лежат на окружности и, значит, являются общими точками прямой p и данной окружности.

Докажем, что прямая p и данная окружность не имеют других общих точек. Предположим, что они имеют ещё одну общую точку C. Тогда медиана OD равнобедренного треугольника OAC, проведённая к основанию AC, является высотой этого треугольника, поэтому $OD \perp p$. Отрезки OD и OH не совпадают, так как середина D отрезка AC не совпадает с точкой H — серединой отрезка AB. Мы получили, что из точки O проведены два перпендикуляра (отрезки OH и OD) к прямой p, что невозможно.

Итак, если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности ($d < r$), то прямая и окружность имеют две общие точки. В этом случае прямая называется секущей по отношению к окружности.

2) $d = r$. В этом случае $OH = r$, т. е. точка H лежит на окружности и, значит, является общей точкой прямой и окружности (рис. 211, *б*). Прямая p и окружность не имеют других общих точек, так как для любой точки M прямой p, отличной от точки H, $OM > OH = r$ (наклонная OM больше перпендикуляра OH), и, следовательно, точка M не лежит на окружности.

Итак, если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.

3) $d > r$. В этом случае $OH > r$, поэтому для любой точки M прямой p $OM \geqslant OH > r$ (рис. 211, *в*). Следовательно, точка M не лежит на окружности.

Итак, если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.

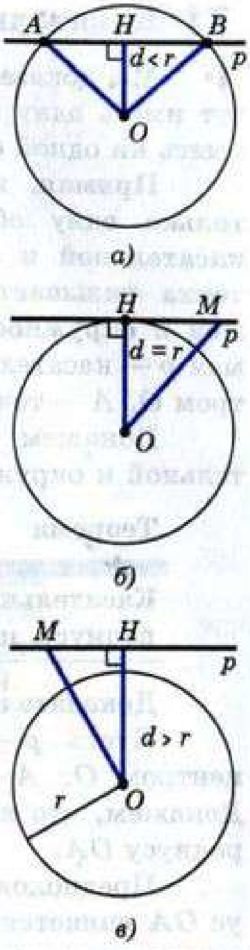


Рис. 211

71 Касательная к окружности

Мы доказали, что прямая и окружность могут иметь одну или две общие точки и могут не иметь ни одной общей точки.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности. На рисунке 212 прямая p — касательная к окружности с центром O, A — точка касания.

Докажем теорему о свойстве касательной к окружности.

Теорема

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

Доказательство

Пусть p — касательная к окружности с центром O, A — точка касания (см. рис. 212). Докажем, что касательная p перпендикулярна к радиусу OA.

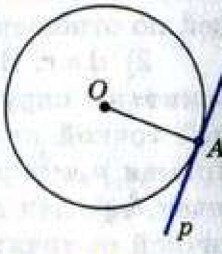


Рис. 212

Предположим, что это не так. Тогда радиус OA является наклонной к прямой p. Так как перпендикуляр, проведённый из точки O к прямой p, меньше наклонной OA, то расстояние от центра O окружности до прямой p меньше радиуса. Следовательно, прямая p и окружность имеют две общие точки. Но это противоречит условию: прямая p — касательная.

Таким образом, прямая p перпендикулярна к радиусу OA. **Теорема доказана.**

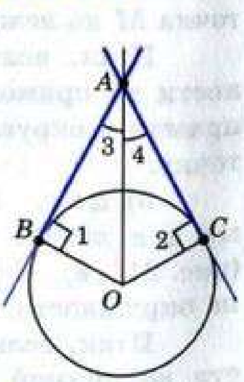


Рис. 213

Рассмотрим две касательные к окружности с центром O, проходящие через точку A и касающиеся окружности в точках B и C (рис. 213). Отрезки AB и AC назовём **отрезками касательных, проведёнными из точки A**. Они обладают следующим свойством:

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Для доказательства этого утверждения обратимся к рисунку 213. По теореме о свойстве касательной углы 1 и 2 прямые, поэтому треугольники ABO и ACO прямоугольные. Они равны, так как имеют общую гипотенузу OA и равные катеты OB и OC. Следовательно, $AB = AC$ и $\angle 3 = \angle 4$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему, обратную теореме о свойстве касательной (признак касательной).

Теорема

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Доказательство

Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведённым из центра окружности к данной прямой. Поэтому расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, и, следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку. Но это и означает, что данная прямая является касательной к окружности. **Теорема доказана.**

На этой теореме основано решение задач на построение касательной. Решим одну из таких задач.

Задача

Через данную точку A окружности с центром O провести касательную к этой окружности.

Решение

Проведём прямую OA, а затем построим прямую p, проходящую через точку A перпендикулярно к прямой OA. По признаку касательной прямая p является искомой касательной.

Задачи

631 Пусть d — расстояние от центра окружности радиуса r до прямой p. Каково взаимное расположение прямой p и окружности, если: а) $r = 16$ см, $d = 12$ см; б) $r = 5$ см, $d = 4{,}2$ см; в) $r = 7{,}2$ дм, $d = 3{,}7$ дм; г) $r = 8$ см, $d = 1{,}2$ дм; д) $r = 5$ см, $d = 50$ мм?

632 □ Расстояние от точки A до центра окружности меньше радиуса окружности. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A, является секущей по отношению к данной окружности.

633 Даны квадрат $OABC$, сторона которого равна 6 см, и окружность с центром в точке O радиуса 5 см. Какие из прямых OA, AB, BC и AC являются секущими по отношению к этой окружности?

634 □ Радиус OM окружности с центром O делит хорду AB пополам. Докажите, что касательная, проведённая через точку M, параллельна хорде AB.

635 □ Через точку A окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.

636 □ Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке C. Найдите угол ACB.

637 □ Угол между диаметром AB и хордой AC равен 30°. Через точку C проведена касательная, пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что треугольник ACD равнобедренный.

638 □ Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B. Найдите AB, если $OA = 2$ см, а $r = 1{,}5$ см.

639 □ Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B. Найдите AB, если $\angle AOB = 60°$, а $r = 12$ см.

640 Даны окружность с центром O радиуса 4,5 см и точка A. Через точку A проведены две касательные к окружности. Найдите угол между ними, если $OA = 9$ см.

641 □ Отрезки AB и AC являются отрезками касательных к окружности с центром O, проведёнными из точки A. Найдите угол BAC, если середина отрезка AO лежит на окружности.

642 □ На рисунке 213 $OB = 3$ см, $OA = 6$ см. Найдите AB, AC, $\angle 3$ и $\angle 4$.

643 □ Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите BC, если $\angle OAB = 30°$, $AB = 5$ см.

644 □ Прямые MA и MB касаются окружности с центром O в точках A и B. Точка C симметрична точке O относительно точки B. Докажите, что $\angle AMC = 3\angle BMC$.

645 Из концов диаметра AB данной окружности проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к касательной, которая не перпенди-

кулярна к диаметру AB. Докажите, что точка касания является серединой отрезка A_1B_1.

646 В треугольнике ABC угол B прямой. Докажите, что: а) прямая BC является касательной к окружности с центром A радиуса AB; б) прямая AB является касательной к окружности с центром C радиуса CB; в) прямая AC не является касательной к окружностям с центром B и радиусами BA и BC.

647 Отрезок AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 3 см. Является ли прямая AH касательной к окружности, если: а) $OA = 5$ см, $AH = 4$ см; б) $\angle HAO = 45°$, $OA = 4$ см; в) $\angle HAO = 30°$, $OA = 6$ см?

648 ❑ Постройте касательную к окружности с центром O:
а) параллельную данной прямой;
б) перпендикулярную к данной прямой.

§2 Центральные и вписанные углы

72 Градусная мера дуги окружности

Отметим на окружности две точки A и B. Они разделяют окружность на две дуги. Чтобы различать эти дуги, на каждой из них отмечают промежуточную точку, например L и M (рис. 214). Обозначают дуги так: $\smile ALB$ и $\smile AMB$. Иногда используется обозначение без промежуточной точки: $\smile AB$ (когда ясно, о какой из двух дуг идёт речь).

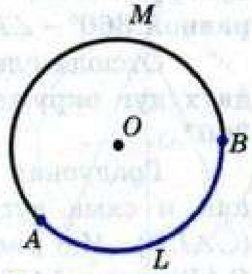


Рис. 214

Дуга называется **полуокружностью**, если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром окружности. На рисунке 215, *а* изображены две полуокружности, одна из которых выделена цветом.

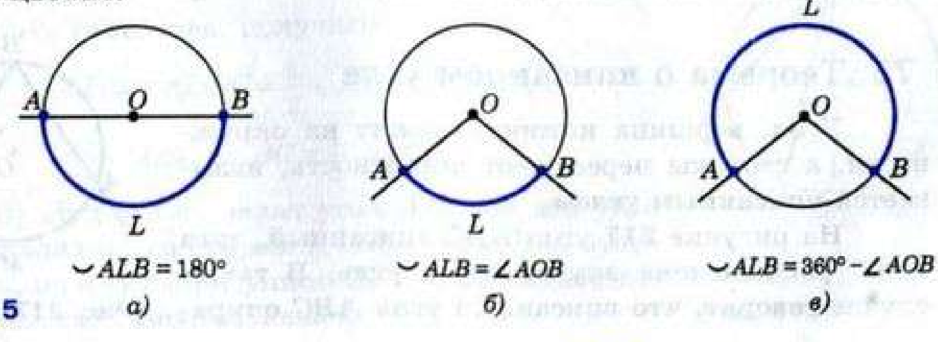


Рис. 215

Угол с вершиной в центре окружности называется её **центральным углом**. Пусть стороны центрального угла окружности с центром O пересекают её в точках A и B. Центральному углу AOB соответствуют две дуги с концами A и B (рис. 215). Если $\angle AOB$ развёрнутый, то ему соответствуют две полуокружности (рис. 215, *а*). Если $\angle AOB$ неразвёрнутый, то говорят, что дуга AB, расположенная внутри этого угла, **меньше полуокружности**. На рисунке 215, *б* эта дуга выделена цветом. Про другую дугу с концами A и B говорят, что она **больше полуокружности** (дуга ALB на рисунке 215, *в*).

Дугу окружности можно измерять в градусах. **Если дуга AB окружности с центром O меньше полуокружности или является полуокружностью, то её градусная мера считается равной градусной мере центрального угла AOB** (см. рис. 215, *а*, *б*). **Если же дуга AB больше полуокружности, то её градусная мера считается равной $360° - \angle AOB$** (см. рис. 215, *в*).

Отсюда следует, что **сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна 360°**.

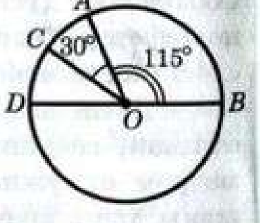


Рис. 216

Градусная мера дуги AB (дуги ALB), как и сама дуга, обозначается символом $\smile AB$ ($\smile ALB$). На рисунке 216 градусная мера дуги CAB равна 145°. Обычно говорят кратко: «Дуга CAB равна 145°» и пишут: $\smile CAB = 145°$. На этом же рисунке $\smile ADB = 360° - 115° = 245°$, $\smile CDB = 360° - 145° = 215°$, $\smile DB = 180°$.

73 Теорема о вписанном угле

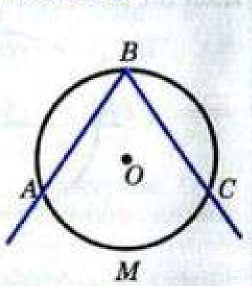


Рис. 217

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом**.

На рисунке 217 угол ABC вписанный, дуга AMC расположена внутри этого угла. В таком случае говорят, что вписанный угол ABC опирается на дугу AMC. Докажем теорему о вписанном угле.

Теорема

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство

Пусть $\angle ABC$ — вписанный угол окружности с центром O, опирающийся на дугу AC (рис. 218). Докажем, что $\angle AOC = \frac{1}{2} \smile AC$. Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC.

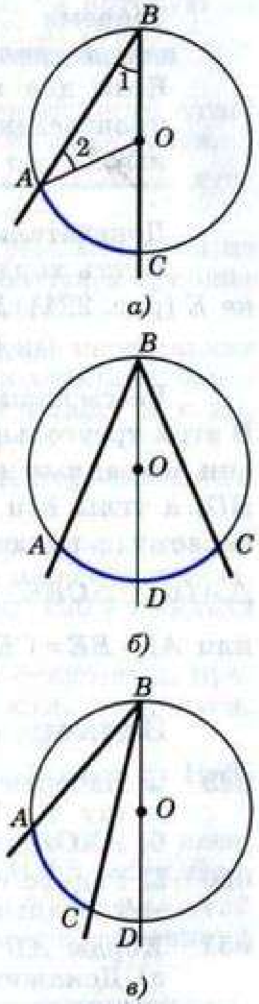


Рис. 218

1) Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC, например со стороной BC (рис. 218, *а*). В этом случае дуга AC меньше полуокружности, поэтому $\angle AOC = \smile AC$. Так как угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника ABO, а углы 1 и 2 при основании равнобедренного треугольника равны, то

$$\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1.$$

Отсюда следует, что

$$2\angle 1 = \smile AC \text{ или } \angle ABC = \angle 1 = \frac{1}{2} \smile AC.$$

2) Луч BO делит угол ABC на два угла. В этом случае луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D (рис. 218, *б*). Точка D разделяет дугу AC на две дуги: $\smile AD$ и $\smile DC$. По доказанному в п. 1) $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \smile DC$. Складывая эти равенства, получаем:

$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \smile AD + \frac{1}{2} \smile DC,$$

$$\text{или } \angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC.$$

3) Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла. Для этого случая, пользуясь рисунком 218, *в*, проведите доказательство самостоятельно.

Следствие 1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 219).

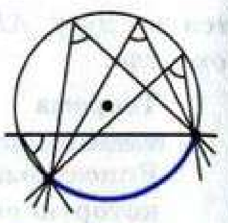


Рис. 219

Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой (рис. 220).

Используя следствие 1, докажем теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд.

Теорема

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

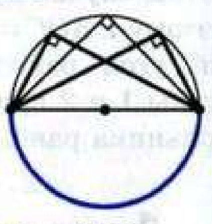


Рис. 220

Доказательство

Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E (рис. 221). Докажем, что

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Рассмотрим треугольники ADE и CBE. В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD, а углы 3 и 4 равны как вертикальные. По первому признаку подобия треугольников $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Отсюда следует, что $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, или $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. **Теорема доказана.**

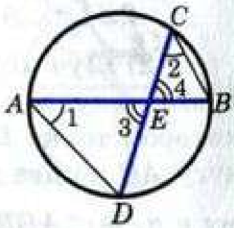


Рис. 221

Задачи

649 Начертите окружность с центром O и отметьте на ней точку A. Постройте хорду AB так, чтобы: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 120°$; г) $\angle AOB = 180°$.

650 Радиус окружности с центром O равен 16. Найдите хорду AB, если: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 180°$.

651 Хорды AB и CD окружности с центром O равны.
а) Докажите, что две дуги с концами A и B соответственно равны двум дугам с концами C и D.
б) Найдите дуги с концами C и D, если $\angle AOB = 112°$.

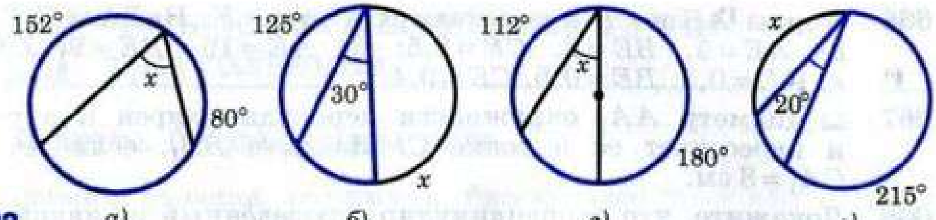


Рис. 222

652 На полуокружности AB взяты точки C и D так, что $\smile AC = 37°$, $\smile BD = 23°$. Найдите хорду CD, если радиус окружности равен 15 см.

653 Найдите вписанный угол ABC, если дуга AC, на которую он опирается, равна: а) 48°; б) 57°; в) 90°; г) 124°; д) 180°.

654 По данным рисунка 222 найдите x.

655 Центральный угол AOB на 30° больше вписанного угла, опирающегося на дугу AB. Найдите каждый из этих углов.

656 Хорда AB стягивает дугу, равную 115°, а хорда AC — дугу в 43°. Найдите угол BAC.

657 Точки A и B разделяют окружность на две дуги, меньшая из которых равна 140°, а бóльшая точкой M делится в отношении 6 : 5, считая от точки A. Найдите угол BAM.

658 Через точку A к данной окружности проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая AD, проходящая через центр O (D — точка на окружности, O лежит между A и D). Найдите $\angle BAD$ и $\angle ADB$, если $\smile BD = 110°20'$.

659 Докажите, что градусные меры дуг окружности, заключённых между параллельными хордами, равны.

660 Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, образующие угол в 32°. Бóльшая дуга окружности, заключённая между сторонами этого угла, равна 100°. Найдите меньшую дугу.

661 Найдите острый угол, образованный двумя секущими, проведёнными из точки, лежащей вне окружности, если дуги, заключённые между секущими, равны 140° и 52°.

662 Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E. Найдите угол BEC, если $\smile AD = 54°$, $\smile BC = 70°$.

663 Отрезок AC — диаметр окружности, AB — хорда, MA — касательная, угол MAB острый. Докажите, что $\angle MAB = \angle ACB$.

664 Прямая AM — касательная к окружности, AB — хорда этой окружности. Докажите, что угол MAB измеряется половиной дуги AB, расположенной внутри угла MAB.

665 Вершины треугольника ABC лежат на окружности. Докажите, что если AB — диаметр окружности, то $\angle C > \angle A$ и $\angle C > \angle B$.

666 Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите ED, если: а) $AE=5$, $BE=2$, $CE=2{,}5$; б) $AE=16$, $BE=9$, $CE=ED$; в) $AE=0{,}2$, $BE=0{,}5$, $CE=0{,}4$.

667 ☐ Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1 и пересекает её в точке C. Найдите BB_1, если $AC=4$ см, $CA_1=8$ см.

668 Докажите, что перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.

669 Пользуясь утверждением, сформулированным в задаче **668**, постройте отрезок, равный среднему пропорциональному для двух данных отрезков.

670 Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках P и Q. Докажите, что $AB^2=AP\cdot AQ$.

671 ☐ Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D. Найдите CD, если: а) $AB=4$ см, $AC=2$ см; б) $AB=5$ см, $AD=10$ см.

672 Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках B_1 и C_1, а другая — в точках B_2 и C_2. Докажите, что $AB_1\cdot AC_1=AB_2\cdot AC_2$.

673 ☐ К данной окружности постройте касательную, проходящую через данную точку вне окружности.

Решение

Пусть даны окружность с центром O и точка A вне этой окружности. Допустим, что задача решена и AB — искомая касательная (рис. 223). Так как прямая AB перпендикулярна к радиусу OB, то решение задачи сводится к построению точки B окружности, для которой $\angle ABO$ прямой. Эту точку можно построить следующим образом: проводим отрезок OA и строим его середину O_1. Затем проводим окружность с центром в точке O_1 радиуса O_1A. Эта окружность пересекает данную окружность в двух точках: B и B_1. Прямые AB и AB_1 — искомые касательные, так как $AB\perp OB$ и $AB_1\perp OB_1$. Действительно, углы ABO и AB_1O, вписанные в окружность с центром O_1, опираются на полуокружности, поэтому они прямые. Очевидно, задача имеет два решения.

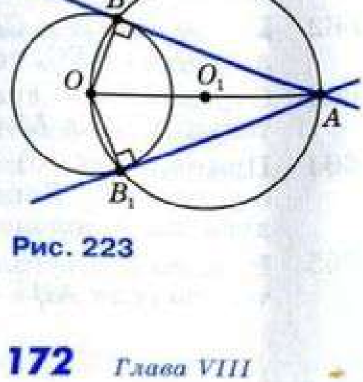


Рис. 223

§ 3 Четыре замечательные точки треугольника

74 Свойства биссектрисы угла

Докажем сначала теорему о биссектрисе угла.

Теорема

Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон[1].

Обратно: **каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе.**

Доказательство

1) Возьмём произвольную точку M на биссектрисе угла BAC, проведём перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC и докажем, что $MK = ML$ (рис. 224). Рассмотрим прямоугольные треугольники AMK и AML. Они равны по гипотенузе и острому углу (AM — общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$ по условию). Следовательно, $MK = ML$.

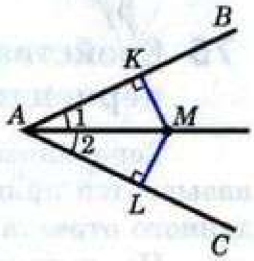


Рис. 224

2) Пусть точка M лежит внутри угла BAC и равноудалена от его сторон AB и AC. Докажем, что луч AM — биссектриса угла BAC (см. рис. 224). Проведём перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC. Прямоугольные треугольники AMK и AML равны по гипотенузе и катету (AM — общая гипотенуза, $MK = ML$ по условию). Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Но это и означает, что луч AM — биссектриса угла BAC. **Теорема доказана.**

Следствие 1

Геометрическим местом точек плоскости, лежащих внутри неразвёрнутого угла и равноудалённых от сторон угла, является биссектриса этого угла.

[1] То есть равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.

Следствие 2

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

В самом деле, обозначим буквой O точку пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC и проведём из этой точки перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к прямым AB, BC и CA (рис. 225). По доказанной теореме $OK = OM$ и $OK = OL$. Поэтому $OM = OL$, т. е. точка O равноудалена от сторон угла ACB и, значит, лежит на биссектрисе CC_1 этого угла. Следовательно, все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O, что и требовалось доказать.

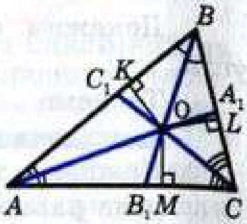


Рис. 225

75 Свойства серединного перпендикуляра к отрезку

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

На рисунке 226 прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

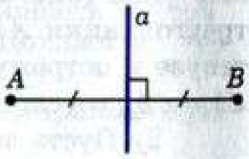


Рис. 226

Докажем теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

Теорема

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.
Обратно: **каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.**

Доказательство

Пусть прямая m — серединный перпендикуляр к отрезку AB, точка O — середина этого отрезка (рис. 227, a).

1) Рассмотрим произвольную точку M прямой m и докажем, что $AM = BM$. Если точ-

ка M совпадает с точкой O, то это равенство верно, так как O — середина отрезка AB. Пусть M и O — различные точки. Прямоугольные треугольники OAM и OBM равны по двум катетам ($OA = OB$, OM — общий катет), поэтому $AM = BM$.

2) Рассмотрим произвольную точку N, равноудалённую от концов отрезка AB, и докажем, что точка N лежит на прямой m. Если N — точка прямой AB, то она совпадает с серединой O отрезка AB и потому лежит на прямой m. Если же точка N не лежит на прямой AB, то треугольник ANB равнобедренный, так как $AN = BN$ (рис. 227, б). Отрезок NO — медиана этого треугольника, а значит, и высота. Таким образом, $NO \perp AB$, поэтому прямые ON и m совпадают, т. е. N — точка прямой m. **Теорема доказана.**

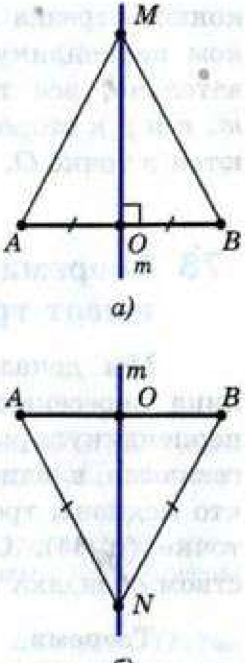


Рис. 227

Следствие 1

Геометрическим местом точек плоскости, равноудалённых от концов отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.

Следствие 2

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим серединные перпендикуляры m и n к сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 228). Эти прямые пересекаются в некоторой точке O. В самом деле, если предположить противное, т. е. что $m \parallel n$, то прямая BA, будучи перпендикулярной к прямой m, была бы перпендикулярна и к параллельной ей прямой n, а тогда через точку B проходили бы две прямые BA и BC, перпендикулярные к прямой n, что невозможно.

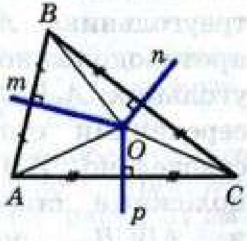


Рис. 228

По доказанной теореме $OB = OA$ и $OB = OC$. Поэтому $OA = OC$, т. е. точка O равноудалена от концов отрезка AC и, значит, лежит на серединном перпендикуляре p к этому отрезку. Следовательно, все три серединных перпендикуляра m, n и p к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O.

76 Теорема о пересечении высот треугольника

Мы доказали, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Ранее было доказано, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (п. 64). Оказывается, аналогичным свойством обладают и высоты треугольника.

Теорема

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке (рис. 229).

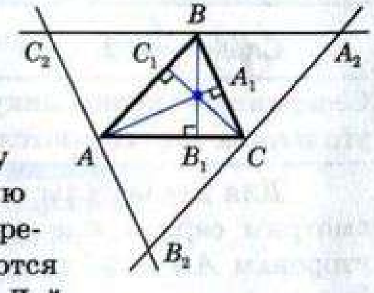


Рис. 229

Проведём через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне. Получим треугольник $A_2B_2C_2$. Точки A, B и C являются серединами сторон этого треугольника. Действительно, $AB = A_2C$ и $AB = CB_2$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, поэтому $A_2C = CB_2$. Аналогично $C_2A = AB_2$ и $C_2B = BA_2$. Кроме того, как следует из построения, $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$. Таким образом, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$. Следовательно, они пересекаются в одной точке. **Теорема доказана.**

Итак, с каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам и точка пересечения высот (или их продолжений). Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника.**

Задачи

674 Из точки M биссектрисы неразвёрнутого угла O проведены перпендикуляры MA и MB к сторонам этого угла. Докажите, что $AB \perp OM$.

675 Стороны угла O касаются каждой из двух окружностей, имеющих общую касательную в точке A. Докажите, что центры этих окружностей лежат на прямой OA.

676 ☐ Стороны угла A касаются окружности с центром O радиуса r. Найдите: а) OA, если $r = 5$ см, $\angle A = 60°$; б) r, если $OA = 14$ дм, $\angle A = 90°$.

677 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что точка O является центром окружности, касающейся прямых AB, BC, AC.

678 ☐ Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите углы ACM и BCM, если: а) $\angle AMB = 136°$; б) $\angle AMB = 111°$.

679 ☐ Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найдите: а) AD и CD, если $BD = 5$ см, $AC = 8{,}5$ см; б) AC, если $BD = 11{,}4$ см, $AD = 3{,}2$ см.

680 Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке D стороны BC. Докажите, что: а) точка D — середина стороны BC; б) $\angle A = \angle B + \angle C$.

681 ☐ Серединный перпендикуляр к стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке E. Найдите основание AC, если периметр треугольника AEC равен 27 см, а $AB = 18$ см.

682 Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что прямая CD проходит через середину отрезка AB.

683 Докажите, что если в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, то медиана AM треугольника не является высотой.

684 Биссектрисы углов при основании AB равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что прямая CM перпендикулярна к прямой AB.

685 Высоты AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC, проведённые к боковым сторонам, пересекаются в точке M. Докажите, что прямая MC — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

686 ❑ **Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку.**

Решение

Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности с центрами в точках A и B радиуса AB (рис. 230). Эти окружности пересекаются в двух точках M_1 и M_2. Отрезки AM_1, AM_2, BM_1, BM_2 равны друг другу как радиусы этих окружностей.

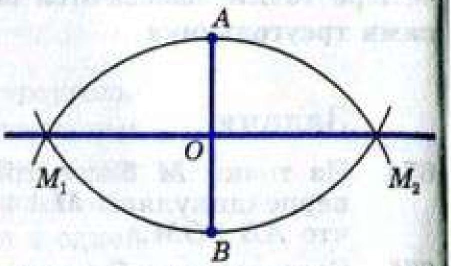


Рис. 230

Проведём прямую M_1M_2. Она является искомым серединным перпендикуляром к отрезку AB. В самом деле, точки M_1 и M_2 равноудалены от концов отрезка AB, поэтому они лежат на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Значит, прямая M_1M_2 и есть серединный перпендикуляр к отрезку AB.

687 ❑ Даны прямая a и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой. На прямой a постройте точку M, равноудалённую от точек A и B.

688 ❑ Даны угол и отрезок. Постройте точку, лежащую внутри данного угла, равноудалённую от его сторон и равноудалённую от концов данного отрезка.

§4 Вписанная и описанная окружности

77 Вписанная окружность

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник, а многоугольник — **описанным** около этой окружности. На рисунке 231 четырёхугольник $EFMN$ описан около окружности с центром O, а четырёхугольник $DKMN$ не является описанным около этой окружности, так как сторона DK не касается окружности. На ри-

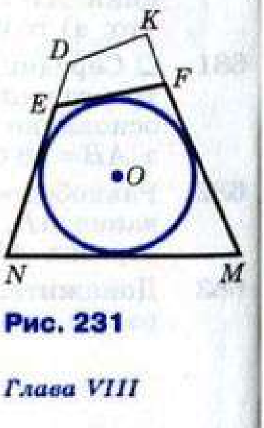


Рис. 231

сунке 232 треугольник ABC описан около окружности с центром O.

Докажем теорему об окружности, вписанной в треугольник.

Теорема

В любой треугольник можно вписать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис. Проведём из точки O перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к сторонам AB, BC и CA (см. рис. 232). Так как точка O равноудалена от сторон треугольника ABC, то $OK=OL=OM$. Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, L и M. Стороны треугольника ABC касаются этой окружности в точках K, L, M, так как они перпендикулярны к радиусам OK, OL и OM. Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC. Теорема доказана.

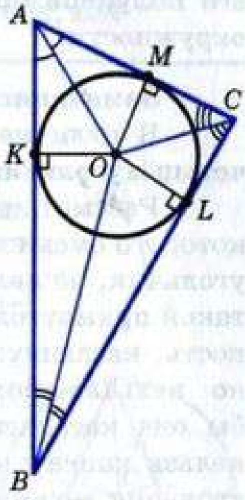


Рис. 232

Замечание 1

Отметим, что **в треугольник можно вписать только одну окружность.**

В самом деле, допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой окружности равноудалён от сторон треугольника и, значит, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

Замечание 2

Обратимся к рисунку 232. Мы видим, что треугольник ABC составлен из трёх треугольников: ABO, BCO и CAO. Если в каждом из этих треугольников принять за основание сторону треугольника ABC, то высотой окажется радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC. Поэтому площадь S треугольника ABC выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}CA \cdot r =$$

$$= \frac{AB + BC + CA}{2} \cdot r.$$

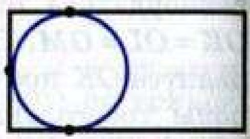
Таким образом,

площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности.

Замечание 3

В отличие от треугольника **не во всякий четырёхугольник можно вписать окружность.**

Рассмотрим, например, прямоугольник, у которого смежные стороны не равны, т. е. прямоугольник, не являющийся квадратом. Ясно, что в такой прямоугольник можно «поместить» окружность, касающуюся трёх его сторон (рис. 233, *а*), но нельзя «поместить» окружность так, чтобы она касалась всех четырёх его сторон, т. е. нельзя вписать окружность. Если же в четырёхугольник можно вписать окружность, то его стороны обладают следующим замечательным свойством:



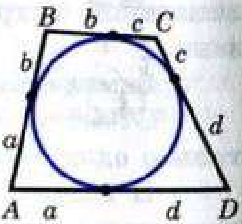


Рис. 233

В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Это свойство легко установить, используя рисунок 233, *б*, на котором одними и теми же буквами обозначены равные отрезки касательных. В самом деле, $AB + CD = a + b + c + d$, $BC + AD = a + b + c + d$, поэтому $AB + CD = BC + AD$. Оказывается, верно и обратное утверждение:

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность (см. задачу 724).

---

78 Описанная окружность

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около многоугольника, а многоугольник — **вписанным** в эту окружность. На рисунке 234 четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, а четырёхугольник $AECD$ не является вписанным в эту окружность, так как вершина E не лежит на окружности. Треугольник ABC на рисунке 235 является вписанным в окружность с центром O.

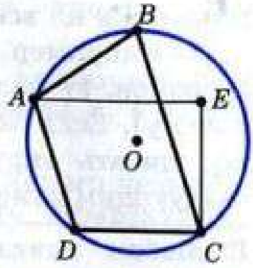


Рис. 234

Докажем теорему об окружности, описанной около треугольника.

Теорема

Около любого треугольника можно описать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам и проведём отрезки OA, OB и OC (рис. 235). Так как точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, то $OA = OB = OC$. Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника ABC. **Теорема доказана.**

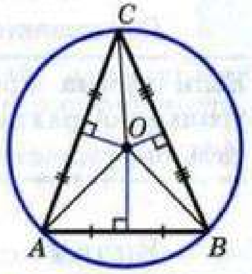


Рис. 235

Замечание 1

Отметим, что **около треугольника можно описать только одну окружность.**

В самом деле, допустим, что около треугольника можно описать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудалён от его вершин и поэтому совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

Замечание 2

В отличие от треугольника **около четырёхугольника не всегда можно описать окружность.**

Например, нельзя описать окружность около ромба, не являющегося квадратом (объясните почему). Если же около четырёхугольника можно описать окружность, то его углы обладают следующим замечательным свойством:

В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Это свойство легко установить, если обратиться к рисунку 236 и воспользоваться теоремой о вписанном угле. В самом деле,

$$\angle A = \frac{1}{2} \smile BCD, \ \angle C = \frac{1}{2} \smile BAD,$$

откуда следует

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

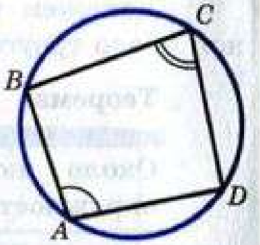


Рис. 236

Оказывается, верно и обратное:

Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность (см. задачу 729).

Задачи

689 В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

690 Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведённую к основанию, в отношении 12 : 5, считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см.

691 Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 3 см и 4 см, считая от основания. Найдите периметр треугольника.

692 В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC и CA в точках P, Q и R. Найдите AP, PB, BQ, QC, CR, RA, если $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $CA = 5$ см.

693 ☐ В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r. Найдите периметр треугольника, если: а) гипотенуза равна 26 см, $r = 4$ см; б) точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см.

694 Найдите диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если гипотенуза треугольника равна c, а сумма катетов равна m.

695 ☐ Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 15 см. Найдите периметр этого четырёхугольника.

696 Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм — ромб.

697 Докажите, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

698 ☐ Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь четырёхугольника.

699 ☐ Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 10 см, а его площадь — 12 см^2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырёхугольник.

700 Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность.

701 ☐ Начертите три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. В каждый из них впишите окружность.

702 ☐ В окружность вписан треугольник ABC так, что AB — диаметр окружности. Найдите углы треугольника, если: а) $\smile BC = 134°$; б) $\smile AC = 70°$.

703 В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Найдите углы треугольника, если $\smile BC = 102°$.

704 Окружность с центром O описана около прямоугольного треугольника. а) Докажите, что точка O — середина гипотенузы. б) Найдите стороны треугольника, если диаметр окружности равен d, а один из острых углов треугольника равен α.

705 ☐ Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если: а) $AC = 8$ см, $BC = 6$ см; б) $AC = 18$ см, $\angle B = 30°$.

706 ☐ Найдите сторону равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 10 см.

707 ☐ Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°, боковая сторона треугольника равна 8 см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

708 Докажите, что можно описать окружность: а) около любого прямоугольника; б) около любой равнобедренной трапеции.

709 Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм — прямоугольник.

710 Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная.

711 ❑ Начертите три треугольника: тупоугольный, прямоугольный и равносторонний. Для каждого из них постройте описанную окружность.

Вопросы для повторения к главе VIII

1 Исследуйте взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между радиусом окружности и расстоянием от её центра до прямой. Сформулируйте полученные выводы.

2 Какая прямая называется секущей по отношению к окружности?

3 Какая прямая называется касательной к окружности? Какая точка называется точкой касания прямой и окружности?

4 Сформулируйте и докажите теорему о свойстве касательной.

5 Докажите, что отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

6 Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о свойстве касательной.

7 Объясните, как через данную точку окружности провести касательную к этой окружности.

8 Какой угол называется центральным углом окружности?

9 Объясните, какая дуга называется полуокружностью, какая дуга меньше полуокружности, а какая больше полуокружности.

10 Как определяется градусная мера дуги? Как она обозначается?

11 Какой угол называется вписанным? Сформулируйте и докажите теорему о вписанном угле.

12 Докажите, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

13 Докажите, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.

14 Сформулируйте и докажите теорему об отрезках пересекающихся хорд.

15 Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе угла.

16 Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

17 Какая прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку?

18 Сформулируйте и докажите теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

19 Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

20 Сформулируйте и докажите теорему о пересечении высот треугольника.

21 Какая окружность называется вписанной в многоугольник? Какой многоугольник называется описанным около окружности?

22 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в треугольник. Сколько окружностей можно вписать в данный треугольник?

23 Каким свойством обладают стороны четырёхугольника, описанного около окружности?

24 Какая окружность называется описанной около многоугольника? Какой многоугольник называется вписанным в окружность?

25 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около треугольника. Сколько окружностей можно описать около данного треугольника?

26 Каким свойством обладают углы четырёхугольника, вписанного в окружность?

Дополнительные задачи

712 Докажите, что касательные, проведённые через концы хорды, не являющейся диаметром окружности, пересекаются.

713 Прямые AB и AC — касательные к окружности с центром O, B и C — точки касания. Через произвольную точку X, взятую на дуге BC, проведена касательная к этой окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N. Докажите, что периметр треугольника AMN и величина угла MON не зависят от выбора точки X на дуге BC.

714* Две окружности имеют общую точку M и общую касательную в этой точке. Прямая AB касается одной окружности в точке A, а другой — в точке B. Докажите, что точка M лежит на окружности с диаметром AB.

715 Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1. Докажите, что градусные меры дуг AB и AB_1, меньших полуокружности, равны.

716 Точки A, B, C и D лежат на окружности. Докажите, что если $\smile AB = \smile CD$, то $AB = CD$.

717 Отрезок AB является диаметром окружности, а хорды BC и AD параллельны. Докажите, что хорда CD является диаметром.

718 По данным рисунка 237 докажите, что

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CLD + \smile AKB).$$

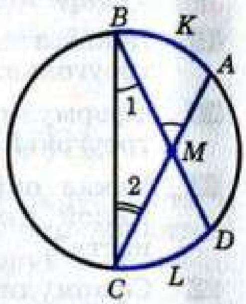


Рис. 237

Решение

Проведём хорду BC. Так как $\angle AMB$ — внешний угол треугольника BMC, то $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. По теореме о вписанном угле $\angle 1 = \frac{1}{2}\smile CLD$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\smile AKB$, поэтому $\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CLD + \smile AKB)$.

719 Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие. Докажите, что угол между ними измеряется полуразностью дуг, заключённых внутри угла.

720 Может ли вершина разностороннего треугольника лежать на серединном перпендикуляре к какой-либо стороне? Ответ обоснуйте.

721 Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат.

722 Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности радиуса r. Известно, что $AB : CD = 2 : 3$, $AD : BC = 2 : 1$. Найдите стороны четырёхугольника, если его площадь равна S.

723 Докажите, что если прямые, содержащие основания трапеции, касаются окружности, то прямая, проходящая через середины боковых сторон трапеции, проходит через центр этой окружности.

724 Докажите, что если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

Решение

Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (1)$$

Точка O пересечения биссектрис углов A и B равноудалена от сторон AD, AB и BC, поэтому можно провести окружность с центром O, касающуюся указанных трёх сторон (рис. 238, *а*). Докажем, что эта окружность касается также стороны CD и, значит, является вписанной в четырёхугольник $ABCD$.

Предположим, что это не так. Тогда прямая CD либо не имеет общих точек с окружностью, либо является секущей. Рассмотрим первый случай (рис. 238, *б*). Проведём касательную $C'D'$, параллельную стороне CD (C' и D' — точки пересечения касательной со сторонами BC и AD). Так как $ABC'D'$ — описанный четырёхугольник, то по свойству его сторон

$$AB + C'D' = BC' + AD'. \qquad (2)$$

Но $BC' = BC - C'C$, $AD' = AD - D'D$, поэтому из равенства (2) получаем:

$$C'D' + C'C + D'D = BC + AD - AB.$$

Правая часть этого равенства в силу (1) равна CD. Таким образом, приходим к равенству

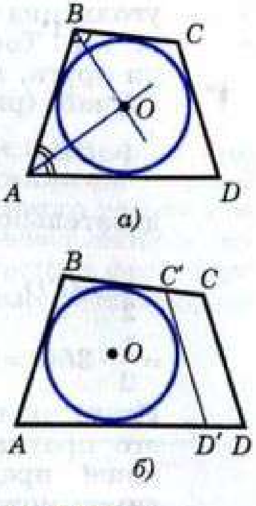


Рис. 238

$$C'D' + C'C + D'D = CD,$$

т. е. в четырёхугольнике $C'CDD'$ одна сторона равна сумме трёх других сторон. Но этого не может быть, и, значит, наше предположение ошибочно. Аналогично можно доказать, что прямая CD не может быть секущей окружности. Следовательно, окружность касается стороны CD, что и требовалось доказать.

725 Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями a и b.

726 Центр описанной около треугольника окружности лежит на медиане. Докажите, что этот треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

727 В равнобедренный треугольник вписана окружность с центром O_1 и около него описана окружность с центром O_2. Докажите, что точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

728 Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб — квадрат.

729* Докажите, что если в четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

Решение

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$

$$\angle A + \angle C = 180°. \qquad (1)$$

Проведём окружность через три вершины четырёхугольника: A, B и D (рис. 239, *а*) — и докажем, что она проходит также через вершину C, т. е. является описанной около четырёхугольника $ABCD$. Предположим, что это не так. Тогда вершина C лежит либо внутри круга, либо вне его. Рассмотрим первый случай (рис. 239, б). В этом случае $\angle C = \frac{1}{2}(\smile DAB + \smile EF)$ (см. задачу **718**), и, следовательно, $\angle C > \frac{1}{2}\smile DAB$. Так как $\angle A = \frac{1}{2}\smile BED$, то $\angle A + \angle C > \frac{1}{2}(\smile BED + \smile DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

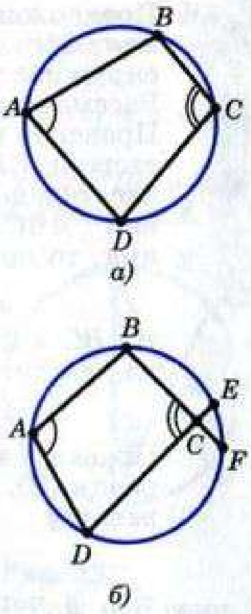


Рис. 239

Итак, мы получили, что $\angle A + \angle C > 180°$. Но это противоречит условию (1), и, значит, наше предположение ошибочно. Аналогично можно доказать (опираясь на задачу **719**), что вершина C не может лежать вне круга. Следовательно, вершина C лежит на окружности, что и требовалось доказать.

730 Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла AOB и пересекающиеся в точке C внутри угла. Докажите, что около четырёхугольника $ACBO$ можно описать окружность.

731 Докажите, что около выпуклого четырёхугольника, образованного при пересечении биссектрис углов трапеции, можно описать окружность.

732 В прямоугольном треугольнике ABC из точки M стороны AC проведён перпендикуляр MH к гипотенузе AB. Докажите, что углы MHC и MBC равны.

733 ☐ Найдите радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности, если радиус описанной окружности равен 10 см.

734 Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность и можно описать около него окружность, то этот параллелограмм — квадрат.

735 В трапецию с основаниями a и b можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность. Найдите радиус вписанной окружности.

736 ☐ Даны прямая a, точка A, лежащая на этой прямой, и точка B, не лежащая на ней. Постройте окружность, проходящую через точку B и касающуюся прямой a в точке A.

737 Даны две параллельные прямые и точка, не лежащая ни на одной из них. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных прямых.

Глава IX

Векторы

Эта глава посвящена разработке векторного аппарата геометрии. С помощью векторов можно доказывать теоремы и решать геометрические задачи. Примеры такого применения векторов приведены в данной главе. Но изучение векторов полезно ещё и потому, что они широко используются в физике для описания различных физических величин, таких, например, как скорость, ускорение, сила.

§1 Понятие вектора

79 Понятие вектора

Многие физические величины, например сила, перемещение материальной точки, скорость, характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением в пространстве. Такие физические величины называются **векторными величинами** (или коротко **векторами**).

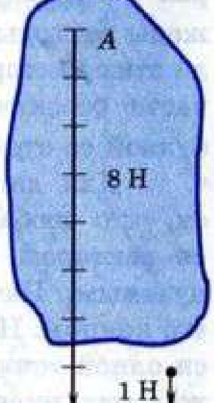


Рис. 240

Рассмотрим пример. Пусть на тело действует сила в 8 Н. На рисунке силу изображают отрезком со стрелкой (рис. 240). Стрелка указывает направление силы, а длина отрезка соответствует в выбранном масштабе числовому значению силы. Так, на рисунке 240 сила в 1 Н изображена отрезком длиной 0,6 см, поэтому сила в 8 Н изображена отрезком длиной 4,8 см.

Отвлекаясь от конкретных свойств физических векторных величин, мы приходим к геометрическому понятию вектора.

Рассмотрим произвольный отрезок. Его концы называются также **граничными точками отрезка**.

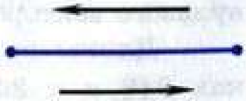


Рис. 241

На отрезке можно указать два направления: от одной граничной точки к другой и наоборот (рис. 241).

Чтобы выбрать одно из этих направлений, одну граничную точку отрезка назовём **началом**

отрезка, а другую — **концом отрезка** и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.

Определение

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется **направленным отрезком** или **вектором.**

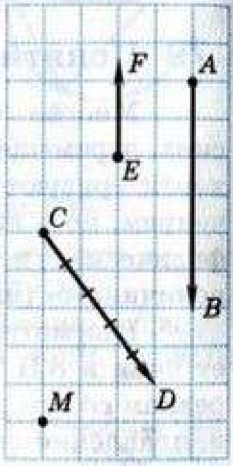
Рис. 242

На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой, показывающей направление вектора. Векторы обозначают двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними, например $\overrightarrow{AB}$. Первая буква обозначает начало вектора, вторая — конец (рис. 242). На рисунке 243, *а* изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$; точки A, C, E — начала этих векторов, а B, D, F — их концы. Векторы часто обозначают и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 243, *б*).

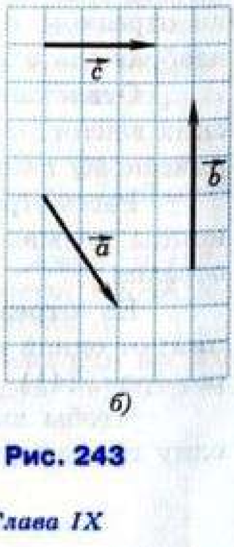
Для дальнейшего целесообразно условиться, что любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется **нулевым.** Начало нулевого вектора совпадает с его концом. На рисунке такой вектор изображается одной точкой. Если, например, точка, изображающая нулевой вектор, обозначена буквой M, то данный нулевой вектор можно обозначить так: $\overrightarrow{MM}$ (рис. 243, *а*). Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$. На рисунке 243 векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ ненулевые, а вектор $\overrightarrow{MM}$ нулевой.

Длиной или **модулем** ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}|=0$.

Длины векторов, изображённых на рисунках 243, *а* и 243, *б*, таковы: $|\overrightarrow{AB}|=6$, $|\overrightarrow{CD}|=5$, $|\overrightarrow{EF}|=2{,}5$, $|\overrightarrow{MM}|=0$, $|\vec{a}|=\sqrt{13}$, $|\vec{b}|=4{,}5$, $|\vec{c}|=3$ (каждая клетка на рисунке 243 имеет сторону, равную единице измерения отрезков).



а)



б)

Рис. 243

80 Равенство векторов

Прежде чем дать определение равных векторов, обратимся к примеру. Рассмотрим движение тела, при котором все его точки движутся с одной и той же скоростью и в одном и том же направлении.

Скорость каждой точки M тела является векторной величиной, поэтому её можно изобразить направленным отрезком, начало которого совпадает с точкой M (рис. 244). Так как все точки тела движутся с одной и той же скоростью, то все направленные отрезки, изображающие скорости этих точек, имеют одно и то же направление и длины их равны.

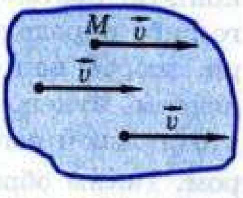


Рис. 244

Этот пример подсказывает нам, как определить равенство векторов.

Предварительно введём понятие коллинеарных векторов.

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

На рисунке 245 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MM}$ (вектор $\overrightarrow{MM}$ нулевой) коллинеарны, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$, а также $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ не коллинеарны.

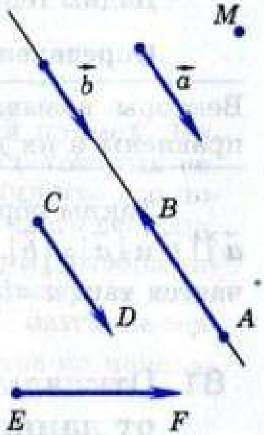


Рис. 245

Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **сонаправленными**, а во втором — **противоположно направленными**[1]. Сонаправленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается

---

[1] Нетрудно дать и точное определение этих понятий. Например, два ненулевых вектора, лежащие на параллельных прямых, называются сонаправленными (противоположно направленными), если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, проходящей через начала. Как сформулировать аналогичное определение для ненулевых векторов, лежащих на одной прямой?

следующим образом: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то это обозначают так: $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. На рисунке 245 изображены как сонаправленные, так и противоположно направленные векторы: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$.

Начало нулевого вектора совпадает с его концом, поэтому нулевой вектор не имеет какого-либо определённого направления. Иначе говоря, любое направление можно считать направлением нулевого вектора. Условимся считать, что нулевой вектор сонаправлен с любым вектором. Таким образом, на рисунке 245 $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\vec{a}$ и т. д.

Ненулевые коллинеарные векторы обладают свойствами, которые проиллюстрированы на рисунке 246, *а — в*.

Дадим теперь определение равных векторов.

Определение

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}=\vec{b}$.

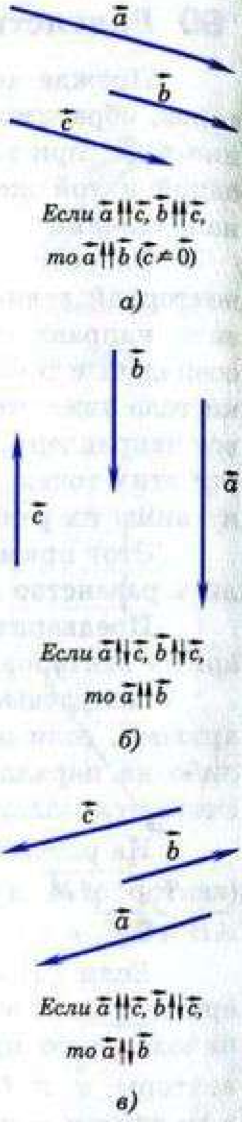


Рис. 246

81 Откладывание вектора от данной точки

Если точка A — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что **вектор $\vec{a}$ отложен от точки A** (рис. 247). Докажем следующее утверждение:

от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

Вектор $\vec{a}$ отложен от точки A

Рис. 247

В самом деле, если $\vec{a}$ — нулевой вектор, то искомым вектором является вектор $\overrightarrow{MM}$.